תרגול מספר 1

חזרה מתמטית

תוכן עניינים

חלק I
משוואות דיפרנציאליות רגילות

1 הקדמה והגדרות

משוואה דיפרנציאלית רגילה היא משוואה שהאיברים המופיעים בה הינם פונקציה של משתנה אחד $y\left(x\right)$ והנגזרות שלה $y^{(n)}\left(x\right)\equiv\frac{\mathrm{d}^n y(x)}{\mathrm{d}x^n}$. באופן כללי, ניתן לכתוב את המשוואה בצורה

$$f\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0.$$

הסדר הגבוה ביותר של נגזרת המופיע במשוואה נקרא סדר המשוואה. בפתרון הכללי של משוואה מסדר n יהיו n קבועים בלתי־תלויים. למשל, המשוואה הפשוטה ביותר מסדר שני היא

$$y^{(2)}=\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=0\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{dx}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=c_2\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int c_2\mathrm{d}x\Rightarrow y=c_2x+c_1.$$

את הקבועים ניתן למצוא מתנאי התחלה או תנאי שפה.

מקרה פרטי פשוט יותר של משוואות דיפרנציאליות הוא משוואות ליניאריות. אלו משוואות שניתן לכתוב אותן באופן הבא:

$$A_n\left(x\right)y^{(n)}+A_{n-1}\left(x\right)y^{(n-1)}+...+A_1\left(x\right)y'+A_0y=g\left(x\right).$$

אם $g\left(x\right)=0$, אזי המשוואה היא גם הומוגנית.

בשיעור נעבור על שלוש שיטות לפיתרון משוואות דיפרנציאליות. חומר עזר מומלץ ניתן למצוא באתר www.sosmath.com.

2 הפרדת משתנים

משוואות רבות מסדר ראשון (לא בהכרח ליניאריות או הומוגניות) ניתנות לכתיבה כ־$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = F\left(x,y\right)$. אם מתקיים גם $F\left(x,y\right) = f\left(x\right) g\left(y\right)$, אזי

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(x\right) g\left(y\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{g\left(y\right)} = f\left(x\right) \mathrm{d}x.$$

כעת, מופיע אך ורק משתנה אחד בכל אגף, וניתן לבצע אינטגרציה על שני צידי המשוואה.

לדוגמא, נפתור את המשוואה הבאה:

נתון:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy + y.$$

פיתרון:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy+y = \left(x+1\right) y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{y}} = \left(x+1\right) \mathrm{d}x \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}x^2+x+C \Rightarrow \boxed{y = e^{\frac{1}{2}x^2+x+C} = Ae^{\frac{1}{2}x(x+1)}},$$

כאשר החלפנו את הגדרת הקבוע: $A = e^C$.

דוגמא נוספת:

נתון:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{1+x^3}y.$$

פיתרון:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{1+x^3}y \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}z}{1+z} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{3}\ln\left(1+z\right) + C = \frac{1}{3}\ln\left(1+x^3\right) + C.$$

נעזרנו בהחלפת המשתנים $z = x^3 \Rightarrow \mathrm{d}z = 3x^2\mathrm{d}x$. נותר רק לפעול עם אקספוננט על שני צידי המשוואה:

$$y = e^{\frac{1}{3}\ln\left(1+x^3\right)+C} = e^{\ln\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{3}}} e^C \Rightarrow \boxed{y = A\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{3}},\ A = e^C}.$$

שימו לב כי השיטה ספציפית למשוואות מסדר ראשון, ולכן תמיד יופיע קבוע אינטגרציה אחד בלבד.

3 גורם אינטגרציה

השיטה הבאה עובדת עבור כל משוואה ליניארית מסדר ראשון, גם אם אינה הומוגנית. משוואה כזו ניתנת תמיד לכתיבה בצורה:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P\left(x\right) y = Q\left(x\right).$$

הטענה היא כי ניתן למצוא פונקציה $\rho\left(x\right)$ כך שאם נכפיל את שני צידי המשוואה בה, היא תקבל את הצורה הבאה:

$$\frac{\mathrm{d}\left(\rho y\right)}{\mathrm{d}x} = \rho Q\left(x\right).$$

זו משוואה הניתנת מידית לטיפול באמצעות הפרדת משתנים, במשתנים החדשים x ו־ρy (במקום x ו־y):

$$\mathrm{d}\left(\rho y\right) = \rho Q\left(x\right) \mathrm{d}x \Rightarrow \rho y = \int \rho Q\left(x\right) \mathrm{d}x + C \Rightarrow \boxed{y\left(x\right) = \frac{1}{\rho\left(x\right)}\left(\int \rho\left(x\right) Q\left(x\right) \mathrm{d}x + C\right)}.$$

