אלגברה ב3

משה ירדן, אוניברסיטת תל אביב, תשס"ו

תכן העניָנים

הקדמה

האלגברה החִלופית (commutative algebra) הנה אותו הענף של המתמטיקה החוקר חוגים חִלופיים. יסודותיו של ענף זה נעוצים מצד אחד בתורת המספרים ובחקר חוג המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ ומצד שני בגאומטריה אלגברית שבה אב הטפוס של חוגים חלופיים הנו חוג הפולינומים $K[X_1, \ldots, X_n]$ ב n משתנים מעל שדה K. החוגים הללו דומים זה לזה בכך ששניהם בעלי פריקות חד ערכית (ברשימות אלו מניחים אנו עֻבדה זו כִּיְדועה). מלבד זאת הם בעלי אֳפִי שונה זה מזה. כל אידאל ראשוני שונה מאפס של $\mathbb{Z}$ הנו מֵרבִי ובעל שדה מנות סופי. יתר על כן, כל אידאל של $\mathbb{Z}$ הנו ראשי. פשטות זו של החוג מאפשרת לתורת המספרים האלגבריים לנסות להבין כיצד מתפרקים האידאלים הראשוניים של $\mathbb{Z}$ בחוגי מספרים שלמים. לחוג $K[X_1, \ldots, X_n]$ יש לעומת זאת סדרות עולות מארך n של אידאלים ראשוניים. המנות של החוג ביחס לאידאלים אלו אינם יותר שדות אלא תחומי שלמות בעלי תכונות שונות ומגֻונות בעלי השלכות בגאומטריה האלגברית. לדֻגמה, המנה של $K[X_1, \ldots, X_n]$ ביחס לאידאל מרבי שלו הנו שדה הרחבה סופית של K (זהו אחד מהנִסוחים של משפט האפסים של הִלברט).

רשימות אלו שהוכנו עבור הקורס "אלגברה ב3" שנִתן בבית הספר למתמטיקה של אוניברסיטת תל אביב במחצית השניה של תשס"ה ובמחצית הראשונה של תשס"ו נותנות הצצה לעולם המושגים של החוגים החלופיים והמודולים מעל חוגים אלו. המסגרת הקצרה אינה מאפשרת להרחיק לכת. חלק גדול של הרשימות מֻקדש לבנית המושגים הבסיסיים כגון אידאלים ראשוניים ומרביים, שָרשונים של חוג, מוֹדולים מעל חוג, מכפלות טנזוריות של חוגים, מִקום של חוגים ומודולים באידאלים ראשוניים וחוגי נטר. המשפטים העִקריים שהוכחנו הנם: הלמה של נקָימה, משפט האפסים של הלברט, משפט הבסיס של הלברט עבור חוגי פולינומים ועבור חוגים של טורי חזקות פורמליים ולבסוף הפריקות החד ערכית של חוג טורי החזקות הפורמליים בכמה משתנים מעל שדה. כמו כן מֻדש סעיף קצר להערכות בדידות וחוגי דדקינד.

נושאים נוסף שהייתי רוצה להביא ולא הבאתי הם תורת הממד, והשלמות של חוגים וחוגים מקומיים רגולריים יחד עם המשפט שההשלמה של חוג מקומי רגולרי הנה חוג טורי חזקות. הואיל והחוג המקומי של נקֻדה פשוטה על יריעה אלגברית הנו רגולרי, תופש המשפט האחרון מקום מרכזי בחקר יריעות אלגבריות. לצערי יש ללמֵד נושאים אלו במסגרת אחרת.

משה ירדן

מבשרת ציון, תשרי, תשס"ו

א. חוגים ואידֵאלים

בסעיף זה נכניס את המושג של חוג ואידאל ונדון בתכונותיהם היסודיים.

חוגים והומומורפיזמים.

חוג חִלופי עם יחידה (בקִצור **חוג** (ring)) הנו קבוצה A עם שתי פעולות בינריות קשירות, חבור וכפל ושני קבועים 0 ו 1 באפן שהדרישות הבאות מתקיְמות לכל $x, y, z \in A$:

(א1) כלל הצרוף לחבור: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(א2) כלל החִלוף: $x + y = y + x$

(א3) אבר האפס: $0 + x = x$.

(א4) אבר נגדי: לכל x קיָם אבר יחיד $-x$ כך ש $x + (-x) = 0$. (נרשֹם $x - y$ במקום $x + (-y)$).

(א5) כלל הצרוף לכפל: $(xy)z = x(yz)$.

(א6) כלל החלוף לכפל: $xy = yx$.

(א7) אבר היחידה: $1x = x$.

(א8) כלל הפלוג: $x(y + z) = xy + xz$.

לא שללנו את האפשרות ש $1 = 0$. במקרה זה A הנו **חוג האפס** והוא מסֻמן ב 0.

העתקה α מחוג A לחוג B נקראת **הומומורפיזם** אם מתקיְמות הדרישות הבאות לכל $x, y \in A$:

(ב1) $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$ (ולכן, $\alpha(0) = 0$ ו $\alpha(x - y) = \alpha(x) - \alpha(y)$).

(ב2) $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$.

(ב3) $\alpha(1) = 1$.

אם $\beta\colon B \to C$ הנו הומומורפיזם של חוגים, אזי הצרוף $\beta \circ \alpha\colon A \to C$ הנו הומומורפיזם של חוגים. העתקת הזהות $\mathrm{id}\colon A \to A$ הִנה הומומורפיזמים של חוגים.

תת קבוצה A_0 של חוג A מכֻנה **תת חוג** אם היא סגורה תחת החבור והכפל ומכילה את היחידה. במקרה זה היא מהוָה חוג ביחס לפעולות של A והעתקת השִכון $A_0 \to A$ היא הומומורפיזם חד חד ערכי.

הומומורפיזם $\alpha\colon A \to B$ של חוגים נקרא **אפימורפיזם** אם $\alpha(A) = B$. ההומורפיזם נקרא **איזומורפיזם** אם הוא חד חד ערכי ועל. במקרה זה גם ההעתקה ההפוכה $\alpha^{-1}\colon B \to A$ הנה איזומורפיזם.

אידאלים וחוגי מנה.

אידאל $\mathfrak{a}$ של חוג A הנו תת קבוצה הסגורה תחת החִסור, מכילה את אבר האפס וסגורה תחת כפל באברי A (כלומר: $a \in \mathfrak{a}$ ו $r \in A$ גוררים ש $ra \in \mathfrak{a}$. לדֻגמה, 0 ו A עצמו מהוים אידאלים של A. האידאל $\mathfrak{a}$ מתלכד עם החוג A אם ורק אם $1 \in \mathfrak{a}$. אם זה אינו קורה, אומרים ש $\mathfrak{a}$ **נָאוֹת** (proper).

יהי $\mathfrak{a}$ אידאל של A. נסמן ב $A/\mathfrak{a} = \{a + \mathfrak{a} \mid a \in A\}$ את אסף המחלקות השמאליות של A לפי $\mathfrak{a}$. נהפך את $A/\mathfrak{a}$ לחוג בעזרת ההגדרות הבאות:

$$(x + \mathfrak{a}) + (y + \mathfrak{a}) = (x + y) + \mathfrak{a} \qquad (x + \mathfrak{a})(y + \mathfrak{a}) = xy + \mathfrak{a}$$

האפס של $A/\mathfrak{a}$ יהיה $0 + \mathfrak{a}$ ואבר היחידה יהיה $1 + \mathfrak{a}$. ההעתקה $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ המֻגדרת על ידי $\pi(x) = x + \mathfrak{a}$ הנה **אפימורפיזם** של A על $A/\mathfrak{a}$ הנקראת **העְתקת המנה** (quotient map).

יהי $\alpha\colon A \to B$ הומומורפיזם. הקבוצה $\mathrm{Ker}(\alpha) = \alpha^{-1}(0)$ הנה אידאל של A הנקרא **הגרעין** (kernel) של α. ההומומורפיזם חד חד ערכי אם ורק אם $\mathrm{Ker}(\alpha) = 0$. הקבוצה $\mathrm{Im}(\alpha) = \alpha(A)$ הנה תת חוג של B הנקרא **התמונה** (image) של α.

משפטון א.א (משפט האיזומורפיזם הראשון לחוגים): *יהי $\alpha\colon A \to B$ אפימורפיזם ונסמן $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(\alpha)$. אזי קיָם איזומורפיזם יחיד $\bar{\alpha}\colon B \to A/\mathfrak{a}$ כך ש $\bar{\alpha} \circ \alpha = \pi$ הנו העתקת המנה.*

בסימונים של משפט האיזומורפיזם הראשון לחוגים ההעתקה $\mathfrak{b} \to \alpha^{-1}(\mathfrak{b})$ מעתיקה את אסף האידאלים של B באפן חד חד ערכי על אסף האידאלים של A המקיפים את $\mathfrak{a}$.

לבסוף נִרשם $x \equiv y \mod \mathfrak{a}$ ונאמר x **חופף ל** y **מודולו** $\mathfrak{a}$ עבור איברים x, y ואידאל $\mathfrak{a}$ של חוג A אם $x - y \in \mathfrak{a}$. יחס החפיפה הנו יחס שקילות התואם לפעֻלות החִבור והכפל. יתר על כן, $x \equiv y \mod \mathfrak{a}$ אם ורק אם $\pi(x) = \pi(y)$, באשר $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ הנה העתקת המנה.

מחלקי אפס, אברים אֱפיסיים, אֲחָדות.

מחַלק אפס (zero divisor) בחוג A הנו אבר x שעבורו קיָם $y \neq 0$ כך ש $xy = 0$. חוג A ללא מחלקי אפס פרט ל 0 נקרא **תחום שלמות** (integral domain). לדֻגמה, חוג השלמים $\mathbb{Z}$ וחוג הפולינומים $K[X_1, \ldots, X_n]$ במשתנים $X_1, \ldots, X_n$ מעל שדה K הנם תחומי שלמות.

אבר $x \in A$ הנו **אֱפיסי** (nilpotent) אם קיָם מספר טבעי n כך ש $x^n = 0$. כל אבר אפיסי בחוג שונה מאפס הנו מחלק אפס אולם לא כל מחלק אפס הנו אפיסי.

לאבר הפיך u של A קוראים גם **אֲחדה** (unit). לאבר כזה מתאים אבר יחיד u' כך ש $uu' = 1$. במקרה זה מסמנים $u' = u^{-1}$. אסף האחדות של A מהוה חבורה חִלופית המסֻמנת ב $A^{\times}$.

אסף הכפולות Ax של אבר x של A הנו אידאל המכֻנה **ראשי** (principal). מההגדרות נובע ש x אחדה אם ורק אם $Ax = A$.

שדה הנו חוג שבו $1 \neq 0$ ולכל אבר שונה מאפס יש הפוך. בפרט כל שדה הנו תחום שלמות אולם לא להפך ($\mathbb{Z}$ הנו תחום שלמות שאינו שדה). המשפטון הבא מאפיֵן את השדות בקרב החוגים:

משפטון א.ב: *התכונות הבאות של חוג $A \neq 0$ שקולות זו לזו:*

(א) *A הנו שדה.*

(ב) *האידאלים היחידים ב A הם 0 ו A עצמו.*

(ג) *כל הומומורפיזם α של A לתוך חוג שונה מאפס B הנו חד חד ערכי.*

הוכחת (א) גורר (ב): יהי $\mathfrak{a}$ אידאל שונה מאפס של A. אזי קיָם ב $\mathfrak{a}$ אבר $x \neq 0$. יהי y אבר כלשהוא של A. מההצגה $y = yx^{-1} \cdot x$ נובע ש $y \in \mathfrak{a}$. לכן, $\mathfrak{a} = A$.

