תרגיל בית מספר 8

1. נתון חלקיק בקופסא מעוותת הנמצאת בין $x=0$ ל־$x=L$. בקופסא יש פוטנציאל דוחה $V=U>0$ בתחום $\frac{L}{2}<x<\frac{3L}{4}$, ופוטנציאל $V=0$ בשאר הקופסא:

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<0,\\ 0 & 0<x<\frac{L}{2},\\ U & \frac{L}{2}<x<\frac{3L}{4},\\ 0 & \frac{3L}{4}<x<L,\\ \infty & x>L.\end{cases}$$

נרצה להתייחס למערכת כחלקיק רגיל בקופסא בסדר האפס, ולהשתמש בתורת ההפרעות כדי להעריך את השפעת העיוות.

(א) כתבו בפירוש את $\hat{H}_0$, את פוטנציאל ההפרעה $\hat{V}$ (האם הוא שווה ל־$V(x)$ שהוגדר בתחילת השאלה?) ואת פונקציות הגל והאנרגיות מסדר אפס.

(ב) מהו התיקון מסדר 1 לאנרגיה? האם הוא חיובי או שלילי?

(ג) כתבו ביטוי לתיקון מסדר 1 לפונקציית הגל (השאירו את התשובה בצורת אינטגרל).

(ד) בונוס: בעזרת מחשב, שרטטו את פונקציית הגל של מצב היסוד עבור $U=0$ ועבור $U=\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$.

2. נשתמש בתורת ההפרעות כדי להעריך את התיקון הראשון לאנרגיית מצב היסוד של אטום המימן אם נניח כי המטען הגרעיני אינו נקודתי, אלא מתפלג באופן אחיד בתוך כדור ברדיוס $r_0=10^{-15}\mathrm{m}$.

(א) תוצאה מוכרת מאלקטרוסטטיקה קלאסית היא כי הפוטנציאל הפועל על אלקטרון בתוך התפלגות מטען בעלת סימטריה כדורית הינו $-\frac{eQ(r)}{r}$, כאשר Q הוא המטען הכולל עד רדיוס r (המטען שמחוץ לרדיוס r אינו משפיע על האלקטרון). כתבו את ההמילטוניאן כ־$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{V}(r)$ כך שניתן יהיה להשתמש בפתרונות המוכרים לנו עבור אטום המימן בתור הסדר האפס. מה יהיה פוטנציאל ההפרעה $\hat{V}$ בתוך הגרעין ומחוץ לו?

(ב) כתבו ביטוי מפורש ל־$Q(r)$ והשמשו בו כדי להעריך את התיקון הראשון לאנרגיה. מהו סימנו וגודלו ב־eV? (כדי להעריך את האינטגרלים, ניתן להניח כי היות ו־$r_0\ll a_0$, $e^{-\frac{r_0}{a_0}}\simeq 1$)

3. נתון אטום מימן בשדה חשמלי E בכיוון $\hat{\mathbf{z}}$ ($V=eEz$). נשתמש בתורת ההפרעות כדי להעריך את הקיטוביות (polarizability) של אטום המימן ־ כלומר, את השינוי באנרגיה שלו כאשר מופעל עליו שדה חשמלי.

(א) הראו כי $\langle Y_l^m|Y_1^0|Y_0^0\rangle=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\langle Y_l^m|Y_1^0\rangle=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\delta_{l1}\delta_{m0}$.

(ב) הראו כי התיקון הראשון לאנרגיה של מצב היסוד ψ_{100} מתאפס.

(ג) מצאו את התיקון מהסדר השני לאנרגיה של ψ_{100} במונחי האינטגרלים $I_n\equiv\int_0^\infty r^3\mathrm{d}r\,R_{n1}(r)\,e^{-r/a_0}$. הראו כי תורמים לו אך ורק מצבים עם $m=0$ ו־$l=1$.

4. עבור חלקיק בטבעת עם הפרעה קבועה V בתחום $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, חשבו:

(א) את שני התיקונים הראשונים לאנרגיה של הרמה ה־n. מדוע עלינו להגיע עד לסדר השני כאשר אנחנו מעוניינים במודל זה לצורך ספקטרוסקופי?

(ב) את התיקון הראשון לפונקציית הגל.