כדי להוכיח זאת, נמצא את גורם האינטגרציה כך ששתי המשוואות ישארו זהות. נכתוב בפירוש את המשוואה המקורית מוכפלת ב־ρ ליד המשוואה הרצויה, לאחר ביצוע מפורש של הגזירה:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P\left(x\right)y=Q\left(x\right)\quad\Rightarrow\quad\rho y'+\rho Py=\rho Q\left(x\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}\left(\rho y\right)}{\mathrm{d}x}=\rho Q\left(x\right)\quad\Rightarrow\quad\rho y'+\rho' y=\rho Q\left(x\right).$$

כלומר, כדי לקיים זהות בין המשוואות, עלינו לדרוש שיוויון בין האיברים השניים בהן:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}y=\rho Py\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=P\Rightarrow\ln\rho=\int P\mathrm{d}x\Rightarrow\boxed{\rho=e^{\int P(x)\mathrm{d}x}}.$$

שימו לב כי הזנחנו הפעם את קבוע האינטגרציה, כי הוא מתבטא בהכפלת שני צידי המשוואה בקבוע ולכן אין לו משמעות.

נדגים את השימוש בשיטה:

נתון:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=e^{-2x}.$$

פיתרון: $P\left(x\right)=2$ ו־$Q\left(x\right)=e^{-2x}$. אם כך, נותר לנו רק להציב במשוואות שפיתחנו לפני רגע:

$$\begin{aligned}\rho\left(x\right) &= e^{\int P(x)\mathrm{d}x}=e^{\int 2\mathrm{d}x}=e^{2x}\\ &\Downarrow\\ y\left(x\right) &= \frac{1}{\rho\left(x\right)}\left(\int\rho\left(x\right)Q\left(x\right)\mathrm{d}x+C\right)=e^{-2x}\left(\int e^{2x}e^{-2x}\mathrm{d}x+C\right)=e^{-2x}\left(x+C\right).\end{aligned}$$

4 פולינום אופייני

השיטה האחרונה שנלמד עובדת על משוואות ליניאריות והומוגניות בכל סדר, כל עוד יש להן מקדמים קבועים. במקום לפתח את המקרה הכללי, כאן קל יותר להציג דוגמא: למשל,

$$y''+py'+qy=0.$$

במקרה כזה, "ננחש" פיתרון מהצורה $y=Ae^{sx}$, וננסה להציב אותו ולפתור עבור s:

$$y''+py'+qy=s^2Ae^{sx}+spAe^{sx}+qAe^{sx}=0\Rightarrow\boxed{s^2+sp+q=0}.$$

משוואה זו נקראת הפולינום האופייני של המשוואה, וסדר הפולינום הוא כסדר המשוואה. אם קיימים פתרונות שונים כסדר המשוואה (שניים במקרה זה, $s_1\neq s_2$), אזי הפיתרון הכללי הוא

$$y=A_1e^{s_1x}+A_2e^{s_2x}.$$

אם יש ניוון ($s=s_1=s_2$), אזי מצאנו רק פיתרון אחד. במקרה זה, אפשר להראות כי הפיתרון הכללי הוא

$$y=A_1e^{sx}+A_2xe^{sx}.$$

נתון:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

פיתרון: אם נציב $y = e^{sx}$ כמו קודם, נקבל

$$y'' + y' - 2y = 0 \Rightarrow s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2) = 0 \Rightarrow s = 1,\ -2.$$

מכאן,

$$\boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}}.$$

5 תנאי התחלה ושפה

בעיית תנאי התחלה היא בעיה בה בנוסף למשוואה הדיפרנציאלית נתונים תנאים על הפונקציה ונגזרותיה. מספר התנאים צריך להיות כמספר הקבועים. בעיית תנאי שפה היא דומה, אך התנאים לא ניתנים כולם באותה נקודה.

למשל, עבור הפיתרון של התרגיל הקודם, בעיית תנאי התחלה יכולה להיות

נתון:

$$y(0) = 0;\ y'(0) = 2.$$

פיתרון:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0, \\ y'(0) &= c_1 - 2c_2 = 2. \\ &\Downarrow \\ c_1 &= -c_2 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

לעומת זאת, דוגמא לבעיית תנאי שפה היא:

נתון:

$$y(0) = 1;\ \lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

פיתרון:

$$\begin{aligned} y(\infty) &= c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0. \\ y(0) &= c_1 \Rightarrow c_1 = 1. \end{aligned}$$

חלק II
הסתברות על רגל אחת

6 משתנים בדידים

במהלך הקורס נשתמש לעיתים קרובות במושגים הסתברותיים, ולכן נבצע כעת חזרה קצרצרה על כמה מהיסודות.