הוכחת (ב) גורר (ג): יהי B חוג שונה מאפס ויְהי $\alpha\colon A \to B$ הומומורפיזם. אזי $\mathrm{Ker}(\alpha) \neq A$, כי $1 \notin \mathrm{Ker}(\alpha)$. לכן, לפי (ב), $\mathrm{Ker}(\alpha) = 0$ ומכאן ש α חד חד ערכי.

הוכחת (ג) גורר (א): יהי x אבר שונה מאפס של A. נניח בשלילה ש x אינו הפיך, כלומר $Ax \subset A$. אזי A/Ax הנו חוג שונה מאפס. לכן, לפי (ג), העתקת המנה $\pi\colon A \to A/Ax$ הנה חד חד ערכית. בסתירה לכך ש $\pi(x) = 0$. מסתירה זו נובע ש x הפיך ולכן ש A שדה. ∎

אידאלים ראשוניים ואידאלים מרַביים.

אידאל $\mathfrak{p}$ של חוג A מכֻנה **ראשוני** (prime) אם $A \neq \mathfrak{p}$ ואם $xy \in \mathfrak{p}$ גורר ש $x \in \mathfrak{p}$ או $y \in \mathfrak{p}$. לחִלופין, $A/\mathfrak{p}$ הוא תחום שלמות. חוג A הנו תחום שלמות אם ורק אם 0 הנו אידאל ראשוני.

אידאל $\mathfrak{m}$ של A הנו **מֵרַבִּי** (maximal) אם $\mathfrak{m} \subset A$ ואם אין שום אידאל בין $\mathfrak{m}$ ל A. לחלופין, לפי משפטון א.ב, $A/\mathfrak{m}$ שדה.

כל אידאל מרבי הנו ראשוני אולם לא להפך.

יהי $\alpha\colon A \to B$ הומומורפיזם של חוגים. אזי $\alpha^{-1}(\mathfrak{q})$ הנו אידאל ראשוני של A לכל אידאל ראשוני של B. אם α הוא בנוסף לכך על, אזי $\alpha^{-1}(\mathfrak{q})$ הוא אידאל מרבי של A אם $\mathfrak{q}$ הנו אידאל מרבי של B (תרגיל).

האידאלים הראשוניים משחקים תפקיד מרכזי באלגברה החלופית. כדי להוכיח קיום שלהם, משתמשים בלמה של צורן:

יחס סדר בינרי $\leq$ על קבוצה X הנו יחס סדר חלקי אם הוא מקיֵם את הדרישות הבאות לכל $x, y \in X$:

(וא) $x \leq x$,

(וב) $x \leq y$ ו $y \leq x$ גורר ש $x = y$,

(וג) ו $x \leq y$ ו $y \leq z$ גורר $x \leq z$.

לדֻגמה, יחס ההכלה על תת קבוצות של קבוצה S הנו יחס סדר חלקי על אסף תת הקבוצות של S. **שרשרת** ב X הנה תת קבוצה X_0 שבה כל שני אברים ב X_0 נִתנים להשואה. **חסם עליון** (upper bound) של X_0 הנו אבר $y \in X$ הגדול או שוה מכל אברי X_0. אבר z ב X הנו **מרבי** maximal אם אין ב X אבר הגדול ממנו (אולם יתכנו אברים מרביים נוספים שאינם נתנים להשואה עם z).

הלמה של צוֹרן (Zorn): *תהי X קבוצה לא ריקה עם יחס סדר חלקי $\leq$. נניח שלכל שרשרת ב X יש חסם עליון. אזי קיָם ב X אבר מרבי (כלומר אבר $x \in X$ שאין גדול ממנו, אולם יתכנו אברים מרביים נוספים שאינם נתנים להשואה עם x).*

משפטון א.ג: *יהי $\mathfrak{a}_0$ אידאל נאות של חוג A. אזי קיָם ל A אידאל מרבי $\mathfrak{m}$ המקיף את $\mathfrak{a}$.*

הוכחה: הואיל ו $\mathfrak{a}_0$ נאות, $1 \notin \mathfrak{a}$. נסמן ב $\mathcal{A}$ את אסף כל האידאלים הנאותים של A המַקיפים את $\mathfrak{a}_0$. נסדר את $\mathcal{A}$ באֹפן חלקי על ידי הֲכלה. האחוד של אידאלים בכל שרשרת של $\mathcal{A}$ הנו שוב אידאל שאינו מכיל את 1, ולכן שיָך ל $\mathcal{A}$. לכן נובע מהלמה של צורן, שקים ב $\mathcal{A}$ אבר מרבי $\mathfrak{m}$. אבר זה יהיה אידאל מרבי של A המקיף את $\mathfrak{a}_0$. ∎

בפרט, אם נפעיל את משפטון א.ג על אידאל האפס בחוג שונה מאפס A, נקבל שיש ב A אידאלים מרביים ולכן גם אידאלים ראשוניים. אם x אינו אחדה, אזי Ax הנו אידאל נאות. לכן, לפי משפטון א.ג, יש ב A אידאל מרבי המקיף את Ax ולכן מכיל את x.

ההוכחה של משפטון א.ג נתנת להכללה מועילה:

משפטון א.ד: *יהי $\mathfrak{a}$ אידאל של חוג A ו S תת קבוצה של A הסגורה תחת כפל והזרה ל $\mathfrak{a}$. אזי קיָם אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ של A המַקיף את $\mathfrak{a}$ והזר ל S.*

הוכחה: נסמן ב $\mathcal{A}$ את קבוצת כל האידאלים של A המַקיפים את $\mathfrak{a}$ והזרים ל S. אזי $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$. נסדר את $\mathcal{A}$ תחת הכלה. לפי הלמה של צורן, קיָם ב $\mathcal{A}$ אבר מרבי $\mathfrak{p}$. נוכיח ש $\mathfrak{p}$ ראשוני.

נניח בשלילה שקיָמים אברים $x, y \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$ כך ש $xy \in \mathfrak{p}$. אזי $Ax + \mathfrak{p}$ ו $Ay + \mathfrak{p}$ הנם אידאלים של A המַקיפים ממש את $\mathfrak{p}$. מהמרביות של $\mathfrak{p}$ נובע ש $Ax+\mathfrak{p}, Ay+\mathfrak{p} \notin \mathcal{A}$. במלים אחרות, קיָמים $s_1 \in (Ax+\mathfrak{p}) \cap S$ ו $s_2 \in (Ay + \mathfrak{p}) \cap S$. הם יְקַיְמוּ $s_1s_2 \in \mathfrak{p} \cap S$, בסתירה לכך ש $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}$. מסתירה זו נובע ש $\mathfrak{p}$ ראשוני. ∎

חוג A שבו יש בדיוק אידאל מרבי אחד $\mathfrak{m}$ נקרא **חוג מקומי** (local ring). לדֻגמה, כל שדה הנו חוג מקומי. במקרה זה נקרא $A/\mathfrak{m}$ **שדה השאריות** (residue field) של A. המשפטון הבא מאַפיֵן חוגים מקומיים:

משפטון א.ה: *יהי A חוג.*

(א) *אם קיָם ל A אידאל נאות $\mathfrak{m}$ כך שכל אבר של $A \smallsetminus \mathfrak{m}$ הפיך, אזי A מקומי ו $\mathfrak{m}$ הנו האידאל המרבי היחיד שלו.*

(ב) *אם $\mathfrak{m}$ הנו אידאל מרבי של A כך שכל אבר של $\mathfrak{m} + 1$ הפיך, אזי A מקומי.*

הוכחת א: יהי $\mathfrak{a}$ אידאל נאות של A ויהי $x \in \mathfrak{a}$. אזי x אינו הפיך ולכן $x \in \mathfrak{m}$. מכאן נובע ש $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. לכן, $\mathfrak{m}$ הנו האידאל המרבי היחיד של A ולכן, A מקומי.

הוכחת ב: לפי (א), מספיק להוכיח שכל אבר $u \in A \smallsetminus \mathfrak{m}$ הפיך. ואכן, $Au + \mathfrak{m}$ הנו אידאל של A המַקיף ממש את $\mathfrak{m}$. הואיל ו $\mathfrak{m}$ מרבי, $Au + \mathfrak{m} = A$. בפרט קיָמים $a \in A$ ו $m \in \mathfrak{m}$ כך ש $au + m = 1$ ולכן $au = 1 - m$. לפי ההנחה, $1 - m$ הפיך. לכן, $(1-m)^{-1}au = 1$ ו u הפיך, כפי שהיה להוכיח. ∎

חוג בעל מספר סופי של אידאלים מרביים נקרא **חוג מקומי לְמֶחֱצָה** (semi-local ring).

דֻגמאות א.ו:

(א) חוג הפולינומים $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ במשתנים $X_1, \ldots, X_n$ מעל שדה K הנו בעל פריקות חד ערכית. יהי $f \in A$ אבר אי פריק. מהפריקות החד ערכית נובע ש Af הנו אידאל ראשוני. ואכן, אם $n = 1$, חלוק פולינומים עם שארית מוכיח שכל אידאל הנו ראשי ולכן החוג בעל פריקות חד ערכית. צעד האנדוקציה מ n ל $n+1$ נעשה בעזרת הלמה של גאוס.

(ב) בחוג $\mathbb{Z}$ יש לכל אידאל הצורה $m\mathbb{Z}$ עבור מספר אי שלילי m. יתר על כן, האידאל $m\mathbb{Z}$ ראשוני אם ורק אם $m = 0$ או m הנו מספר ראשוני. כל אידאל $p\mathbb{Z}$ שבו p מספר ראשוני הנו מרבי. שדה השאריות $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ הנו שדה בין p אברים.

אם $m = p^k$ באשר p ראשוני ו $k \geq 2$, אזי $p + m\mathbb{Z}$ הנו אבר אֶפיסי של $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ כי $(p + m\mathbb{Z})^k = 0$.
אם $m = p_1 \cdots p_r$ הנו מכפלה של מספרים ראשוניים, אזי כל אחד מהאברים $p_i + m\mathbb{Z}$ הנו מחלק אפס של $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ אולם אין בחוג זה אברים אפיסִיים.

הטעון בפסקה לפני הקודמת שריר גם עבור החוג בדֻגמה (א) במקרה ש $n = 1$ אולם לא במקרה שבו $n > 1$. ואכן, האידאל $\mathfrak{m}$ של כל הפולינומים שהאבר החָפשי שלהם שוה לאפס הנו מרבי (כי $A/\mathfrak{m} \cong K$ הנו שדה). אולם $\mathfrak{m}$ אינו ראשי (תרגיל).

(ג) **חוג ראשי** (principal ideal domain) הנו תחום שלמות שבו כל אידאל הנו ראשי. בחוג כזה כל אידאל ראשוני שונה מאפס מרבי. ואכן, יהי p אבר אי פריק ויהי Ax אידאל המקיף את Ap. אזי $p = ax$ עם אבר $a \in A$. הואיל ו p אי פריק, a הפיך או x הפיך. במקרה הראשון $Ax = Ap$. במקרה השני $Ax = A$. לכן Ap מרבי. ∎

שָׁרְשׁוּנים.

אֹסף האברים האפיסיים של חוג A נקרא **השָׁרְשׁון האֶפיסוני** של A (nil radical). נסמן אותו ב $\mathfrak{N}(A)$. אם $\mathfrak{N}(A) = 0$, נאמר ש A **מצֻמצם** (reduced).

משפטון א.ז: *השרשון האפיסוני, $\mathfrak{N}(A)$, של חוג A הנו אידאל ו $A/\mathfrak{N}(A)$ הנו חוג מצֻמצם.*

הוכחה: כדי להוכיח ש $\mathfrak{N}(A)$ הנו אידאל מספיק להראות שהוא סגור תחת חִבור. ואכן, יהיו x ו y אברים של A כך ש $x^m = 0$ ו $y^n = 0$ עבור מספרים טבעיים m, n. אזי $x^r = 0$ לכל $r \geq m$ ו $y^s = 0$ לכל $s \geq n$. לכן, אם $r + s = m + n$, אזי $x^r y^s = 0$. מכאן נובע ש $(x+y)^{m+n} = \sum_{r=0}^{m+n} \binom{m+n}{r} x^r y^{m+n-r} = 0$, כמבֻקש.

