

תרגיל בית מספר 4

1. נתונה מערכת בעלת שלוש רמות אנרגיה, $E_1 < E_2 \ll E_3$. כל רמה יכולה להכיל שני חלקיקים. מאכלסים את המערכת בשלושה חלקיקים שונים (שניתן להבדיל ביניהם).

(א) מהן האנרגיות הכוללות האפשריות של המערכת, בסדר עולה? מהו הניוון של כל אנרגיה כזו?

2. נתונה קופסא תלת-מימדית שאינה קוביה ($L_x \neq L_y \neq L_z$).

(א) האם יתכנו מצבים מנוונים עבור חלקיק בקופסא כזו? הוכיחו את תשובתכם בעזרת דוגמא אם כן, ובאופן כללי אם לא.

(ב) האם יתכן כי הפונקציה $\psi(x, y, z) = A \sin \frac{5\pi x}{L_x}$ (כאשר A קבוע) הינה פונקציית הגל של חלקיק בקופסא תלת-מימדית? הסבירו.

3. עבור קופסא דו-מימדית סימטרית ובה $L_x = L_y = L$, המירו את פונקציות הגל המנורמלות הבאות לנוצציית דיראק: כלומר, כתבו אותן בצורה $|\psi\rangle = \sum_{nm} u_{nm} |nm\rangle$ כאשר $|nm\rangle$ מתאים לפונקציית הגל $\psi_{nm}(x, y) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)$ (מצאו את המקדמים u_{nm}).

$$\psi(x, y) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{5\pi y}{L}\right) \quad (\text{א})$$

$$\psi(x, y) = \frac{2}{L} \left[\frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{3\pi y}{L}\right) + \frac{\sqrt{15}}{4} \sin\left(\frac{7\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \right] \quad (\text{ב})$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{2L[\cos(\pi j) - 1]}{\pi j(j^2 - 4)} \quad \psi(x, y) = \frac{4}{\sqrt{3}L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (\text{ג})$$

4. נבצע טיפול מקורב לאלקטרוני Π במולקולות טבעתיות. הניחו לצורך הבעיה כי אורך כל קשר פחמן-פחמן הוא 1.6 \AA .

(א) השתמשו במודל חלקיק בטבעת כדי למצוא את 4 רמות האנרגיה הראשונות עבור בנזן.

(ב) השתמשו במודל חלקיק בטבעת כדי למצוא את 4 רמות האנרגיה הראשונות עבור מולקולת אוקטן טבעתית ומצומדת. מהם ההבדלים?

(ג) מהו הניוון של כל רמה? הסבירו באמצעות אנלוגיה קלאסית.

(ד) העריכו עבור שתי המולקולות את אורך הגל הגדול ביותר שיתכן במעבר אופטי.

5. שאלת בונוס: נתון אלקטרון בעל מסה אפקטיבית μ הלכוד בפולימר סלילי, המוגדר על פי $z = a\vartheta$, $r = R$. הסליל מתחיל ב- $z = 0$ ונמשך עד $z = L$, כך שהוא כולל סך של $N = \frac{L}{2\pi a}$ סיבובים.

(א) הראו כי הבעיה מצטמצמת למימד יחיד, וכי ההמילטוניאן הוא אחד מאלו שנלמדנו בכיתה. מהן הפונקציות העצמיות שלו (אין צורך לנרמל אותן) והאנרגיות המתאימות להן?

(ב) אילו תנאי שפה צריכה פונקציית הגל לקיים? הראו כי מתקבלת קוונטיזציה ומצאו את הערכים המותרים של המספר הקוונטי.