בחינה בפיסיקה קוונטית 1 – סמ' א' תשס"ה – מועד ב' – 11/7/2005

המורה: דר' רון ליפשיץ
המתרגל: עדו אדם

הנחיות

- משך הבחינה שלוש שעות.
- יש לענות על 3 שאלות בלבד מתוך 4.
- יש לכתוב בכתב יד ברור ולהסביר את כל שלבי החישוב.
- חומר עזר: מחברות פתוחות אך ללא צילומים מספרים.
- מותר (וכדאי) לצטט תוצאות שהתקבלו בכיתה או בשיעורי הבית ללא צורך בהוכחה מחודשת.

בהצלחה!!

1. מגדירים עבור מתנד הרמוני את הקואורדינטות חסרות המימדים

$$Q = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a) \quad \text{ו-} \quad P = \tfrac{i}{\sqrt{2}}(a^+ - a).$$

אופרטור הדחיסה $S(\xi)$ נתון ע"י

$$S(\xi) = \exp[\tfrac{1}{2}\xi^*(a^+)^2 - \tfrac{1}{2}\xi a^2].$$

א. מצאו את $\langle P\rangle, \langle Q\rangle$ ואת אי-הוודאות שלהם, אם המערכת במצב $S(\xi)|\alpha\rangle$, כאשר $|\alpha\rangle$ מצב קוהרנטי ו- ξ ממשי.

ב. כיצד $\langle Q\rangle$ ו- ΔQ משתנים בזמן? (בסעיף זה הניחו כי גם α ממשי).

2. ההמילטוניאן של מערכת בוזונית חד מימדית בת N אתרים נתון ע"י

$$H = \sum_n [J_1(a_{n+1}^+ a_n + a_n^+ a_{n+1}) + J_2(a_{n+1}^+ a_n^+ + a_n a_{n+1})],$$

כאשר $J_1 \geq J_2$, האתר ה- n ממוקם ב- $R_n = nd$, והאופרטור a_n (a_n^+) מחסל (מייצר) בוזון אחד באתר ה- n. לכסנו את ההמילטוניאן ומצאו את ספקטרום האנרגיה. מה קורה כאשר $J_1 = J_2$?

רמז: עברו למרחב התנע והשתמשו בטרנספורמציית בוגוליובוב $b_q = u_q a_q + v_q a_{-q}^+$ כאשר $u_q^2 - v_q^2 = 1$.

3. נתונה צפיפות הלגרנג'יאן

$$L = \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_1\partial_\nu\phi_1 - \tfrac{1}{2}\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi_1^2 + \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_2\partial_\nu\phi_2 - \tfrac{1}{2}\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi_2^2 + \lambda\phi_1\phi_2,$$

כאשר $\eta^{\mu\nu}$ היא המטריקה של מרחב מינקובסקי, ו- $\lambda < \dfrac{m^2c^2}{\hbar^2}$.

א. מצאו את משוואות התנועה של שני השדות.

ב. קוונטטו את השדות (דרשו את קיום יחסי החילוף הקנוניים).

ג. חשבו את אופרטור ההמילטוניאן של המערכת.

4. נתון אלקטרון חופשי בעל מסה m ותנע $\vec{p}$.

א. השתמשו במשוואת דירק והראו שבתמונת הייזנברג

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=0\,,\qquad \frac{d}{dt}\vec{\alpha}=\frac{2}{i\hbar}(c\vec{p}-H\vec{\alpha})\qquad \text{ו-}\ \frac{d\vec{r}}{dt}=c\vec{\alpha}\,.$$

ב. הראו כי

$$\vec{p}=\vec{p}(0)\,,$$

$$\vec{\alpha}=\frac{c\vec{p}}{H}+e^{2iHt/\hbar}\left(\vec{\alpha}(0)-\frac{c\vec{p}}{H}\right)$$

$$\text{ו-}\ \vec{r}=\vec{r}(0)+\frac{c^2\vec{p}}{H}t+\frac{\hbar c}{2iH}\left(e^{2iHt/\hbar}-1\right)\left(\vec{\alpha}(0)-\frac{c\vec{p}}{H}\right).$$

ג. האיבר האחרון בביטויים עבור $\vec{\alpha}$ ו- $\vec{r}$ נקרא *zitterbewegung*. הוכיחו, כי הוא אינו תורם לערכי התצפית $\langle\vec{\alpha}\rangle$ ו- $\langle\vec{r}\rangle$, אם חבילת הגלים כוללת פתרונות עם אנרגיה חיובית בלבד או עם אנרגיה שלילית בלבד.

<u>רמז</u>: הראו את הקשר $\Lambda_\pm\left(\frac{\vec{p}c}{H}-\vec{\alpha}\right)\Lambda_\pm=0$ כאשר $\Lambda_\pm=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{H}{E}\right)$, $E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$.

לשם כך נוח להראות קודם $\Lambda_\pm[\Lambda_\pm,O]\Lambda_\pm=0$ ולהשתמש ב- $O=\vec{\alpha}$.