תרגיל בית מספר 5

1. נתונה פונקציית הגל המנורמלת $\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\psi_n(x)$ של אוסצילטור הרמוני חד־מימדי, כאשר ה־ψ_i הינן הפונקציות העצמיות של ההמילטוניאן.

   (א) מהי ההסתברות למדוד אנרגיה גדולה מ־$2\hbar\omega$? מהם התנאים לכך שההסתברות הזו תתאפס?

   (ב) אם נתון כי התנאים שנמצאו בסעיף הקודם מתקיימים וכי $\left\langle \hat{H}\right\rangle=\hbar\omega$, מצאו את ערכם המוחלט של כל המקדמים u_i.

2. הוכיחו כי פונקציית הגל במצב היסוד של אוסצילטור הרמוני ופונקציית הגל המעוררת הראשונה מקיימות יחסי אורתונורמליות: כלומר, כל אחת מהן מנורמלת, והן אורתוגונליות אחת לשניה.

3. פולינומי הרמיט מקיימים את התכונה $\xi H_\nu(\xi)=\nu H_{\nu-1}(\xi)+\frac{1}{2}H_{\nu+1}(\xi)$.

   (א) השתמשו בתכונה זו כדי להראות כי עבור מצבים עצמיים של המילטוניאן האוסצילטור ההרמוני,

$$\hat{x}\psi_\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\nu\frac{N_\nu}{N_{\nu-1}}\psi_{\nu-1}+\frac{1}{2}\frac{N_\nu}{N_{\nu+1}}\psi_{\nu+1}\right).$$

   (ב) הראו כי

$$\frac{N_\nu}{N_{\nu-1}}=\sqrt{\frac{1}{2\nu}},\ \frac{N_\nu}{N_{\nu+1}}=\sqrt{2(\nu+1)}.$$

   (ג) בעזרת הסעיפים הקודמים ויחסי האורתונורמליות $\langle\psi_m|\psi_n\rangle=\delta_{mn}$, מצאו את $\langle\psi_m|\hat{x}|\psi_n\rangle=\int\psi_m(x)\hat{x}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x$ בלי לבצע את האינטגרל באופן מפורש. מהו ערך התוחלת של המיקום עבור מצב עצמי?

4. חשבו את האנרגיה הקינטית $\left\langle\frac{\hat{p}^2}{2m}\right\rangle$ של המצב המעורר הראשון של אוסצילטור הרמוני.

5. המילטוניאן של אוסצילטור הרמוני דו־מימדי נתון על ידי $\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right)$. בדומה לחלקיק בקופסא רב־מימדית, ניתן לבצע במקרה זה הפרדת משתנים.

   (א) רשמו את ההמילטוניאן בצורה $\hat{H}=\hat{H}_x(x)+\hat{H}_y(y)$. מהן הפונקציות העצמיות?

   (ב) מהם המספרים הקוונטיים ורמות האנרגיה המתאימות להם?

   (ג) רשמו את שתי האנרגיות הנמוכות ביותר ואת הניוון שלהן.