רון ליפשיץ
16/1/06

טרנספורמציית בוגוליובוב (פרמיונית)

* נבחר:

$$\begin{cases} \alpha_{\vec{k}} = u_{\vec{k}} c_{\vec{k}} - v_{\vec{k}} c^{\dagger}_{-\vec{k}} \\ \alpha^{\dagger}_{\vec{k}} = u_{\vec{k}} c^{\dagger}_{\vec{k}} - v_{\vec{k}} c_{-\vec{k}} \end{cases}$$

כאשר $\vec{k}$ מסמן תנע חיובי וספין $\uparrow$
$-\vec{k}$ מסמן תנע שלילי וספין $\downarrow$

באופן כללי, $u_{\vec{k}}$ ו- $v_{\vec{k}}$ מרוכבים. כאן נסתפק בממשיים.

* נדרוש שהטרנספורמציה תהיה קנונית, כלומר תשמר את יחסי החילוף הפרמיוניים:

$$\{\alpha_{\vec{k}}, \alpha^{\dagger}_{\vec{k}}\} = 1,$$

$$\{\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{-\vec{k}}\} = 0, \ldots \text{ וכו'}$$

$$u^2_{\vec{k}}\{c_{\vec{k}}, c^{\dagger}_{\vec{k}}\} + v^2_{\vec{k}}\{c^{\dagger}_{-\vec{k}}, c_{-\vec{k}}\} = \underline{\underline{u^2_k + v^2_k = 1}}$$

$$\frac{u_{\vec{k}}}{u_{-\vec{k}}} = -\frac{v_{\vec{k}}}{v_{-\vec{k}}} \xRightarrow{\text{נדרוש}} \begin{cases} u_{-\vec{k}} = u_{\vec{k}} \\ v_{-\vec{k}} = -v_{\vec{k}} \end{cases}$$

3 התנאים הללו יבטיחו שהטרנספורמציה היא קנונית.

* ניתן לתאר ע"י טרנספ' סיבוב בזווית $\theta_{\vec{k}}$ אם נדרוש:

$$u_{\vec{k}} = \cos\theta_{\vec{k}}; \quad v_{\vec{k}} = \sin\theta_{\vec{k}}; \quad \theta_{-\vec{k}} = -\theta_{\vec{k}};$$

נקבל:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\vec{k}} \\ \alpha^\dagger_{-\vec{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\vec{k}} & -v_{\vec{k}} \\ v_{\vec{k}} & u_{\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\vec{k}} \\ c^\dagger_{-\vec{k}} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_{-\vec{k}} \\ \alpha^\dagger_{\vec{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\vec{k}} & v_{\vec{k}} \\ -v_{\vec{k}} & u_{\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-\vec{k}} \\ c^\dagger_{\vec{k}} \end{pmatrix}$$

והטרנספורמציה ההפוכה:

$$\begin{cases} c_{\vec{k}} = u_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} \alpha^\dagger_{-\vec{k}} \\ c^\dagger_{\vec{k}} = u_{k} \alpha^\dagger_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}} \end{cases} \qquad \begin{cases} c_{-\vec{k}} = u_{\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}} - v_{\vec{k}} \alpha^\dagger_{\vec{k}} \\ c^\dagger_{-\vec{k}} = u_{\vec{k}} \alpha^\dagger_{-\vec{k}} - v_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} \end{cases}$$

* $c^\dagger$ ו- c מייצרים ומחסלים אלקטרונים
$\alpha^\dagger$ ו- α מייצרים ומחסלים קוואזי-חלקיקים (בוגוליונים).

⟸ ניתן להגדיר שני מצבי ואקום:

$|0\rangle$ של אלקטרונים: $\qquad c_{\vec{k}}|0\rangle = c_{-\vec{k}}|0\rangle = 0$

$|G\rangle$ של קוואזי-חלקיקים: $\qquad \alpha_{\vec{k}}|G\rangle = \alpha_{-\vec{k}}|G\rangle = 0$

וקיים קשר פשוט ביניהם:

$$|G\rangle = \prod_{\vec{k}} \left(u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} c^\dagger_{\vec{k}} c^\dagger_{-\vec{k}} \right) |0\rangle$$

ו-

$$|0\rangle = \prod_{\vec{k}} \left(u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} \alpha^\dagger_{-\vec{k}} \alpha^\dagger_{\vec{k}} \right) |G\rangle$$

(רון ליפשיץ
18/1/06)