כדי להוכיח שאין ב $A/\mathfrak{N}(A)$ אברים אפיסיים מלבד האפס נתבונן באבר $x \in A$ המקיֵם $(x+\mathfrak{N}(A))^k = 0$ עבור איזה שהוא k טבעי. מכאן נובע שקיָם k טבעי כך ש $x^k \in \mathfrak{N}(A)$, כלומר $x^k \in \mathfrak{N}(A)$. לכן קיָם l טבעי כך ש $x^{kl} = 0$ ולכן $x \in \mathfrak{N}(A)$, כפי שהיה להוכיח. ∎

התוצאה הבאה מאפיֶנת את השרשון של A באֹפן נוסף ומסבירה את השם שלו:

משפטון א.ח: *השרשון האפיסוני של חוג A שוה לחתוך כל האידאלים הראשוניים שלו.*

הוכחה: נסמן ב I את החתוך של כל האידאלים הראשוניים של A. אם $x \in \mathfrak{N}(A)$, אזי קיָם n טבעי כך ש $x^n = 0$. לכן, x שיך לכל אידאל ראשוני של A ולכן גם ל I. מכאן ש $\mathfrak{N}(A) \subseteq I$.

נניח עתה בשלילה שקיָם $x \in I \setminus \mathfrak{N}(A)$. אזי $\mathfrak{N}(A)$ זר לקבוצה הכפלית $S = \{x, x^2, x^3, \ldots\}$. לפי משפטון א.ד קיָם אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ הזר ל S. בפרט, $x \notin \mathfrak{p}$, בסתירה לכך ש $x \in I \subseteq \mathfrak{p}$. מסתירה זו נובע ש $I = \mathfrak{N}(A)$, כפי שהיה להוכיח. ∎

שָׁרשון יעקבסון (Jacobson radical) של חוג A מֻגדר כחתוך כל האידאלים המרביים של A ומסֻמן ב $J(A)$. לפי משפטון א.ח, $\mathfrak{N}(A) \subseteq J(A)$.

משפטון א.ט: *יהי A חוג ו $x \in A$. אזי $x \in J(A)$ אם ורק אם $1 - xy \in A^\times$ לכל $y \in A$.*

הוכחה: נניח תחילה ש $x \in J(A)$ ונניח בשלילה שקיָם $y \in A$ כך ש $1 - xy$ אינו הפיך. אזי קיָם אידאל מרבי $\mathfrak{m}$ כך ש $1 - xy \in \mathfrak{m}$. מצד שני, לפי ההנחה, $x \in \mathfrak{m}$. לכן, $1 \in \mathfrak{m}$. סתירה זו מראה ש $1 - xy$ הפיך לכל $y \in A$.

להפך, נניח ש $x \notin J(A)$. אזי קיָם אידאל מרבי $\mathfrak{m}$ כך ש $x \notin \mathfrak{m}$. לכן, $Ax + \mathfrak{m} = A$. קיָמים אפוא $y \in A$ ו $m \in \mathfrak{m}$ כך ש $yx + m = 1$. לכן, $1 - xy = m \in \mathfrak{m}$ אינו הפיך, כַּנדרש. ∎

פעֻלות על אידאלים.

בהנתֵן קבוצת אידאלים בחוג A, נִתן ליצר מהם אידאלים חדשים בעזרת כמה פעולות. לדֻגמה, אם $\mathfrak{a}$ ו $\mathfrak{b}$ הם אידאלים אזי **הסכום** שלהם,

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a + b \mid \ a \in \mathfrak{a}, \ b \in \mathfrak{b}\}$$

הוא האידאל הקטן ביותר המַקיף את $\mathfrak{a}$ ואת $\mathfrak{b}$. באֹפן כללי יותר, תהי $\{\mathfrak{a}_i \mid i \in I\}$ קבוצה של אידאלים ב A. **הסכום** שלהם $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ מֻגדר כאֹסף כל הסכומים $\sum_{i \in I} a_i$, באשר $a_i \in \mathfrak{a}_i$ ו $a_i = 0$ עבור כמעט כל $i \in I$ (כלומר, עבור כל $i \in I$ פרט למספר סופי של i־ים). בפרט אם $x_1, \ldots, x_n$ הם אברים של A, אזי $\sum_{i=1}^n Ax_i = \{\sum_{i=1}^n a_i x_i \mid \ a_1, \ldots, a_n \in A\}$ הנו האידאל **הנוצר** (generated) על ידי $x_1, \ldots, x_n$.

החתוך $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ של האידאלים $\mathfrak{a}_i$ הנו שוב אידאל.

המכפלה $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ מֻגדרת כאֹסף כל הסכומים $\sum_{j=1}^n a_j b_j$ שבהם $n \geq 0$, $a_j \in \mathfrak{a}$ ו $b_j \in \mathfrak{b}$. באֹפן דומה מגדירים מכפלה של מספר סופי של אידאלים. בפרט עבור $k \geq 1$ מֻגדר $\mathfrak{a}^k$ כאֹסף כל הסכומים הסופיים של מכפלות $a_1 a_2 \cdots a_k$ של אברים של $\mathfrak{a}$. בנוסף, אנו מגדירים $\mathfrak{a}^0 = A$.

המכפלה והסכום מקיְמים את חק הפלוג: $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$.

דֻגמאות א.י:

(א) במקרה ש $A=\mathbb{Z}$, $\mathfrak{a}=m\mathbb{Z}$ ו $\mathfrak{b}=n\mathbb{Z}$ מקבלים $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\gcd(m,n)\mathbb{Z}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=\operatorname{lcm}(m,n)\mathbb{Z}$ ו $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=mn\mathbb{Z}$. בפרט, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ אם ורק אם $\gcd(m,n)=1$.

(ב) יהי $A=K[X_1,\dots,X_n]$ חוג הפולינומים מעל שדה K ויהי $\mathfrak{a}=\sum_{i=1}^n AX_i$ האידאל של כל הפולינומים חסרי אבר קבוע. אזי $\mathfrak{a}^k$ הוא האידאל של כל הפולינומים חסרי אברים ממעלה קטנה מ k. ∎

באֹפן כללי יותר, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$. אם $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=A$ נאמר נאמר שהאידאלים $\mathfrak{a}$ ו $\mathfrak{b}$ **זרים זה לזה.**

המכפלה ישרה (direct product) $A=\prod_{i=1}^n A_i$ של חוגים $A_1,\dots,A_n$ הנה קבוצת כל ה n־יות $(x_1,\dots,x_n)$ שבהן $x_i\in A_i$ והחבור והכפל מֻגדרים על ידי מרכיבים. אבר האפס במכפלה הישרה הוא ה n־יה $(0,\dots,0)$ ואלו האחד הוא $(1,\dots,1)$. לכל i ההטלה $\pi_i\colon A\to A_i$ על המרכיב ה i־י היא הומומורפיזם של חוגים.

משפטון א.יא: *יהיו $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ אידאלים בחוג A. נסמן ב $\varphi\colon A\to\prod_{i=1}^n A/\mathfrak{a}_i$ את ההומומורפיזם המֻגדר על ידי $\varphi(x)=(x+\mathfrak{a}_1,\dots,x+\mathfrak{a}_n)$.*

(א) *אם כל שנים מהאידאלים $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ זרים זה לזה, אזי $\prod_{i=1}^n\mathfrak{a}_i=\bigcap_{i=1}^n\mathfrak{a}_i$.*

(ב) *φ על אם ורק אם כל שנים מהאידאלים $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ זרים זה לזה.*

(ג) *φ חד חד ערכי אם ורק אם $\bigcap_{i=1}^n\mathfrak{a}_i=0$.*

(ד) *φ הנו איזומורפיזם אם כל שנים מהאידאלים $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ זרים זה לזה וחתוך כלם הנו אידאל האפס.*

הוכחת א: נתבונן קודם כל במקרה ש $n=2$ ונרשם $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1$ ו $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}_2$. לפי ההנחה קָימים $a\in\mathfrak{a}$ ו $b\in\mathfrak{b}$ כך ש $a+b=1$. לכן, $x=xa+xb\in\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ לכל $x\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$. (relatively prime).

עתה נניח ש $n\geq 3$ ושהטענה הוכחה כבר עבור $n-1$. אזי $\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_{n-1}=\mathfrak{a}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{a}_{n-1}$. לפי ההנחה קָימים לכל $1\leq i\leq n-1$ אברים $a_i\in\mathfrak{a}_i$ ו $x_i\in\mathfrak{a}_n$ כך ש $a_i+x_i=1$, כלומר $a_i\equiv 1\mod\mathfrak{a}_n$. לכן, $a_1\cdots a_n\equiv 1\mod\mathfrak{a}_n$. במלים אחרות, $\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_{n-1}$ ו $\mathfrak{a}_n$ זרים זה לזה. מהמקרה $n=2$ נובע ש $\mathfrak{a}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{a}_{n-1}\cap\mathfrak{a}_n=\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_{n-1}\cap\mathfrak{a}_n=\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_{n-1}\mathfrak{a}_n$, כפי שנטען.

הוכחת ב: נניח קודם ש $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ זרים בזוגות. יהיו $x_1,\dots,x_n$ אברים של A. נתבונן ב i בין 1 ל n. לכל $j\neq i$ מתקיֵם $\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j=1$. לכן קיָם $a_{ij}\in A$ כך ש $a_{ij}\equiv 1\mod\mathfrak{a}_i$ ו $a_{ij}\equiv 0\mod\mathfrak{a}_j$. נסמן $a_i=\prod_{j\neq i}a_{ij}$. אזי, $a_i\equiv 1\mod\mathfrak{a}_i$ ו $a_i\equiv 0\mod\mathfrak{a}_j$ לכל $j\neq i$. לכן, $x_ia_i\equiv a_i\mod\mathfrak{a}_i$ ו $x_ia_i\equiv 0\mod\mathfrak{a}_j$ לכל $j\neq i$. לבסוף נסמן $x=\sum_{j=1}^n x_ja_j$. אזי $x\equiv x_i\mod\mathfrak{a}_i$ לכל i. מכאן נובע ש $\varphi(x)=(x_1+\mathfrak{a}_1,\dots,x_n+\mathfrak{a}_n)$. לכן, ההעתקה φ על.

הכוון האחר נשאר כתרגיל.

הוכחת ג: מהגדרת φ נובע ש $\operatorname{Ker}(\varphi)=\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$. מכאן הטענה.

