מבחן במבוא לקומבינטוריקה ולתורת הגרפים

סמסטר ב התשע"ו, מועד א'

תאריך: 17.6.2016

מרצה: פרופ' נוגה אלון

מתרגלת: גל קרוננברג

- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבון.
- במבחן חמש שאלות, יש לענות על כולן.
- תשובות נכונות ומלאות על ארבע מהשאלות יזכו אותך ב־90 נקודות; תשובות נכונות ומלאות על כל השאלות ב־100 נקודות.
- על התשובה לכל שאלה להופיע בעמוד המתאים. יש להשתדל לקצר בהסברים ולא לחרוג מן המקום שהוקצה להם.
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן. יש להקפיד ולרשום את מספר הסטודנט על טופס הבחינה.
- ודאו היטב את תשובתכם/ן לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורף זוג עמודים נוסף, לשימוש במקרי "חירום".

בהצלחה!

	1
	2
	3
	4
	5

שאלה 1

מהו מספר האפשרויות לבחור קבוצות $A_1, A_2, A_3, A_4 \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ המקיימות $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset$ וכן $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{1, 2, \ldots, n\}$?

תשובה:

הוכחה:

שאלה 2

מהו מספר המספרים השלמים בין 1 ל־30,000 שאינם מתחלקים באף אחד מבין המספרים הבאים: 6,10,15 ?

(כלומר, מצאו את גודל הקבוצה $X = \{1 \leq x \leq 30,000 \mid 15 \nmid x,\ 10 \nmid x,\ 6 \nmid x\ ,\ \ x \in \mathbb{N}\}$)

תשובה:

הוכחה:

שאלה 3

יהי $m = n^3 + 1$ ותהיינה $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ 3 פרמוטציות של $\{1, 2, \ldots, m\}$. הוכיחו כי יש שתיים מן הפרמוטציות שלהן תת סדרה משותפת באורך $n+1$, כלומר, הוכיחו כי יש $1 \le p < q \le 3$ ויש $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1} \le m$ וכן $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_{n+1} \le m$ כך שמתקיים $\sigma_p(i_1) = \sigma_q(j_1),\quad \sigma_p(i_2) = \sigma_q(j_2), \ldots, \sigma_p(i_{n+1}) = \sigma_q(j_{n+1})$.

הוכחה:

שאלה 4

(א) יהי a_n מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = n$ כאשר $x_i \geq 0$ שלם לכל i וכן x_2 מתחלק ב־2, x_3 מתחלק ב־3, x_4 מתחלק ב־4, $1 \leq x_5 \leq 2$, $1 \leq x_6 \leq 6$, $1 \leq x_7 \leq 4$. כתבו פונקציה יוצרת לסדרה $\{a_n\}_{n\geq 0}$.

תשובה:

הוכחה:

(ב) מצאו את a_{1000}.

תשובה:

הוכחה:

שאלה 5

הוכיחו כי אם G קשיר וכל הדרגות ב־G הן זוגיות, אז לכל $v \in V$ מספר רכיבי הקשירות בגרף $G - v$ (זאת אומרת, בגרף המתקבל מ־G על ידי סילוק הצומת v וכל הקשתות החלות בו) הוא לכל היותר $\frac{1}{2}d(v)$.

הוכחה:

דף "חירום" לשאלה מספר _____:

ת.ז.: _____ מס' מחברת: _____

דף "חירום" לשאלה מספר _____: