תרגיל בית מספר 9

1. נשתמש בפונקציית הווריאציה $\Phi\left(x\right)=\frac{A}{\lambda^2+x^2}$ על מנת למצוא חסם עליון לאנרגיה של מצב־היסוד של אוסצילטור הרמוני חד־מימדי. לשימושכם, נתונים האינטגרלים הבאים:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\alpha^2+x^2\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\alpha^3},\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\alpha^2+x^2\right)^3}\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8\alpha^5},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(\alpha^2+x^2\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\alpha},\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(\alpha^2+x^2\right)^4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{16\alpha^5}.$$

(א) נרמלו את $\Phi\left(x\right)$ (מצאו את A כפונקציה של λ).

(ב) בצעו מינימיזציה של האנרגיה כפונקציה של λ ומצאו את האנרגיה המינימלית.

(ג) מה הוא הערך האמיתי ומהי הסטיה ממנו? אם היינו משתמשים בפונקציית הווריאציה $\Phi\left(x\right)=\frac{A}{\lambda^2+x^2}+\frac{B}{\left(\eta^2+x^2\right)^2}$, האם היינו מקבלים אנרגיה נמוכה או גבוהה יותר?

2.

(א) מצאו את האנרגיה הווריאציונית של אטום המימן עבור פונקציית הווריאציה $\Phi=Ae^{-\lambda r}$ (כמו בשאלה הקודמת, בצעו נירמול ואז מינימיזציה לפי λ). השוו את התוצאה לרמת היסוד האמיתית והסבירו את תשובתכם.

(ב) אם היינו משתמשים בפונקציית המבחן $\Phi=Ae^{-\lambda r^2}+Be^{-\eta r^3}+Ce^{-\mu r^4}$, האם היינו מקבלים אנרגיה גבוהה יותר, נמוכה יותר או שווה? מה עם הפונקציה $\Phi=Ae^{-\lambda r}+Be^{-\eta r^3}+Ce^{-\mu r^4}$?

3. חלקיק נמצא בקופסה כדורית ברדיוס R (כלומר, $V=0$ בתוך הכדור המוגדר על פי $r<R$ ואינסוף בשאר המרחב). השתמשו בפונקציית הניסיון $\Phi=A\left(R-r\right)$ עבור $r<R$ כדי להעריך את רמת היסוד, והשוו לאנרגיה האמיתית $\frac{h^2}{8mR^2}$. הסבירו את התוצאה שהתקבלה.

4. השתמשו בפונקציית הניסיון $\Phi=A-\lambda\left(x-\frac{L}{2}\right)^2$ (התאימו אותה לתנאי השפה!) כדי למצוא קירוב למצב היסוד של חלקיק בקופסא חד־מימדית באורך L. השוו את התוצאה לאנרגיה האמיתית.