הוכחת ד: הטענה נובעת מ ב וְ ג. ∎

מסקנה מיָדית של משפטון י.יא מכלילה את משפט השאריות הסיני מתורת המספרים:

מסקנה א.יב (משפט השאריות הסיני): *יהיו* $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ *אידאלים זרים בזוגות של חוג* A *ו* $a_1,\dots,a_n$ *אברים של* A*. אזי קיָם* $x\in A$ *כך ש* $x\equiv a_i \mod \mathfrak{a}_i$*,* $i=1,\dots,n$*.*

משפטון א.יג: *יהי* A *חוג.*

(א) *יהיו* $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ *אידאלים ראשוניים של* A *ו* $\mathfrak{a}$ *אידאל המוכל ב* $\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$*. אזי קיָם* i *כך ש* $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_i$*.*

(ב) *יהיו* $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ *אידאלים של* A *ו* $\mathfrak{p}$ *אידאל ראשוני המַקיף את* $\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_n$ *אזי קיָם* i *כך ש* $\mathfrak{a}_i\subseteq\mathfrak{p}$*.*

(ג) *בתנאים של (ב), אם* $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{a}_n$ *או* $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_n$*, אזי קיָם* i *כך ש* $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_i$*.*

הוכחת א: התנאי $\bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{a}\not\subseteq\mathfrak{p}_i \Longrightarrow \mathfrak{a}\not\subseteq\bigcup_{i=1}^n\mathfrak{p}_i$ נכון עבור $n=1$. נניח באנדוקציה שהוא נכון עבור $n-1$ ונניח ש $\mathfrak{a}\not\subseteq\mathfrak{p}_i$ לכל $1\le i\le n$. אזי, לכל j קיָם $a_j\in\mathfrak{a}\smallsetminus\bigcup_{i\ne j}\mathfrak{p}_i$. אם קיָם j כך ש $a_j\notin\mathfrak{p}_j$, סיָמנו. אחרת, $a_j\in\mathfrak{p}_j$ לכל j. האבר $b=\sum_{i=1}^n\prod_{j\ne i}a_j$ שיָך ל $\mathfrak{a}$. נניח בשלילה שקיָם k כך ש $b\in\mathfrak{p}_k$. לכל $k\ne i$ מופיע a_k בין הגורמים של המכפלה $\prod_{j\ne i}a_j$ ולכן, $\prod_{j\ne i}a_j\in\mathfrak{p}_k$. מכאן נובע שגם $\prod_{j\ne k}a_j\in\mathfrak{p}_k$. לכן קיָם $j\ne k$ כך ש $a_j\in\mathfrak{p}_k$, בנגוד לבחירת a_j. מסתירה זו נובע ש $b\notin\bigcup_{k=1}^n\mathfrak{p}_k$, כנדרש.

הוכחת ב: נניח בשלילה ש $\mathfrak{a}_i\not\subseteq\mathfrak{p}$ לכל i. אזי קיָם לכל i אבר $a_i\in\mathfrak{a}\smallsetminus\mathfrak{p}$. לכן $a_1\cdots a_n\in\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_n\smallsetminus\mathfrak{p}$, בסתירה להנחה.

הוכחת ג: מ (ב) נובע שקיָם i כך ש $\mathfrak{a}_i\subseteq\mathfrak{p}$. מצד שני $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{a}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{a}_n\subseteq\mathfrak{a}_i$. לכן, $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_i$. ∎

הערה: במקרה שבו $A=\mathbb{Z}$, $\mathfrak{a}=a\mathbb{Z}$ ו $\mathfrak{p}=p\mathbb{Z}$, מַקיף $\mathfrak{p}$ את $\mathfrak{a}$ אם ורק אם p מחלק את a. לכן, במקרה הכללי אומרים לפעמים ש $\mathfrak{p}$ **מחלק** את $\mathfrak{a}$ אם $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}$. במונחים אלו אומר חלק ב של משפטון א.יג שאם אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ מחלק מכפלה של אידאלים, הוא מחלק לפחות אחד מהם. ∎

השָרשון של אידאל $\mathfrak{a}$ בחוג A מֻגדר כאֹסף כל אברי x של A שעבורם $x^n\in\mathfrak{a}$ עבור איזה n שהוא טבעי.

משפטון א.יד: *השָרשון* $\sqrt{\mathfrak{a}}$ *של אידאל* $\mathfrak{a}$ *בחוג* A *שוה לחתוך של כל האידאלים הראשונים המקיפים את* $\mathfrak{a}$*. בפרט,* $\sqrt{\mathfrak{a}}$ *הנו אידאל.*

הוכחה: נתבונן בחוג המנה $\bar{A}=A/\mathfrak{a}$ ותהי $\pi\colon A\to\bar{A}$ העתקת המנה. כאשר $\bar{\mathfrak{p}}$ עובר על כל האידאלים הראשוניים

של $\bar{A}$, עובר $\pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}})$ על כל האידאלים הראשוניים של A המקיפים את $\mathfrak{a}$. לכן, לפי משפטון א.ז,

$$\bigcap_{\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\bar{\mathfrak{p}}} \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}) = \pi^{-1}\Big(\bigcap_{\bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{p}}\Big)$$
$$= \pi^{-1}\{\bar{x} \in \bar{A} \mid \bigvee_{n=1}^{\infty} \bar{x}^n = 0\} = \{x \in A \mid \bigvee_{n=1}^{\infty} x^n \in \mathfrak{a}\}$$

כפי שהיה להוכיח. ∎

ב. הספקטרום של חוג

בסעיף זה נהפך את אסף כל האידאלים הראשוניים של חוג A למרחב טופולוגי ונדון בתכונותיו היסודיים.

יהי A חוג. נסמן ב $\mathrm{Spec}(A)$ את אסף כל האידאלים הראשוניים של A. לכל תת קבוצה E של A נסמן $V(E) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid E \subseteq \mathfrak{p}\}$. לפונקציה קבוצתית זו התכונות הבאות:

(א1) אם $E \subseteq E'$, אזי $V(E) \supseteq V(E')$.

(א2) אם $\mathfrak{a}$ הוא האידאל הנוצר על ידי E, אזי $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$.

(א3) $V(0) = \mathrm{Spec}(A)$ ו $V(1) = \emptyset$.

(א4) לכל משפחה $(E_i)_{i\in I}$ של תת קבוצות של A מתקיֵם $V(\bigcup_{i\in I} E_i) = \bigcap_{i\in I} V(E_i)$.

(א5) לכל משפחה $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ של אידאלים של A מתקיֵם $V(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$.

(א6) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ (השתמש במשפטון א.יג(ב)).

תוצאות אלו מוכיחות שהקבוצות $V(E)$ מקיְמות את הדרישות של תת קבוצות סגורות של מרחב טופולוגי: הקבוצה הריקה וכל המרחב הן קבוצות סגורות, חתוך של משפחה כלשהיא של קבוצות סגורות הנו קבוצה סגורה ואחוד של שתי קבוצות סגורות הנו קבוצה סגורה. המשלימים של הקבוצות הסגורות מקיְמים את הדרישות על הקבוצות הפתוחות של מרחב טופולוגי: הקבוצה הריקה והמרחב כֻּלו מהוים קבוצות פתוחות, אחוד משפחה של קבוצות פתוחות הנו קבוצה פתוחה וחתוך שתי קבוצות פתוחות הנו קבוצה פתוחה. הטופולוגיה שהֻגדרה באפן כזה נקראת **הטופולוגיה של זריצקי** של $\mathrm{Spec}(A)$.

נסמן את $\mathrm{Spec}(A)$ כאן גם ב X. לכל $f \in A$ יהי $X_f = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ במִלים אחרות, $X_f = \mathrm{Spec}(A) \smallsetminus V(Af)$. לכן, X_f הנו תת קבוצה פתוחה של $\mathrm{Spec}(A)$. יתר על כן, לכל אידאל $\mathfrak{a}$ של A מתקיֵם $\bigcap_{f\in\mathfrak{a}} V(Af) = V(\mathfrak{a})$, כלומר $\mathrm{Spec}(A) \smallsetminus V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f\in\mathfrak{a}} X_f$. לכן, אסף הקבוצות X_f מהוה בסיס לטופולוגית זריצקי.

למה ב.א: *לקבוצות הבסיס X_f של טופולוגית זריצקי של $\mathrm{Spec}(A)$ התכונות הבאות:*

(א) $X_f \cap X_g = X_{fg}$.

(ב) $X_f = \emptyset$ *אם ורק אם f אפיסי.*

(ג) $X_f = \mathrm{Spec}(A)$ *אם ורק אם f הפיך.*

(ד) $X_f = X_g$ *אם ורק אם* $\sqrt{Af} = \sqrt{Ag}$.

(ה) $\mathrm{Spec}(A)$ *הנו מרחב טופולוגי דחוס (compact) כלומר, לכל כסוי של $\mathrm{Spec}(A)$ על ידי קבוצות פתוחות יש תת כסוי סופי.*

(ו) *כל אחת מהקבוצות X_f דחוסה בטופולוגית זריצקי.*

(ז) *תת קבוצה פתוחה של $\mathrm{Spec}(A)$ הנה דחוסה אם ורק אם היא אחוד סופי של קבוצות מהצורה X_f.*

הוכחת ה, ו: חלק (ה) נובע מהמקרה הפרטי של חלק (ו) שבו $f = 1$. כדי להוכיח את (ו) נתבונן במשפחה $(f_i)_{i\in I}$ של אברי A המקיְמים $X_f \subseteq \bigcup_{i\in I} X_{f_i}$. מכאן $V(f) \supseteq \bigcap_{i\in I} V(f_i)$ ולכן $\sqrt{Af} \subseteq \sqrt{\sum_{i\in I} Af_i}$. קיָמים אפוא תת קבוצה סופית I_0 של I, אברים a_i של A לכל $i \in I_0$ ומספר טבעי r כך ש $f^r = \sum_{i\in I_0} a_i f_i$. לכן, $V(f) \supseteq \bigcap_{i\in I_0} V(f_i)$. במלים אחרות, $X_f \subseteq \bigcup_{i\in I_0} X_{f_i}$, כפי שהיה להוכיח. ∎

יהי $\varphi\colon A \to B$ הומומורפיזם של חוגים. נסמן $X = \mathrm{Spec}(A)$ ו $Y = \mathrm{Spec}(B)$. אזי $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ הנו אידאל ראשוני של A אם $\mathfrak{q}$ הנו אידאל ראשוני של B. עֻבדה זו מאפשרת לנו להגדיר העְתקה $\varphi^*\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ שומרת סֵדר על ידי $\varphi^*(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. להעתקה זו התכונות הבאות (שכֻּלן נובעות מההגדרות):

(ב1) אם $f \in A$, אזי $(\varphi^*)^{-1}(X_f) = Y_{\varphi(f)}$. בפרט, φ^* רציפה.

(ב2) אם $\mathfrak{a}$ הנו אידאל של A, אזי $(\varphi^*)^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a})B)$, באשר, $\varphi(\mathfrak{a})B$ הנו האידאל של B הנוצר על ידי $\varphi(\mathfrak{a})$.

(ב3) אם φ על, אזי φ^* מעתיקה את Y באפן הומֵאומורפי על תת הקבוצה הסגורה $V(\mathrm{Ker}(\varphi))$ של X. בפרט, לכל אידאל $\mathfrak{a}$ של A המרחב $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ הומאומורפי באֹפן טבעי ל $V(\mathfrak{a})$.

(ב4) הואיל וכל האידאלים הראשוניים של חוג A מַקיפים את השרשון האפיסוני $\mathfrak{N}(A)$ של A, יש לנו שויון $\mathrm{Spec}(A) = V(\mathfrak{N}(A))$. לכן, $\mathrm{Spec}(A)$ הומאומורפי באפן טבעי ל $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{N}(A))$. אנו מקבלים אפוא שהספקטורום של כל חוג הומאומורפי לספקטרום של חוג מצֻמצם.

(ב5) אם $\psi\colon B \to C$ הוא הומומורפיזם נוסף של חוגים, אזי $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

נסמן את הסגור של תת קבוצה Y במרחב טופולוגי X על ידי $\bar{Y}$.

משפטון ב.ב: *יהי A חוג ו $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני. אזי $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$. בפרט, $\{\mathfrak{p}\}$ הנה קבוצה סגורה (נאמר במקרה זה ש $\mathfrak{p}$ הנה* ***נקֻדה סגורה*** *של $\mathrm{Spec}(A)$) אם ורק אם $\mathfrak{p}$ הנו אידאל מרבי של A. אם $\mathfrak{q}$ הנו אידאל ראשוני נוסף, אזי $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ אם ורק אם $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$.*

הוכחה: הסגור של קבוצה הנו החתוך של כל הקבוצות הסגורות המקיפות אותה. בפרט,

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \bigcap_{V(\mathfrak{a})\ni\mathfrak{p}} V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{p}) \ . \qquad \blacksquare$$

.

