תרגיל בית מספר 3

1. בניסוי ספקטרוסקופי נמצא כי במעבר בין רמת האנרגיה השמינית לשישית של אלקטרון הנע בחופשיות ברמה הגבוהה ביותר של מולקולת פולימר מוליך נפלט פוטון באורך גל של 650nm. הניחו כי בתנאי הניסוי הפולימר נוקשה (מדוע יש צורך בהנחה זו?) והשתמשו במודל הקופסא החד־מימדית כדי להעריך את אורכו.

2. עבור חלקיק במצב $n = 2$ של קופסא חד־מימדית, חשבו:

   (א) מה היא ההסתברות למצוא את החלקיק בשליש השמאלי של הקופסא? השוו אותה להסתברות הקלאסית.

   (ב) באילו נקודות מקבלת צפיפות ההסתברות את נקודות המינימום והמקסימום שלה? השתמשו בכך כדי להסביר את תוצאת הסעיף הקודם.

3. מהן פונקציות הגל והאנרגיות של חלקיק בקופסא חד־מימדית הנמצאת בתחום $-L < x < L$?

4. נתונות שתי פונקציות גל לא מנורמלות בנוטציית Dirac, $|\alpha\rangle = 2\,|0\rangle - 3\,|1\rangle$ ו־$|\beta\rangle = |0\rangle + i\,|1\rangle$. פונקציות הבסיס $|0\rangle$ ו־$|1\rangle$ הן אורתונורמליות.

   (א) נרמלו את פונקציות הגל.

   (ב) כתבו בפירוש את $\langle\alpha|$, $\langle\beta|$ לאחר הנירמול - שימו לב להבדל בין bra ל־ket!

   (ג) מצאו את $\langle\beta\,|\alpha\rangle$ ואת $\langle\alpha|\,\beta\rangle$ (עבור פונקציות הגל המנורמלות).

5. נתונים טורי הטיילור הבאים:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \text{ for all } x,\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \text{ for all } x,\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \text{ for all } x.
\end{aligned}$$

   השתמשו בהם כדי להוכיח את זהות אוילר, $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

   (א) פתחו את e^{ix} לטור טיילור, והפרידו אותו לסכום של שני טורים המכילים חזקות זוגיות ואי־זוגיות בלבד של i. מה הקשר בין טורים אלו לבין החלק הממשי והמדומה של הביטוי?

   (ב) הראו כי החלקים שהתקבלו מתאימים לטורים של סינוס וקוסינוס, והשלימו את הוכחת הזהות.