יון לפסוף
16/1/06

טרנספורמציית בוגוליובוב (פרמיונים)

* רעיון:

$$\begin{cases} \alpha_k = u_k c_k - v_k c_{-k}^+ \\ \alpha_k^+ = u_k c_k^+ - v_k c_{-k} \end{cases}$$

כאשר k מסמן מצב חלקיק וספין ↑
$-k$ מסמן מצב חלקיק וספין ↓

באופן כללי, u_k ו- v_k ממשיים. כמו כן נסמן בהמשך $u_k = u_{-k}$.

* נדרוש שטרנספורמציה זו תהיה קנונית, כלומר תשמר את יחסי החילוף הפרמיוניים:

$$\{\alpha_k, \alpha_k^+\} = 1 \,,$$

$$\{\alpha_k, \alpha_{-k}\} = 0 \,, \quad \text{וכו' ...}$$

$$\Rightarrow u_k^2 \{c_k, c_k^+\} + v_k^2 \{c_{-k}^+, c_{-k}\} = \underline{u_k^2 + v_k^2 = 1}$$

$$\Rightarrow \frac{u_k}{v_k} = -\frac{v_{-k}}{u_{-k}} \xrightarrow{\text{נדרוש}} \begin{cases} u_{-k} = u_k \\ v_{-k} = -v_k \end{cases}$$

3 המשוואות הללו יבטיחו שטרנספורמציה זו אכן קנונית.

* ניתן להראות ש- טרנספ' סיבוב בזווית θ_k הם נדרוש:

$$u_k = \cos\theta_k \,; \quad v_k = \sin\theta_k \,; \quad \theta_{-k} = -\theta_k \,;$$

נקבל:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\vec{k}} \\ \alpha^{+}_{-\vec{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\vec{k}} & v_{\vec{k}} \\ -v_{\vec{k}} & u_{\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\vec{k}} \\ c^{+}_{-\vec{k}} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_{-\vec{k}} \\ \alpha^{+}_{\vec{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\vec{k}} & -v_{\vec{k}} \\ v_{\vec{k}} & u_{\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-\vec{k}} \\ c^{+}_{\vec{k}} \end{pmatrix}$$

ואינברסיה נקבל: ההפוכה:

$$\begin{cases} c_{\vec{k}} = u_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} \alpha^{+}_{-\vec{k}} \\ c^{+}_{-\vec{k}} = -v_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + u_{\vec{k}} \alpha^{+}_{-\vec{k}} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_{-\vec{k}} = u_{\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}} - v_{\vec{k}} \alpha^{+}_{\vec{k}} \\ c^{+}_{\vec{k}} = v_{\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}} + u_{\vec{k}} \alpha^{+}_{\vec{k}} \end{cases}$$

* c^{+} ו- c מייצרים ומאפסים אלקטרונים
α^{+} ו- α מייצרים ומאפסים קוזי-חלקיקים (בוזונים).

$\Leftarrow$ ניתן להבחין שני מצבי שיווי:

$|0\rangle$ שם אלקטרונים: $\langle 0| c_{\vec{k}} = \langle 0| c_{-\vec{k}} = 0$

$|G\rangle$ שם קוזי-חלקיקים: $\langle G| \alpha_{\vec{k}} = \langle G| \alpha_{-\vec{k}} = 0$

וקיים קשר פשוט ביניהם:

$$|G\rangle = \prod_{\vec{k}} \left(u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} c^{+}_{-\vec{k}} c^{+}_{\vec{k}} \right) |0\rangle$$

או-

$$|0\rangle = \prod_{\vec{k}} \left(u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} \alpha^{+}_{-\vec{k}} \alpha^{+}_{\vec{k}} \right) |G\rangle$$

(יום ג' 18/1/06)

הגבה מיקרוסקופית BCS

* אומר המספרים:

$$N_{\vec{k}} + N_{-\vec{k}} = C^{\dagger}_{\vec{k}} C_{\vec{k}} + C^{\dagger}_{-\vec{k}} C_{-\vec{k}} =$$

$$= u^2_{\vec{k}} \alpha^{\dagger}_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} \left(\alpha^{\dagger}_{\vec{k}} \alpha^{\dagger}_{-\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} \right) + \underline{v^2_{\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}} \alpha^{\dagger}_{-\vec{k}}}$$

$$+ u^2_{\vec{k}} \alpha^{\dagger}_{-\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}} - u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} \left(\underbrace{\alpha^{\dagger}_{-\vec{k}} \alpha^{\dagger}_{\vec{k}}}_{(-1)} + \underbrace{\alpha_{\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}}}_{(-1)} \right) + \underbrace{v^2_{\vec{k}} \alpha^{\dagger}_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}}_{\text{סידור נורמל}} +$$

$$= 2 v^2_{\vec{k}} + \left(u^2_{\vec{k}} - v^2_{\vec{k}} \right) \left[\alpha^{\dagger}_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + \alpha^{\dagger}_{-\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}} \right] + 2 u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} \left[\alpha^{\dagger}_{\vec{k}} \alpha^{\dagger}_{-\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} \right]$$

* אומר האוניטריות (בהנחת אינרים מסדר ראשון):

$$\sum_{\vec{k},\vec{q} \in S} C^{\dagger}_{\vec{q}} C^{\dagger}_{-\vec{q}} C_{-\vec{k}} C_{\vec{k}} \cong \sum_{\vec{q},\vec{k} \in S} u_{\vec{q}} v_{\vec{q}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k} \in S} v^4_{\vec{k}}$$

$$+ \sum_{\vec{k} \in S} \left[\left(u^2_{\vec{k}} - v^2_{\vec{k}} \right) v^2_{\vec{k}} - 2 u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} \sum_{\vec{q} \in S} u_{\vec{q}} v_{\vec{q}} \right] \left(\alpha^{\dagger}_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + \alpha^{\dagger}_{-\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}} \right)$$

$$+ \sum_{\vec{k} \in S} \left[\left(u^2_{\vec{k}} - v^2_{\vec{k}} \right) \sum_{\vec{q} \in S} u_{\vec{q}} v_{\vec{q}} + 2 u_{\vec{k}} v^3_{\vec{k}} \right] \left(\alpha^{\dagger}_{\vec{k}} \alpha^{\dagger}_{-\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} \right)$$

* נסמן -

$$\epsilon_{\vec{k}} \equiv \begin{cases} E(\vec{k}) & \vec{k} \notin S \\ E(\vec{k}) - G v^2_{\vec{k}} & \vec{k} \in S \end{cases}$$

$$\Delta \equiv G \sum_{\vec{k} \in S} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}$$ - נסמן

בהגדרת חלק מהאברים ההמילטוניאן אינו תלוי עם אופרטור המספר הכולל $N_{op} \Rightarrow$ מספר האלקטרונים N לא נשמר !!

$\Rightarrow$ נשתמש לשם כך בקשר הנלווה הנתון מן-מום שלפנינו

$$K = H - \mu N_{op}$$

כאשר את הפוטנציאל הכימי μ נמצא כפתרון המקיים ש- $N = \langle N_{op} \rangle$.

$$K = H - \mu N_{op} = 2\sum_{\vec{k}} (\epsilon_{\vec{k}} - \mu) V_{\vec{k}}^2 - \frac{\Delta^2}{G} + G\sum_{\vec{k} \in S} V_{\vec{k}}^4$$

קבוע

$$+\sum_{\vec{k}} (\epsilon_{\vec{k}} - \mu)(u_{\vec{k}}^2 - V_{\vec{k}}^2)\left[\alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}}^+ \alpha_{-\vec{k}}\right]$$

$$+ 2\Delta \sum_{\vec{k} \in S} u_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \left[\alpha_{-\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{-\vec{k}}^+\right]$$

אופרטור מספר

$$+ 2\sum_{\vec{k}} (\epsilon_{\vec{k}} - \mu) u_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \left[\alpha_{\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}}^+\right]$$

$$- \Delta \sum_{\vec{k} \in S} (u_{\vec{k}}^2 - V_{\vec{k}}^2)\left[\alpha_{\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}}^+\right]$$

בג"ק

$\Rightarrow$ נקבל (בדיוק) ג"ו בתורת $u_{\vec{k}}$ ו- $V_{\vec{k}}$ כך שהאברים הבג"ק יתאפסו.