נאמר על מרחב טופולוגי X שהוא **אי פריק** (irreducible) אם X אינו ריק ואם אינו אחוד של שתי קבוצות סגורות שכל אחת מוכלת ממש ב X. לחִלופין, החתוך של כל שתי קבוצות פתוחות לא ריקות אינו ריק.

משפטון ב.ג: *המרחב הטופולוגי $\mathrm{Spec}(A)$ אי פריק אם ורק אם השָרשון הנילי של A הנו אידאל ראשוני. בפרט $\mathrm{Spec}(A)$ אי פריק אם A הנו תחום שלמות.*

הוכחה: נניח קודם ש $\mathrm{Spec}(A)$ אי פריק. נתבונן באברים $f,g\in A$ כך ש $fg\in\mathfrak{N}(A)$. אזי $fg\in\mathfrak{p}$ לכל $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)$, כלומר, $V(f)\cup V(g)=V(fg)=\mathrm{Spec}(A)$. מאי הפריקות נובע ש $V(f)=\mathrm{Spec}(A)$ או $V(g)=\mathrm{Spec}(A)$. לכן, $f\in\mathfrak{N}(A)$ או $g\in\mathfrak{N}(A)$. מכאן נובע ש $\mathfrak{N}(A)$ הנו אידאל ראשוני.

להפך, נניח ש $\mathrm{Spec}(A)$ פריק. אזי קימות תת קבוצות סגורות נאותות C ו D של $\mathrm{Spec}(A)$ כך ש $C\cup D=\mathrm{Spec}(A)$. עבורן קימים $f,g\in A$ כך ש $C\subseteq V(f)\subset\mathrm{Spec}(A)$ ו $D\subseteq V(g)\subset\mathrm{Spec}(A)$. בפרט $f,g\notin\mathfrak{N}(A)$. בנוסף לזה, $\mathrm{Spec}(A)=C\cup D\subseteq V(f)\cup V(g)=V(fg)\subseteq\mathrm{Spec}(A)$ ולכן, $V(fg)=\mathrm{Spec}(A)$. זה אומר, ש $fg\in\mathfrak{N}(A)$. לכן, $\mathfrak{N}(A)$ אינו ראשוני. ∎

תוצאה ב.ד: *יהי A חוג.*

(א) *יהי $\mathfrak{a}$ אידאל של A. אזי $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ (לחלופין $V(\mathfrak{a})$) אי פריק אם ורק אם $\sqrt{\mathfrak{a}}$ הנו אידאל ראשוני.*

(ב) *$\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p})$ ו $V(\mathfrak{p})$ אי פריקים לכל אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$.*

משפטון ב.ה: *יהי X מרחב טופולוגי.*

(א) *אם תת מרחב Y הנו אי פריק, אזי גם $\bar{Y}$ אי פריק.*

(ב) *כל תת מרחב אי פריק של X מוכל בתת מרחב אי פריק מרבי.*

(ג) *כל אחד מתת המרחבים המרביים האי פריקים סגור ואסף כל המרחבים המרביים האי פריקים מכסה את X. תת מרחבים אלו נקראים* **המרכיבים האי פריקים** *(irreudiclbe components) של X.*

(ד) *אם A הוא חוג ו $X=\mathrm{Spec}(A)$, אזי לכל מרכיב אי פריק של X הצורה $V(\mathfrak{p})$ באשר $\mathfrak{p}$ הנו אידאל ראשוני מזערי של A.*

הוכחת א: יהיו B,C תת קבוצות סגורות של X כך ש $\bar{Y}\subseteq B\cup C$. אזי, $Y\subseteq B\cup C$ ולכן $Y\subseteq B$ או $Y\subseteq C$. הואיל ו B,C סגורות, נובע מכאן ש $\bar{Y}\subseteq B$ או $\bar{Y}\subseteq C$. לכן, $\bar{Y}$ אי פריק.

הוכחת ב: אחוד שרשרת עולה של מרחבים אי פריקים הנו אי פריק. לפי הלמה של צורן קים מרחב אי פריק מרבי.

הוכחת ד: יהי $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני מזערי של A. אזי $V(\mathfrak{p})$ היא תת קבוצה אי פריקה של $\mathrm{Spec}(A)$ (תוצאה ב.ד). תהי Y קבוצה סגורה אי פריקה המקיפה את $V(\mathfrak{p})$. אזי, קיָם אידאל $\mathfrak{a}$ כך ש $Y=V(\mathfrak{a})$. לכן, $\mathfrak{p}\subseteq\sqrt{\mathfrak{a}}$. מתוצאה ב.ד נובע ש $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ראשוני. מהמזעריות של $\mathfrak{p}$ נובע ש $\sqrt{\mathfrak{a}}=\mathfrak{p}$. לכן, $Y=V(\mathfrak{a})=V(\sqrt{\mathfrak{a}})=V(\mathfrak{p})$. נובע אפוא ש $V(\mathfrak{p})$ הנו מרכיב אי קשיר של X.

להפך, יהי Y מרכיב אי פריק של X. כמו מקודם, $Y=V(\mathfrak{p})$ עבור אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$. יהי $\mathfrak{q}$ אידאל ראשוני המוכל ב $\mathfrak{p}$. אזי $Y=V(\mathfrak{p})\subseteq V(\mathfrak{q})$ ו $V(\mathfrak{q})$ סגור ואי פריק. מהמרביות של Y נובע ש $V(\mathfrak{p})=Y=V(\mathfrak{q})$. ממשפטון ב.ב נובע ש $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$. לכן $\mathfrak{p}$ הנו אידאל ראשוני מזערי. ∎

קבוצות אלגבריות.

יהי K שדה סגור אלגברית ו Ω שדה סגור אלגברית המַקיף את K ובעל מעלת נעלות אינסופית מעליו. נבחר משתנים $X_1, \ldots, X_n$ ונשתמש בקִצור $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. נתבונן בקבוצת פולינומים $\mathcal{F}$ ב $K[\mathbf{X}]$ ונקרא לתת הקבוצה

$$V = \{\mathbf{a} \in \Omega^n \mid f(\mathbf{a}) = 0 \text{ for all } f \in \mathcal{F}\}$$

של Ω^n **קבוצה אלגברית.** אסף הפולינומים

$$I(V) = \{g \in K[\mathbf{X}] \mid g(\mathbf{a}) = 0 \text{ for all } \mathbf{a} \in V\}$$

מהוה אידאל של $K[\mathbf{X}]$ וחוג המנה $A = K[\mathbf{X}]/I(V)$ נקרא **חוג הקואורדינטות** (coordinate ring) של V. אם $g_1, g_2 \in K[\mathbf{X}]$, אזי $g_1(\mathbf{x}) = g_2(\mathbf{x})$ לכל $\mathbf{x} \in V$ אם ורק אם $g_1 \equiv g_2 \mod I(V)$. לכן, אפשר לראות את A כחוג כל הפונקציות הפולינומיאליות מ V ל Ω. בפרט, $x_i = X_i + I(V)$ הנה הפונקציה המעתיקה כל $\mathbf{a} \in V$ על a_i ומתקיֵם $A = K[\mathbf{x}]$.

נבנה העתקה טבעית מ V לתוך $\mathrm{Spec}(A)$: לכל נקֻדה $\mathbf{a} \in V$ הקבוצה $\mathfrak{p}_{\mathbf{a}} = \{f \in A \mid f(\mathbf{a}) = 0\}$ הנה אידאל ראשוני של A. להפך, אם $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, ונסמן $b_i = x_i + \mathfrak{p}$ אזי $A/\mathfrak{p} = K[\mathbf{b}]$ הנו תחום שלמות. בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח ש $b_1, \ldots, b_r$ אינם תלויים אלגברית מעל K ו $b_{r+1}, \ldots, b_n$ אלגבריים מעל $K(b_1, \ldots, b_r)$. נבחר $a_1, \ldots, a_r \in \Omega$ שאינם תלויים אלגברית מעל K (זה אפשרי כי ל Ω מעלת נעלות אינסופית מעל K) ונרחיב את האיזומורפיזם־K $K[b_1, \ldots, b_r] \to K[a_1, \ldots, a_r]$ המעתיק את b_i ל a_i לאיזומורפיזם של $K[\mathbf{b}]$ לתוך Ω (זה אפשרי כי Ω סגור אלגברית). נסמן את התמונות של $b_{r+1}, \ldots, b_n$ ב $a_{r+1}, \ldots, a_n$ ונקבל איזומורפיזם $K[\mathbf{b}] \cong_K K[\mathbf{a}]$ ושויון $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathbf{a}}$. ההעתקה $V \to \mathrm{Spec}(A)$ הנה אפוא על.

נסמן $V(K) = V \cap K^n$. אם $\mathbf{a} \in V(K)$, אזי $K[\mathbf{a}] = K$ הנו שדה ולכן $\mathfrak{p}_{\mathbf{a}}$ הנו אידאל מרבי. אם $\mathbf{b}$ היא נקֻדה נוספת של $V(K)$ ו $\mathfrak{p}_{\mathbf{a}} = \mathfrak{p}_{\mathbf{b}}$, אזי קיָם איזומורפיזם־$K$ $K[\mathbf{b}] \cong K[\mathbf{a}]$ המעתיק את a_i על b_i. לכן, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. ההעתקה $V \to \mathrm{Spec}(A)$ מעתיקה אפוא את $V(K)$ באפן חד חד ערכי על קבוצה כל האידאלים המרביים של A (המסֻמנת ב $\mathrm{Max}(A)$) משפט האפסים של הלברט (שנוכיח בהמשך) אומר שהעתקה זו הנה על.

יהי P אידאל ראשוני של $K[\mathbf{X}]$ ונסמן ב V את אסף כל האפסים של P ב Ω^n. חוג הקואורדינטות של V יהיה $K[\mathbf{X}]/I(V) = K[\mathbf{x}]$, באשר $x_i = X_i + I(V)$. כפי שראינו לעיל, אפשר לראות את $x_1, \ldots, x_n$ כאברים של Ω ואת $\mathbf{x}$ כנקֻדה של V הנקראת **יוצרת** (generic). מהעֻבדה ש P ראשוני, נובע ש V **אי פריקה** (irreducible) כלומר, היא אינה אחוד של קבוצות אלגבריות המוכלות ממש ב V.

ג. מודולים

בסעיף זה נכניס "מודולים מעל חוגים" כהכללה של מרחבים וקטוריים מעל שדות.

מודולים והומומורפיזמים של מודולים.

יהי A חוג (כמו תמיד, חלופי ובעל יחידה). **מודול־A** הנו חבורה חלופית M (שפעֻלתה נרשמת כחבור) יחד עם פעֻלה של A משמאל על M המקיֶמת את הדרישות הבאות לכל $a, b \in A$ ו $x, y \in M$:

(א1) $a(x+y) = ax + ay$

(א2) $(a+b)x = ax + bx$

(א3) $(ab)x = a(bx)$

(א4) $1x = x$.

נאמר ש M הוא מודול־A **נֶאֱמָן** (faithful) אם $aM = 0$ גורר $a = 0$ לכל $a \in A$.

דֻגמאות:

(1) כל אידאל של A הנו מודול־A. בפרט, A עצמו הנו מודול־A.

(2) אם A הנו שדה K, אזי כל מודול־A הנו מרחב וקטורי מעל K.

(3) אם $A = \mathbb{Z}$, אזי מודול־A הנו חבורה אבלית.

(4) אם $A = K[X]$, אזי מודול־A אינו אלא מרחב וקטורי מעל K עם העתקה לינארית.

(5) אם A הנו תת חוג של חוג B, אפשר לראות את B כמודול־A כאשר הכפל של אברי A באברי B הנו הכפל בתוך B.