הצבה בהמילטוניאן BCS

* איבר המספר:

$$N_{\vec k} + N_{-\vec k} = c_{\vec k}^{\dagger} c_{\vec k} + c_{-\vec k}^{\dagger} c_{-\vec k} =$$

$$= u_{\vec k}^2 \alpha_{\vec k}^{\dagger} \alpha_{\vec k} + u_{\vec k} v_{\vec k} \left(\alpha_{\vec k}^{\dagger} \alpha_{-\vec k}^{\dagger} + \alpha_{-\vec k} \alpha_{\vec k}\right) + \underbrace{v_{\vec k}^2 \alpha_{-\vec k} \alpha_{-\vec k}^{\dagger}}$$

$$+ u_{\vec k}^2 \alpha_{-\vec k}^{\dagger} \alpha_{-\vec k} - u_{\vec k} v_{\vec k} \left(\underbrace{\alpha_{-\vec k}^{\dagger} \alpha_{\vec k}^{\dagger}}_{(-1)} + \underbrace{\alpha_{\vec k} \alpha_{-\vec k}}_{(-1)}\right) + \underbrace{v_{\vec k}^2 \alpha_{\vec k} \alpha_{\vec k}^{\dagger}}_{\text{סידור נורמלי}}$$

$$= 2 v_{\vec k}^2 + \left(u_{\vec k}^2 - v_{\vec k}^2\right)\left[\alpha_{\vec k}^{\dagger} \alpha_{\vec k} + \alpha_{-\vec k}^{\dagger} \alpha_{-\vec k}\right] + 2 u_{\vec k} v_{\vec k} \left[\alpha_{\vec k}^{\dagger} \alpha_{-\vec k}^{\dagger} + \alpha_{-\vec k} \alpha_{\vec k}\right]$$

* איבר האינטראקציה (בהזנחת איברים מסדר רביעי):

$$\sum_{\vec k, \vec q \in S} c_{\vec q}^{\dagger} c_{-\vec q}^{\dagger} c_{-\vec k} c_{\vec k} \simeq \sum_{\vec q, \vec k \in S} u_{\vec q} v_{\vec q} u_{\vec k} v_{\vec k} + \sum_{\vec k \in S} v_{\vec k}^4$$

$$+ \sum_{\vec k \in S} \left[\left(u_{\vec k}^2 - v_{\vec k}^2\right) v_{\vec k}^2 - 2 u_{\vec k} v_{\vec k} \sum_{\vec q \in S} u_{\vec q} v_{\vec q}\right]\left(\alpha_{\vec k}^{\dagger} \alpha_{\vec k} + \alpha_{-\vec k}^{\dagger} \alpha_{-\vec k}\right)$$

$$+ \sum_{\vec k \in S} \left[\left(u_{\vec k}^2 - v_{\vec k}^2\right) \sum_{\vec q \in S} u_{\vec q} v_{\vec q} + 2 u_{\vec k} v_{\vec k}^3\right]\left(\alpha_{\vec k}^{\dagger} \alpha_{-\vec k}^{\dagger} + \alpha_{-\vec k} \alpha_{\vec k}\right)$$

(בתוספת קבוע)

* נסמן -

$$\epsilon_{\vec k} \equiv \begin{cases} E(\vec k) & \vec k \notin S \\ E(\vec k) - G v_{\vec k}^2 & \vec k \in S \end{cases}$$

וגם -

$$\Delta \equiv G \sum_{\vec k \in S} u_{\vec k} v_{\vec k}$$

בהצגתה חלק מהאברים בהמילטוניאן אינו חילופי עם
אופרטור המספר הכולל N_{op} $\Longleftarrow$ מספר האלקטרונים N
לא נשמר!!

$\Longleftarrow$ נעבור לצביר גרנד-קנוני ונחפש מינימום לאופרטור

$$K = H - \mu N_{op}$$

כאשר את הפוטנציאל הכימי μ נמצא בסוף
מהדרישה ש- $\langle N_{op} \rangle = N$.

$$\begin{aligned}
K = H - \mu N_{op} = {} & 2\sum_{\vec{k}} (\epsilon_{\vec{k}} - \mu) V_{\vec{k}}^2 - \frac{\Delta^2}{G} + G \sum_{\vec{k} \in S} V_{\vec{k}}^4 && \Big\} \text{ קבוע} \\
& + \sum_{\vec{k}} (\epsilon_{\vec{k}} - \mu)(u_{\vec{k}}^2 - V_{\vec{k}}^2)\left[\alpha_{\vec{k}}^{\dagger}\alpha_{\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k}}\right] && \\
& + 2\Delta \sum_{\vec{k} \in S} u_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \left[\alpha_{\vec{k}}^{\dagger}\alpha_{\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k}}\right] && \Big\} \text{ אופרטור מספר} \\
& + 2\sum_{\vec{k}} (\epsilon_{\vec{k}} - \mu) u_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \left[\alpha_{\vec{k}}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k}}^{\dagger} + \alpha_{-\vec{k}}\alpha_{\vec{k}}\right] && \\
& - \Delta \sum_{\vec{k} \in S} (u_{\vec{k}}^2 - V_{\vec{k}}^2)\left[\alpha_{\vec{k}}^{\dagger}\alpha_{-\vec{k}}^{\dagger} + \alpha_{-\vec{k}}\alpha_{\vec{k}}\right] && \Big\} \text{ בעייתי}
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ נלכסן (בכתבה) ע"י בחירת $u_{\vec{k}}$ ו- $V_{\vec{k}}$ כך
שהאיברים הבעייתיים יתאפסו.