

תרגיל בית מספר 10

1. הוכיחו את התכונות המתמטיות הבאות של מטריצות פאולי:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = -i\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \hat{I} \quad (\text{א})$$

$$i \in 1, 2, 3 \text{ עבור } \text{Tr} \{ \hat{\sigma}_i \} = 0, \text{Det} \{ \hat{\sigma}_i \} = -1 \quad (\text{ב})$$

$$[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x] = 2i\hat{\sigma}_y, [\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z] = 2i\hat{\sigma}_x, [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z \quad (\text{ג})$$

2. הראו כי עבור וקטור מטריצות פאולי $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ מתקיימות התכונות הבאות:

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\sigma} = a_1\hat{\sigma}_x + a_2\hat{\sigma}_y + a_3\hat{\sigma}_z \quad (\text{א})$$

$$(\mathbf{a} \cdot \hat{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \hat{\sigma}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \hat{I} + i\hat{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (\text{ב})$$

$$3. \text{ עבור המצב } |\chi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

(א) מהו התנאי על β כפונקציה של α (רמז: מה עלינו לדרוש?).

(ב) חשבו את ערכי התצפית של האופרטורים \hat{S}_z ו- $i\hat{S}_y\hat{S}_z$ אם $\alpha = \frac{1}{8}$ ו- β ממשי.

4. לאלקטרון יש מומנט מגנטי פנימי הנובע מהספין שלו: $\hat{\mu} \simeq -g_s\mu_B \frac{\hat{S}}{\hbar}$, כאשר $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ ו- $g_s \approx 2$. למומנט מגנטי בשדה מגנטי \mathbf{B} יש אנרגיה $\mu \cdot \mathbf{B}$.

(א) כתבו ביטוי כללי לרמת $2P_z$ של אטום המימן כספינור, בהעדר שדה מגנטי.

(ב) בעזרת אלקטרומגנט פשוט למדי, אפשר להפעיל שדה של כ-2Tesla. מה יהיה התיקון לאנרגיה של מצב היסוד בסדר ראשון בתורת ההפרעות כאשר אטום מימן במצב עם ערכים עצמיים ± 1 של $\hat{\sigma}_z$ נמצא בשדה מגנטי קבוע שכזה? (רמז: שימו לב כי התיקון תלוי בספין! איך כדאי לבחור את מערכת הקואורדינטות כך שהבעיה תהיה קלה לפתירה?)