יהיו M, N מודולֵי־A. העתקה $\alpha\colon M \to N$ נקראת **הומומורפיזם־A** אם

$$\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y)$$

$$\alpha(ax) = a\alpha(x)$$

לכל $a \in A$ ו $x, y \in M$. אם A הנו שדה, הומומורפיזם־A אינו אלא העתקה לינארית של מרחבים וקטוריים.

הרכבה של הומומורפיזמי־A הנו הומומורפיזם־A.

אפשר להפך את אֹסף כל ההומומורפיזמים־A ממודול־A M למודול־A N למודול־A: מגדירים חבור וכפל באבר של A באפן הבא:

$$(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$$

$$(a\alpha)(x) = a\alpha(x)$$

מסמנים מודול־A זה ב $\mathrm{Hom}_A(M, N)$.

הומומורפיזם $\mu\colon M' \to M$ של מודולי־A משרה העתקה

$$\mu^*\colon \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M',N)$$

הֻמגדרת באפן הבא: $\mu^*(\alpha) = \alpha \circ \mu$. ואלו הומומורפיזם $\nu\colon N \to N''$ של מודולי־A מגדיר העתקה

$$\nu_*\colon \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N'')$$

הֻמגדרת על ידי $\nu_*(\alpha) = \nu \circ \alpha$. שתי ההעתקות הנן הומומורפיזמים של מודולי־A.

לבסוף, לכל מודול־A M מתאים איזומורפיזם טבעי $\mathrm{Hom}_A(A,M) \cong M$ הֻמגדר על ידי $\alpha \mapsto \alpha(1)$.

תת מודולים ומודולֵי מנה.

תת מודול M_0 של מודול־A M הנו תת חבורה של M הסגורה תחת כפל באברי A. חבורת המנה M/M_0 מקבלת מבנה של מודול־A בעזרת הכלל: $a(x+M_0) = ax + M_0$. המודול M/M_0 נקרא **מודול המנה** (quotient modul) של M ב M_0. ההעתקה הטבעית $x \mapsto x + M_0$ הנה הומומורפיזם של מודולי־A הנקראת **העתקת המנה** (quotient map). נסמן אותה כאן ב π. ההעתקה $L \mapsto \pi^{-1}(L)$ מעתיקה את אסף כל תת המודולים של M/M_0 באפן חד חד ערכי על אסף כל תת המודולים של M המַקיפים את M_0.

אם $\alpha\colon M \to N$ הנו הומומורפיזם של מודולי־A, אזי הקבוצה

$$\mathrm{Ker}(\alpha) = \{x \in M \mid \alpha(x) = 0\}$$

הנה תת מודול של M הנקרא **הגרעין** של α. באפן דומה **התמונה** של α,

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \{\alpha(x) \mid x \in M\}$$

הנה תת מודול של N. מודול המנה

$$\mathrm{Coker}(\alpha) = N/\mathrm{Im}(\alpha)$$

נקרא **הקו־גרעין** (cokernel) של α.

אם M_0 הנו תת מודול של M המוכל ב $\mathrm{Ker}(\alpha)$, אפשר להגדיר העתקה $\bar{\alpha}\colon M/M_0 \to N$ על ידי $\bar{\alpha}(x+M_0) = \alpha(x)$. זוהי הומומורפיזם של מודולי־A המקיֵם $\bar{\alpha} \circ \pi = \alpha$. בפרט, אם $M_0 = \mathrm{Ker}(\alpha)$, אנו מקבלים איזומורפיזם טבעי

$$M/\mathrm{Ker}(\alpha) \cong \mathrm{Im}(\alpha)$$

זהו **משפט האיזומורפיזם הראשון למודולים.**

פעֻלות על תת מודולים.

רב הפעֻלות על אידאלים נתנות להכללה לפעֻלות על תת מודולים. יהי M מודול־A ו $(M_i)_{i\in I}$ משפחה של תת מודולים. **הסכום** $\sum_{i\in I} M_i$ מֻגדר כאסף כל הסכומים $\sum_{i\in I} x_i$ שבהם $x_i \in M_i$ וכמעט כל ה i־ים שוים לאפס. הסכום הנו החתוך של כל תת המודולים המַקיפים את $\bigcup_{i\in I} M_i$. הוא תת מודול של M. גם החתוך $\bigcap_{i\in I} M_i$ הנו תת מודול.

משפטון ג.א:

(א) *אם M_1 ו M_2 הם תת מודולים, אזי* $(M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2/(M_1 \cap M_2)$ *(**משפט האיזומורפיזם השני**).*

(ב) *אם $N' \subseteq N \subseteq M$ הם מודולי־A, אזי* $M/N' \cong (M/N')/(N/N')$ *(**משפט האיזומורפיזם השלישי**).*

הוכחה: שני האיזומורפיזמים הם טבעיים. במקרה הראשון מגדירים העתקה $x \mapsto x + M_1$ מ M_2 על $(M_1 + M_2)/M_1$ שגרעינה $M_1 \cap M_2$. במקרה השני מגדירים העתקה $x + N' \mapsto x + N$ מ M/N' על M/N שגרעינה N/N'. בשני המקרים מפעילים את משפט האיזומורפיזם הראשון. ∎

אם $\mathfrak{a}$ הנו אידאל של A מגדירים את $\mathfrak{a}M$ כתת המודול של M המֻרכב מכל הסכומים הסופיים $\sum a_i x_i$ שבהם $a_i \in \mathfrak{a}$ ו $x_i \in M$.

אם $x \in M$ אזי $Ax = \{ax \mid a \in A\}$ הנו **תת מודול** של M. אם $M = \sum_{i\in I} Ax_i$, נאמר ש $(x_i)_{i\in I}$ הנה קבוצת יוצרים. אם יש ל M קבוצת יוצרים סופית, נאמר ש M **נוצר סופית**.

יהיו M ו N מודולי־A. **הסכום הישר** (direct sum) שלהם הנו אֹסף כל הזוגות (x, y) שבהם $x \in M$ ו $y \in N$, החבור והכפל באברי A מֻגדרים על ידי מרכיבים. מודול זה מסֻמן על ידי $M \oplus N$.

באפן כללי יותר, **הסכום הישר** של משפחת מודולי־A $(M_i)_{i\in I}$ מֻגדר כאסף כל הסדרות המוכללות $(x_i)_{i\in I}$ (אלו הם למעשה אברים של המכפלה הקרטזית $\prod_{i\in I} M_i$), שבהם כמעט כל ה x_i־ים שוים לאפס. החבור והכפל באברי A מֻגדרים שוב לפי מרכיבים. מסמנים את הסכום הישר ב $\bigoplus_{i\in I} M_i$.

לכל $j \in I$ ו $x \in M_j$ נגדיר את $\varepsilon_j(x)$ כאבר $(x_i)_{i\in I}$ שבו $x_j = x$ ו $x_i = 0$ לכל $i \neq j$. ההעתקה $\varepsilon_j \colon M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ היא **שִכּוּן** (כלומר הומומורפיזם חד חד ערכי). כל משפחה $(\alpha_j)_{j\in I}$ של הומומורפיזמים α_j של M_j למודול־A N (שאינו תלוי ב j) מגדירה הומומורפיזם יחיד $\alpha\colon \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ כך ש $\alpha \circ \varepsilon_j = \alpha_j$ לכל $j \in J$. הומומורפיזם זה מֻגדר על ידי הכלל $\alpha((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \alpha_i(x_i)$

מודולים נוצרים סופית.

מודול־A **חפשי** (free) הנו מודול האיזומורפי למודול־A מהצורה $\bigoplus_{i\in I} M_i$ שבו $A \cong M_i$ לכל $i \in I$. במקרה ש I קבוצה סופית בת n אברים מסמנים את הסכום הישר של n עֻתקים של A ב A^n.

משפטון ג.ב: *מודול־A M נוצר סופית אם ורק אם הוא מנה של A^n עבור איזה שהוא n טבעי.*

הוכחה: מספיק לציֵן שעבור כל $x \in M$ ההעתקה $a \mapsto ax$ הנה הומומורפיזם של A לתוך M. ∎

משפטון ג.ג (הלמה של נָקָיָמָה): *יהי M מודול־A נוצר סופית ו $\mathfrak{a}$ אידאל של A המוכל בשרשון יעקבסון של A והמקיֵם* $\mathfrak{a}M = M$. *אזי* $M = 0$.

הוכחה: נניח בשלילה ש $M \neq 0$ ותהי $u_1, \ldots, u_n$ עם $n \geq 1$ קבוצה מזערית של יוצרים של M. לפי ההנחה קיָמים $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}$ כך ש $u_n = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$. מכאן ש $(1-a_n)u_n = a_1u_1 + \cdots + a_{n-1}u_{n-1}$. לפי משפטון א.ט, $1 - a_n$ הפיך. לכן, $u_n = (1-a_n)^{-1}a_1u_1 + \cdots + (1-a_n)^{-1}a_{n-1}u_{n-1}$. מכאן שגם $u_1, \ldots, u_{n-1}$ יוצרים את M בנגוד למזעריות של $u_1, \ldots, u_n$. סתירה זו מוכיחה ש $M = 0$. ∎

תוצאה ג.ד: *יהיו M מודול־A נוצר סופית, M_0 תת מודול ו $\mathfrak{a}$ אידאל של A המוכל בשרשון יעקבסון של A והמקיֵם* $M = M_0 + \mathfrak{a}M$. *אזי* $M = M_0$.

הוכחה: מודול המנה M/M_0 נוצר סופית ומקיֵם $M/M_0 = \mathfrak{a}(M/M_0)$. לפי משפטון ג.ג, $M/M_0 = 0$. לכן, $M = M_0$. ∎

בחוג מקומי A שוה שרשון יעקבסון לאידאל המרבי $\mathfrak{m}$. אפשר אפוא ליַשֵׂם את הלמה של נקָיָמה ל A ו $\mathfrak{m}$. הנה דֻגמה שמופיעה פעמים רבות בשמושית:

משפטון ג.ה: *יהי A חוג מקומי עם אידאל מרבי $\mathfrak{m}$, יהי M מודול נוצר סופית ויהיו* $x_1, \ldots, x_n \in M$. *נניח ש* $x_1 + \mathfrak{m}M, \ldots, x_n + \mathfrak{m}M$ *מהוים בסיס למרחב הוקטורי $M/\mathfrak{m}M$ מעל שדה השאריות* $A/\mathfrak{m}$. *אזי* $x_1, \ldots, x_m$ *יוצרים את* M.

הוכחה: נסמן $M_0 = \sum_{i=1}^{n} Ax_i$. לפי ההנחה, $M = M_0 + \mathfrak{m}M$. לכן, לפי תוצאה ג.ד, $M = M_0$. ∎

אנו נתיַחס בהמשך לכל אחת משלש התוצאות האחרונות כ"למה של נקָיָמה".

סְדָרוֹת מְדֻיָּקוֹת.

סדרה של מודולֵי־A והומומורפיזמים־A

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} M_i \xrightarrow{\alpha_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

הנה **מדֻיֶקת** (exact) ב M_i אם $\mathrm{Im}(\alpha_{i-1}) = \mathrm{Ker}(\alpha_i)$. הסדרה **מדֻיקת** אם היא מדֻיֶקת בכל M_i. בפרט:

(1ב) הסדרה $M \xrightarrow{\alpha} M_0 \longrightarrow 0$ מדֻיקת אם ורק אם α חד חד ערכית.

(2ב) הסדרה $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\beta} M$ מדֻיקת אם ורק אם β על.

(3ב) הסדרה $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\alpha} M_0 \longrightarrow 0$ מדֻיקת אם ורק אם α חד חד ערכית, $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$ ו β על. במקרה זה β משרה איזומורפיזם $M/\mathrm{Im}(\alpha) \cong N$.

סִדרה כמו זאת המופיעה ב (ב3) נקראת **סדרה מדֻיקת קצרה** (short exaqct sequence).

