

תרגיל בית מספר 6

1.

(א) עבור פונקציית גל מהצורה $\psi_{nlm}(r, \vartheta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\vartheta, \phi)$, הראו כי ניתן לכתוב

$$\langle nlm | n'l'm' \rangle = \langle R_{nl} | R_{n'l'} \rangle \langle Y_{lm} | Y_{l'm'} \rangle,$$

כאשר

$$\begin{aligned} \langle R_{nl} | R_{n'l'} \rangle &= \int_0^\infty r^2 R_{nl}^*(r) R_{n'l'}(r) dr, \\ \langle Y_{lm} | Y_{l'm'} \rangle &= \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^*(\vartheta, \phi) Y_{l'm'}(\vartheta, \phi). \end{aligned}$$

(ב) הראו כי הפונקציות Y_1^0 ו- Y_1^1 אורתונורמליות, כלומר $\langle Y_1^1 | Y_1^1 \rangle = \langle Y_1^0 | Y_1^0 \rangle = 1$ ו- $\langle Y_1^1 | Y_1^0 \rangle = 0$.

(ג) ההרמוניות הכדוריות מקיימות קשרי אורתונורמליות $\langle Y_l^m | Y_{l'}^{m'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ באופן כללי. מהו התנאי המינימלי שצריכות לקיים הפונקציות הרדיאליות $R_{nl}(r)$ כדי שפונקציות הגל המלאות $|nlm\rangle$ יהיו אורתונורמליות?

2.

(א) הוכיחו כי ההרמוניות הכדוריות $Y_l^m(\vartheta, \phi)$ עצמיות לאופרטורים \hat{L}_z ו- $(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2)$ (שימו לב כי אין צורך להפעיל את האופרטורים באופן דיפרנציאלי! עשו שימוש בערכים עצמיים מוכרים). מהם הערכים העצמיים המתאימים?

(ב) נגדיר את האופרטורים $\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y$ ו- $\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y$. בעזרת יחסי החילוף שנגזרו בכיתה, מצאו את יחס החילוף בין שני האופרטורים האלו לבין \hat{L}_z .

(ג) בעזרת יחסי החילוף מהסעיף הקודם, הראו כי $\hat{L}_+ Y_l^m$ הינה פונקציה עצמית של \hat{L}_z עם ערך עצמי $\hbar(m+1)$ וכי $\hat{L}_- Y_l^m$ הינה פונקציה עצמית של \hat{L}_z עם ערך עצמי $\hbar(m-1)$.

3.

(א) הוכיחו כי $P_l^m = 0$ עבור $|m| > l$. קשרו את העובדה הזו לתנע זוויתי כדי לתת לה הסבר פיזיקלי.

(ב) מהן הזוויות האפשריות בין ווקטור התנע הזוויתי \mathbf{L} לבין ציר z עבור חלקיק המצוי במצב עצמי של \hat{L}^2 עם ערך עצמי $6\hbar^2$? העזרו במכפלה הסקלרית בין \mathbf{L} ל- \mathbf{L}_z .

4. שרטטו את החלק הממשי של הפונקציות Y_3^0, Y_3^1 ו- Y_3^3 על פני חצי הכדור המוגדר על ידי $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$. סמנו אפסים בקווים נודליים, ובכל שטח כתבו את הסימן של הפונקציה בתוכו, בדומה לשרטוט מהתרגול. רשמו בפירוט את ערכי הזוויות הנודליות.