תורת ההסתברות עוסקת באירועים שיש להם סיכוי לקרות וסיכוי לא לקרות. אם לניסוי יש סדרה של תוצאות אפשריות $\{x_i\} = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$, אזי אם נחזור על הניסוי מספר גדול מאוד של פעמים, היחס בין מספר הפעמים שנקבל את התוצאה x_i לבין מספר החזרות הכולל הוא ההסתברות לקבל את x_i, או $P(x_i)$. כמובן, אנו מקבלים תמיד אחת מבין התוצאות x_i ולכן

$$\boxed{\sum_i P(x_i) = 1}.$$

נבחן דוגמא פשוטה:

בשקית סוכריות יש מספר שווה של סוכריות אדומות, כחולות וצהובות. מהי ההסתברות להוציא מהשקית באופן אקראי סוכריה צהובה?
פיתרון: כיוון שיש מספר שווה של סוכריות מכל סוג, ההסתברויות לשלוף אותן שוות: $P(Yellow) = P(Blue) = P(Red) \equiv P$. כיוון שההסתברויות מסתכמות לאחד,

$$1 = P(Yellow) + P(Blue) + P(Red) = 3P \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{3}}.$$

עד עכשיו, דיברנו אך ורק על מקרים שבהם האירועים זרים, כלומר לא יתכן כי שניים מהם יתרחשו בו־זמנית ־ למשל, הסוכריה לא יכולה להיות גם צהובה וגם כחולה בעת ובעונה אחת. הסתברויות שאינן זרות אינן מסתכמות לאחד.

בשקית מהשאלה הקודמת, הסוכריות הצהובות אינן טעימות והסוכריות הכחולות אינן עגולות. מהי ההסתברות לשלוף: סוכריה טעימה, סוכריה עגולה, וסוכריה טעימה ועגולה? כתבו במונחים של שלושת ההסתברויות הקודמות את ההסתברות לשלוף סוכריה טעימה או סוכריה עגולה.
פיתרון:

$$\begin{aligned}
P(round) &= P(Yellow) + P(Red) = \frac{2}{3}, \\
P(yummy) &= P(Blue) + P(Red) = \frac{2}{3}, \\
P(round\,and\,yummy) &= P(red) = \frac{1}{3}. \\
P(round\,or\,yummy) &= P(round) + P(yummy) - P(round\,and\,yummy) = 1.
\end{aligned}$$

בשורה האחרונה, המאורע "טעים ועגול" מוכל גם בתוך "טעים" וגם בתוך "עגול", ולכן ספרנו אותו פעמיים. כדי לתקן זאת יש לחסר אותו מהסכום.

7 משתנים רציפים

לעיתים קרובות המאורעות שאנו מעוניינים לדון בהם קיימים לא על סקלה בדידה, אלא על סקלה רציפה ־ למשל, בניסוי בו התוצאה היא קביעת מיקומו של חלקיק. במקרה זה, אנחנו מגדירים צפיפות הסתברות כך ש־$P(x)\,\mathrm{d}x$ היא ההסתברות לקבל אירוע בטווח $(x, x+dx)$. במקום סכום על ההסתברויות, יש לבצע אינטגרל על כל הערכים האפשריים של x:

$$\boxed{\int P(x)\,\mathrm{d}x = 1}.$$

guy.cohen@gmail.com גיא כהן · ביה"ס לכימיה · אוניברסיטת תל־אביב אורנשטיין 206 · 03-6407229

דוגמא: נתון כי ההסתברות שזבוב נע במהירות v פרופורציונלית למהירות, עד למהירות המקסימלית שלו v_{max}. מצאו את התפלגות המהירויות.
פיתרון:

$$\begin{aligned} P\left(v<v_{max}\right) &= Av, \\ \int_0^{v_{max}} P\left(v\right)\mathrm{d}v &= A\int_0^{v_{max}} v\mathrm{d}v = A\frac{v_{max}^2}{2} = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{v_{max}^2}, \boxed{P\left(v\right) = \frac{2v}{v_{max}^2}}. \end{aligned}$$

8 תוחלת וסטיית תקן

כאשר מקשרים ערך מספרי $A\left(x_i\right)$ למאורע x_i, ניתן לחשב את הערך הממוצע שאנו מצפים לו במספר דגימות רב (ערך התוחלת) ואת מידת פיזור התוצאות מסביב לערך לזה (סטיית התקן). באופן כללי וללא הסברים והוכחות,

$$\boxed{\langle A\rangle = \sum_i A\left(x_i\right)P\left(x_i\right)}$$

עבור משתנים בדידים, ו־

$$\boxed{\langle A\rangle = \int A\left(x\right)P\left(x\right)\mathrm{d}x}$$

עבור משתנים רציפים. את סטיית התקן נוכל לקבל מהנוסחא

$$\boxed{\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}}.$$

דוגמא: מצאו את המהירות הממוצעת של הזבוב מהדוגמא הקודמת.
פיתרון:

$$\langle v\rangle = \int_0^{v_{max}} v\cdot P\left(v\right)\mathrm{d}v = \int_0^{v_{max}} v\cdot\frac{2v}{v_{max}^2}\mathrm{d}v = \frac{2}{v_{max}^2}\overbrace{\int_0^{v_{max}} v^2\mathrm{d}v}^{=\frac{v_{max}^3}{3}} = \boxed{\frac{2}{3}v_{max}}.$$