דֻגמה ג.ו: **תהי** $0 \to V_n \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\alpha_1} V_1 \xrightarrow{\alpha_0} V_0 \longrightarrow 0$ **סדרה מדֻיקת של מרחבים וקטוריים מממד סופי מעל שדה** K. **אזי** $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim(V_i) = 0$.

ואכן, לכל i **יש לנו סדרה מדֻיקת קצרה** $0 \to \mathrm{Ker}(\alpha_i) \to V_i \to \mathrm{Im}(\alpha_i) \to 0$. **לכן,**

$$-(-1)^i \dim(\mathrm{Ker}(\alpha_i)) + (-1)^i \dim(V_i) - (-1)^i \dim(\mathrm{Im}(\alpha_i)) = 0 \quad (1)$$

הואיל ו $\mathrm{Im}(\alpha_i) = \mathrm{Ker}(\alpha_{i+1})$ **סכימה על** (1) **מ** 0 **עד** n **נותנת את הנֻסחה המבֻקשת.** ∎

ד. מכפלה טנזורית של מודולים

בסעיף זה נלמד דרך נוספת לבנות מודול ממודולים נתונים.

יהיו M, N, P מודולֵי־A. העתקה $\alpha\colon M\times N\to P$ הנה **בי־לינארית־A** אם היא מקיֶמת את התנאים הבאים לכל $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ ו $a \in A$:

$$\alpha(x+x', y) = \alpha(x, y) + \alpha(x', y)$$

$$\alpha(x, y+y') = \alpha(x, y) + \alpha(x, y')$$

$$\alpha(ax, y) = a\alpha(x, y)$$

$$\alpha(x, ay) = a\alpha(x, y)$$

המשפטון הבא בונה מודול־A T מתוך מודולים נתונים M ו N כך שלכל מודול A עומדים ההומומורפיזמים־A בהתאמה חד חד ערכית עם ההעתקות הבילינאריות־A מ $M\times N$ לתוך P:

משפטון ד.א: *יהיו M ו N מודולֵי־A. אזי קים זוג (T, τ) שבו T הנו מודול־A ו $\tau\colon M\times N\to T$ העתקה בי־לינארית־A עם התכונה הבאה:*

(1) *לכל מודול־A P ולכל העתקה בי־לינארית $\alpha\colon M\times N\to P$ קיָם הומומורפיזם־A יחיד $\alpha'\colon T\to P$ כך ש $\alpha'\circ\tau = \alpha$.*

הוכחה: נתבונן במודול־A החפשי C הנוצר על ידי $M\times N$. אברי מודול זה הנם סכומים פורמליים מהצורה $\sum a_{x,y}(x, y)$ שבהם (x, y) עוברים על כל אברי $M\times N$ ו $a_{x,y}$ הנם אברים של A שכמעט כֻלם אפס. יהי C_0 תת המודול של C הנוצר על ידי כל האברים מהצורה:

$$(x+x', y) - (x, y) - (x', y)$$

$$(x, y+y') - (x, y) - (x, y')$$

$$(ax, y) - a(x, y)$$

$$(x, ay) - a(x, y)$$

נסמן $T = C/C_0$. לכל אבר בסיס (x, y) של C נסמן $x\otimes y = (x, y) + C_0$. אזי T נוצר על ידי האברים $x\otimes y$ ומתקיֵם

$$(x+x')\otimes y = x\otimes y + x'\otimes y$$

$$x\otimes(y+y') = x\otimes y + x\otimes y'$$

$$(ax)\otimes y = a(x\otimes y) = x\otimes ay$$

בפרט, ההעתקה $\tau\colon M \times N \to T$ המֻגדרת על ידי $\tau(x,y) = x \otimes y$ הנה בי־לינארית־A.

כל העתקה α מ $M \times N$ למודול־A P נִתנת להרחבה להומומורפיזם־A $\tilde{\alpha}\colon C \to A$. אם α הנה בי־לינארית־A היא מתאפסת על כל היוצרים של C_0 ולכן גם על C_0 עצמו. לכן היא משרה הומומורפיזם $\alpha'\colon T \to P$ של מודולי־A כך ש $\alpha'(x \otimes y) = \alpha(x,y)$ לכל $(x,y) \in M \times N$. במלים אחרות, $\alpha' \circ \tau = \alpha$.

לבסוף נעיר ש α' מֻגדר באפן יחיד על ידי התנאי האחרון. ∎

הערה ד.ב: התכונה (1) של הזוג (T,τ) גוררת יחידות שלו. ואכן, אם (T',τ') הוא זוג נוסף המקיֵם את (1), אזי קיָם הומומורפיזם־A $\sigma\colon T \to T'$ כך ש $\sigma \circ \tau = \tau'$ וקיָם הומומורפיזם־A $\sigma'\colon T' \to T$ כך ש $\tau = \sigma' \circ \tau'$. לכן, $\tau = \sigma' \circ \tau' = \sigma' \circ \sigma \circ \tau$. הואיל וגם $\mathrm{id}_T \circ \tau = \tau$ נובע מהיחידות שבתנאי (1) עבור T במקום P ש $\sigma' \circ \sigma = \mathrm{id}_T$. באֹפן דומה נובע ש $\sigma \circ \sigma' = \mathrm{id}_{T'}$. לכן, גם σ וגם σ' הנם איזומורפיזמים.

בעקבות היחידות של הזוג (T,τ) נסמן את T ב $M \otimes_A N$ ונקרא למודול־A זה **המכפלה הטנזורית** של M ו N. אם $\{x_i \mid i \in I\}$ היא קבוצת יוצרים של M ו $\{y_j \mid j \in J\}$ הנה קבוצת יוצרים של N, אזי $\{x_i \otimes y_j \mid (i,j) \in I \times J\}$ הנה קבוצת יוצרים של $M \otimes_A N$. ∎

במקום להתחיל עם העתקות בילינאריות, אפשר להתחיל עם העתקות רב לינאריות $\tau\colon M_1 \times \cdots \times M_r \to P$ ולקבל מכפלה טנזורית של כמה מודולי־A:

משפטון ד.ג: *יהיו $M_1,\ldots,M_r$ מודולי־A. אזי קיָם זוג (T,α) המֻרכב ממודול־A T ומהעתקה רב־לינארית $\tau\colon M_1 \times M_r \to P$ בעלת התכונה הבאה:*

(2) *לכל מודול־A P ולכל העתקה רב־לינארית $\alpha\colon M_1 \times \cdots \times M_r \to P$ קיָם הומומורפיזם־A יחיד $\alpha'\colon T \to P$ כך ש $\alpha' \circ \tau = \alpha$.*

יתר על כן, אם זוג (T',α') מקיֵם אף הוא את התנאי (2), אזי קיָם איזומורפיזם יחיד $\sigma\colon T \to T'$ כך ש $\tau \circ \sigma = \tau'$.

המשפטון הבא נותן כמה קשרים טבעיים בין מכפלות טנזוריות:

משפטון ד.ד: *יהיו M,N,P מודולי־A. אזי קיָמים איזומורפיזמים־A יחידים*

(א) $M \otimes_A N \to N \otimes_A M$

(ב) $(M \otimes N) \otimes P \to M \otimes_A (N \otimes_A P) \to M \otimes_A N \otimes_A P$

(ג) $(M \oplus N) \otimes P \to (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$

(ד) $A \otimes_A M \to M$

באפן ש

(א') $x \otimes y \to y \otimes x$

(ב') $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z) \mapsto x \otimes y \otimes z$

(ג) $(x,y)\otimes z\mapsto(x\otimes z,y\otimes z)$.

(ד) $a\otimes x\mapsto ax$.

בהתאמה.

הוכחה: בכל אחד מהמקרים מגדירים העתקה מאגף ימין לאגף שמאל, מראים שההעתקות הפוכות זו לזו על היוצרים ומסיקים מהיחידות שההעתקות הפוכות זו לזו גם על המודולים. מכאן שההעתקות המקוריות הן איזומורפיזמים.

נוכיח לדֻגמה את חצי (ב). לצרך זה נצא מאבר $z\in P$ ונתבונן בהעתקה הבי־לינארית $M\times N\to M\otimes N\otimes P$ המֻגדרת על ידי $(x,y)\mapsto x\otimes y\otimes z$. היא משרה הומומורפיזם $\alpha_z\colon M\otimes N\to M\otimes N\otimes P$ של מודולי־A כך ש $\alpha_z(x\otimes y)=x\otimes y\otimes z$. עתה נתבונן בהעתקה הבי־לינארית $(M\otimes N)\times P\to M\otimes N\otimes P$ הנקבעת על ידי $(t,z)\to\alpha_z(t)$. העתקה זו בי־לינארית בשני המשתנים. לדֻגמה, $\alpha_{z+z'}(t)=\alpha_z(t)+\alpha_{z'}(t)$ עבור כל t מהצורה $x\otimes y$ ולכן גם עבור כל $t\in M\otimes_A N$. לכן, משרה העתקה זו הומומורפיזם $\alpha\colon(M\otimes N)\otimes P\to M\otimes N\otimes P$ של מודולי־A.

בכוון ההפוך נגדיר הומומורפיזם $\beta\colon M\otimes_A N\otimes_A P\to(M\otimes_A N)\otimes_A P$ כך ש $\beta(x\otimes y\otimes z)=(x\otimes y)\otimes z$. ההעתקות α ו β הפוכות זו לזו על היוצרים ולכן גם על המודולים. מכאן שכל אחת מהן היא איזומורפיזם. ∎

הערה ד.ה: מודולים כפולים. יהיו A ו B חוגים, M מודול־A, P מודול־B ו N מודול־(A,B), כלומר N הנו בו זמנית גם מודול־A וגם מודול־B שני המבנים מתיַשבים זה עם זה, דהיינו $a(by)=b(ay)$ לכל $a\in A$, $b\in B$ ו $y\in N$. אזי $M\otimes_A N$ הנו מודול־(A,B). ואכן, לכל $b\in B$ ההעתקה $(x,y)\mapsto x\otimes by$ היא בי־לינארית ביחס ל A ולכן משרה הומומורפיזם $M\otimes_A N\to M\otimes_A N$ המעתיק את $x\otimes y$ על $x\otimes by$. שמוש ביחידות מראה שהעתקה זו אכן מגדירה פעֻלה של B על $M\otimes_A N$ המתיַשבת עם הפעֻלה של A. באפן דומה הופכים את $N\otimes_B P$ למודול־(A,B). בזה מֻגדרים היטב שני האגפים של האיזומורפיזם הטבעי הבא של מודולי־(A,B):

$$(M\otimes_A N)\otimes_B P\cong M\otimes_A(N\otimes_B P)\ .$$

האבר $(x\otimes y)\otimes z$ של אגף שמאל יעבר לאבר $x\otimes(y\otimes z)$ של אגף ימין.

הוכחת האיזומורפיזם דומה להוכחה שהבאנו למשפטון ג.י(ב). ∎

יהיו עתה A תת חוג של B, M מודול A ו N מודול־B. אזי N הנו גם מודול־A ומתקיֵם:

$$(M\otimes_A B)\otimes_B N\cong M\otimes_A N \tag{3}$$

כדי להוכיח איזומורפיזם זה אפשר לצרף את הערה ד.ה עם משפטון ד.ד(א).

הערה ד.ו.: יהיו $\alpha\colon M \to N'$ ו $\beta\colon N \to N'$ הומומורפיזמים של מודולי־A. אזי ההעתקה $(x,y) \mapsto \alpha(x)\otimes\beta(y)$ מ $M\times N$ ל $M'\otimes_A N'$ בי־לינארית. לכן קיָם הומומורפיזם יחיד

$$\gamma\colon M\otimes_A N \to M'\otimes_A N'$$

המקיֵם $\gamma(x\otimes y) = \alpha(x)\otimes\beta(y)$.

