

תרגיל בית מספר 2

1. עבור המערכת הבאות, העריכו (באופן כמותי) אם יש צורך במכניקת הקוונטים כדי לתאר את הפיזיקה שלהן:

(א) מיקרו-מטאורים במשקל של כמיליגרם אחד, הפוגעים באטמוספירה העליונה של כדור הארץ במהירויות היכולות להגיע לכ-60 קילומטר בשנייה.

(ב) וירוס כדורי בקוטר 150 ננומטר ובעל מסה של 15 אטוגרם ($1 \text{ Attogram} = 10^{-18} \text{ gram}$) הנורה במהירות של 100 קמ"ש מנחירו של חולה שפעת חזירים מתעטש.

(ג) ננו-צביר של 5 מולקולות מים בתוך ענן בטמפרטורה -80°C , ולו אנרגיה קינטית תרמית של $\frac{3}{2} k_B T$.

(ד) פרוטון במאיץ חלקיקים, בעל אנרגיה כוללת של 1 GeV (עבור חלקיקים כה אנרגטיים יש להשתמש בקשר היחסותי בין תנע לאנרגיה, $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$, כאשר m היא מסת הפרוטון ו- c מהירות האור).

2. הוכיחו כי עבור כל שלושה אופרטורים \hat{A} , \hat{B} ו- \hat{C} מתקיימות הזהויות הבאות:

$$(א) \quad [\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$$

$$(ב) \quad [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$$

$$(ג) \quad [\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$$

$$(ד) \quad \text{אם ורק אם } \hat{A} \text{ ו-} \hat{B} \text{ חלופיים, אזי } (\hat{A} + \hat{B})(\hat{A} - \hat{B}) = \hat{A}^2 - \hat{B}^2$$

3. נתון האופרטור $\hat{D} = \frac{i}{x^2} \frac{\partial}{\partial x}$.

(א) מהן הפונקציות העצמיות והערכים העצמיים של \hat{D} ?

$$(ב) \quad \text{הוכיחו כי } (\hat{D} + \hat{x})(\hat{D} - \hat{x}) = \hat{D}^2 - \hat{x}^2 - \frac{i}{x^2}$$

(ג) מהו יחס החילוף $[\hat{D}, \hat{x}]$? האם \hat{D} יכול לייצג משתנה פיזיקלי, בהנחה שהאיברים הקשורים לתנאי השפה מתאפסים?

4. נתונה פונקציית הגל הגאוסיאנית המנורמלת $\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$.

(א) חשבו את ערכי התצפית של $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{x}^2 \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$ ו- $\langle \hat{p}^2 \rangle$.

(ב) בעזרת תוצאות הסעיף הקודם, חשבו את אי הוודאות במקום Δx ובתנע Δp (אי הוודאות היא סטיית התקן, כלומר

$$\Delta a = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$$

(ג) הראו כי עיקרון אי-הוודאות $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle| = \frac{\hbar}{2}$ מתקיים, והסבירו את המשפט "חבילת הגלים הגאוסית עונה לתנאי המינימיזציה של אי-הוודאות".

5. ניתן לפרוש כל פונקציית גל $\psi(x)$ בעזרת בסיס הפונקציות העצמיות של אופרטור התנע, $\varphi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{p}{\hbar}x}$.

(א) הראו כי $\varphi_p(x)$ היא פונקציה עצמית של אופרטור התנע, עם הערך העצמי p .

(ב) מצאו את המקדמים u_p המתקבלים כשפורשים את פונקציית הגל הגאוסית המנורמלת $\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$ בעזרת פונקציות עצמיות של אופרטור התנע.

6. עבור הפונקציות הבאות, ענו אם הן יכולות להיות פונקציות גל בתחום $-\infty < x < \infty$, ואם הן יכולות להיות פונקציות גל בתחום $L < x < \infty$, כאשר L הוא ערך חיובי וגדול ממש מאפס (כלומר, לא שווה לאפס):

$$(א) \quad \psi(x) = Ae^{-\alpha x^2} \quad (\alpha > 0)$$

$$(ב) \quad \psi(x) = Ae^{-\alpha x} \quad (\alpha > 0)$$

$$(ג) \quad \psi(x) = \frac{A}{x}$$

$$(ד) \quad \psi(x) = \frac{A}{\sqrt{|x|}}$$