אם בנוסף לזה, $\alpha'\colon M' \to M''$ ו $\beta'\colon N' \to N''$ הם הומומורפיזמים אזי ההומומורפיזמים $(\alpha'\circ\alpha)\otimes$ $(bet'\circ\beta)$ ו $(\alpha'\otimes\beta')\circ(\alpha\otimes\beta)$ מתלכדים על היוצרים $x\otimes y$ של $M\otimes N$. לכן,

$$(\alpha'\circ\alpha)\otimes(\beta'\circ\beta) = (\alpha'\otimes\beta')\circ(\alpha\otimes\beta)\ . \qquad \blacksquare$$

מודולים שטוחים.

המשפטון הבא אומר שהמכפלה הטנזורית **מדֻיקת מימין:**

משפטון ד.ז: *תהי*

$$M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \longrightarrow 0 \tag{4}$$

סדרה מדֻיקת של מודולי־A. יהי N מודול־A נוסף. אזי גם הסדרה

$$M_1\otimes N \xrightarrow{\alpha\otimes 1} M_2\otimes_A N \xrightarrow{\beta\otimes 1} M_3\otimes_A N \longrightarrow 0$$

שבה 1 מסמן את העתקת הזהות של N הנה מדֻיקת.

הוכחה: קל לראות ש $\beta\otimes 1$ הנה על וש $\mathrm{Im}(\alpha\otimes 1)\subseteq \mathrm{Ker}(\beta\otimes 1)$. לכן, $\beta\otimes 1$ משרה אפימורפיזם

$$\overline{\beta\otimes 1}\colon (M_2\otimes_A N)/\mathrm{Im}(\alpha\otimes 1) \to M_3\otimes_A N$$

כדי לסיֵם את הוכחת המשפט מספיק להראות ש $\overline{\beta\otimes 1}$ הוא איזומורפיזם. לצרך זה נבנה הומומורפיזם

$$\psi\colon M_3\otimes_A N \to (M_2\otimes_A N)/\mathrm{Im}(\alpha\otimes 1) \tag{5}$$

שיהיה הפוך ל $\overline{\beta\otimes 1}$. כרגיל נגדיר העתקה $M_3\times N \to (M_2\otimes_A N)/\mathrm{Im}(\alpha\otimes 1)$ על ידי

$$(x_3,y) \mapsto (x_2\otimes y) + \mathrm{Im}(\alpha\otimes 1) \tag{6}$$

באשר $x_2\in\beta^{-1}(x_3)$. אם x_2' הנו אבר נוסף ב $\beta^{-1}(x_3)$, אזי קיָם $x_1\in M_1$ כך ש $\alpha(x_1) = x_2 - x_2'$ (בגלל הדיוק של הסדרה (4)). לכן, $(x_2\otimes y) + \mathrm{Im}(\alpha\otimes 1) = (x_2'\otimes y) + \mathrm{Im}(\alpha\otimes 1)$. במלים אחרות, ההעתקה (6) מֻגדרת היטב. מזה נובע שהעתקה זו הנה בי־לינארית. לכן, היא מגדירה הומומורפיזם ψ כמו ב (5) המקיֵם $\psi(x_3\otimes y) = (x_2\otimes y) + \mathrm{Im}(\alpha\otimes 1)$. מההגדרות עולה ש ψ אכן הפוך ל $\overline{\beta\otimes 1}$, כַנדרש. $\blacksquare$

דֻגמה ה.ח: הטִפול במכפלות טנזוריות דורש זהירות. לדֻגמה, נתבונן באבר $(1+2\mathbb{Z})\otimes 2$ של $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. לפי כללי המכפלה הטנזורית שוה אבר זה ל $(2+2\mathbb{Z})\otimes 1$ ולכן ל 0. מצד שני ההעתקה $x\to 2x$ של $\mathbb{Z}$ על $2\mathbb{Z}$ הנה איזומורפיזם של מודולֵי $\mathbb{Z}$ ולכן היא משרה איזומורפיזם $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\cong 2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. איזומורפיזם זה מעביר את $(1+2\mathbb{Z})\otimes 2$ לאבר $(1+2\mathbb{Z})\otimes 1$ של $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. המודול האחרון איזומורפי ל $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ תחת האיזומורפיזם $x\otimes y\mapsto xy$. בפרט $1\otimes 1+2\mathbb{Z}$ עובר ל $1+2\mathbb{Z}$. לכן, $2\otimes 1+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ אינו שוה לאפס בתור אבר של $2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

דֻגמה זו מראה שאבר $x\otimes y$ של מכפלה טנזורית $M\otimes_A N$ מֻגדר היטב רק בתוך המכפלה אולם יש לו משמעות אחרת ב $M_0\otimes_A N$ אם M_0 הנו תת מודול של M המכיל את x.

דֻגמה זו גם מראה שהמכפלה הטנזורית אינה מדֻיקת משמאל. ואכן, נתבונן בסדרה המדֻיקת $0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{\alpha}\mathbb{Z}$ שבה $\alpha(x)=2x$. לעומת זאת הסדרה $0\longrightarrow\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\xrightarrow{\alpha}\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ אינה מדֻיקת, שכן כפי שראינו לעיל, $1\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ שונה מאפס ב $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ אולם $\alpha(1\otimes(1+2\mathbb{Z}))=2\otimes(1+2\mathbb{Z})=0$. ∎

נאמר שמודול־A N הנו **שטוח** (flat) אם הוא מקַים אחד משני התנאים השקולים הבאים:

(ג1) אם $0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$ הנה סדרה מדֻיקת של מודולֵי־A, אזי גם הסדרה

$$0\to M_1\otimes_A N\to M_2\otimes_A N\to M_3\otimes_A N\to 0$$

מדֻיקת.

(ג2) אם $\alpha\colon M_1\to M_2$ הנו שִכון של מודולֵי־A, גם $\alpha\otimes 1\colon M_1\otimes_A M_1\to M_2\otimes_A M_2$ הנו שכון של מודולֵי־A.

מרחבים וקטוריים הנם תמיד מודולים שטוחים כפי שנוכיח להלן:

משפטון ד.ט: *יהיו V ו W מרחבים וקטוריים מעל שדה K ויהיו $\{v_i\mid i\in I\}$ ו $\{w_i\mid j\in J\}$ בסיסים שלהם בהתאמה. אזי $\{v_i\otimes w_j\mid (i,j)\in I\times J\}$ הנו בסיס של $V\otimes_K W$.*

הוכחה: נסמן ב Z את המרחב הוקטורי מעל K שבסיסו מֻרכב מהזוגות (v_i,w_j) שבהם $(i,j)\in I\times J$. ההעתקה $(v_i,w_j)\to v_i\otimes w_j$ נתנת להרחבה להעתקה לינארית α מ Z לתוך $V\otimes_K W$. כדי להגדיר העתקה בכוון ההפוך נצא מאבר $v=\sum_{i\in I}a_iv_i$ של V עם $a_i\in K$ שכמעט כלם אפס ומאבר $w=\sum_{j\in J}b_jw_j$ ונעתיק את (v,w) ל $\sum_{i,j}a_ib_j(v_i,w_j)$. זוהי העתקה בי־לינארית מ $V\times W$ לתוך Z ולכן מגדירה העתקה לינארית $\alpha'\colon V\otimes_K W\to Z$. מההגדרות נובע ש α ו α' הפוכים זה לזה. לכן, כל אחד מהם הנו איזומורפיזם. בפרט נובע שהאברים $v_i\otimes w_j$ מהוִים בסיס ל $V\otimes_K W$. ∎

תוצאה ד.י: *יהיו V ו W מרחבים וקטוריים מעל שדה K. אזי* $\dim(V\otimes_K W)=\dim(V)\dim(W)$.

תוצאה ד.יא: *כל מרחב וקטורי W מעל שדה K הנו מודול־K שטוח.*

הוכחה: יהיו $V_1 \subseteq V_2$ מרחבים וקטוריים מעל K. עלינו להראות שההעתקה הטבעית של $V_1 \otimes_K W$ לתוך $V_2 \otimes_K W$ הנה חד חד ערכית. לצֹרך זה נבחר בסיס $\{v_i \mid i \in I_1\}$ ל V_1 ונרחיב אותו לבסיס $\{v_i \mid i \in I_2\}$ (באשר $I_1 \subseteq I_2$) של V_2 (השתמש בלמה של צורן). כמו כן נבחר בסיס $\{w_j \mid j \in J\}$ של W. לפי משפטון ד.ט, $(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I_2\times J}$ הנו בסיס של $V_2 \otimes_K W$. בפרט, האברים $v_i \otimes w_j$ שעבורם $(i,j) \in I_1 \times J$ אינם תלויים לינארית.

כל אבר u של $V_1 \times W$ נתן להצגה כסכום $\sum_{(i,j)\in I_1\times J} a_{ij} v_i \otimes w_j$ באשר $a_{ij} \in K$ וכמעט כֻּלם אפס. אם אבר זה שוה לאפס ב $V_2 \times W$, אזי, לפי הפסקה הקודמת, $a_{ij} = 0$ לכל $i \in I_1$ ו $j \in J$. לכן, $u = 0$. ∎

ה. חוגי מנות ומודולי מנות

נִתן להכליל את בנית שדה המנות של תחום שלמות לחוגים חלופיים כלליים:

יהי A חוג. תת קבוצה S של A מכֻנה **כְּפלית** (multiplicative) אם $1 \in S$ ואם S סגורה תחת כפל. נאמר ששני זוגות (s,a) ו (s',a') ב $S \times A$ **שקולים זה לזה** אם קיָם $u \in S$ כך ש $u(s'a - sa') = 0$ יחס זה **חוזר** (=רפלקסיבי) וסימטרי. כדי להוכיח שהיחס גם יוצא (=טרנזיטיבי) נניח ש (s',a') שקול לזוג (s'',a''), כלומר קיָם $v \in S$ כך ש $v(s''a' - s'a'') = 0$. אזי, $us'a = usa'$ ו $vs''a' = vs'a''$. נכפיל את השויון הראשון ב vs'' ונשתמש בשני כדי לקבל $uvs's''a = usvs''a' = uvss'a''$. מכאן ש $uvs'(s''a - sa'') = 0$. הואיל ו S כפלי, $uvs' \in S$. לכן, (s,a) שקול ל (s'',a'').

נסמן את מחלקת השקילות של הזוג (s,a) כשבר $\frac{a}{s}$. ותהי $S^{-1}A$ קבוצת כל מחלקות השקילות. נגדיר חבור וכפל על $S^{-1}A$ בדרך המקֻבלת:

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'} \qquad \frac{a}{s}\frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$$

אבר האפס של $S^{-1}A$ יהיה $\frac{0}{1}$ ואלו האחד יהיה $\frac{1}{1}$. בדיקה שגרתית (אם כי מיַגעת) מראה שהגדרות אלו אינן תלויות במיַצגים ושהחבור והכפל מקיְמים את כל הכללים שחבור וכפל בחוג צריכים לקיֵם. לכן, $S^{-1}A$ הנו חוג חלופי עם יחידה. חוג זה נקרא **חוג המנות** (ring of fractions) של A ביחס ל S.

לדֻגמה, אם A הנו תחום שלמות ו $S = A \smallsetminus \{0\}$, אזי $S^{-1}A$ הנו שדה המנות של A.

קיָם הומומורפיזם טבעי $\sigma\colon A \to S^{-1}A$ המֻגדר על ידי $\sigma(a) = \frac{a}{1}$. לזוג $(S^{-1}A, \sigma)$ התכונות הבאות:

(א1) אם $s \in S$, אזי $\sigma(s)$ הפיך ב $S^{-1}A$.

(א2) אם $\sigma(a) = 0$, אזי קיָם $s \in S$ כך ש $as = 0$.

(א3) לכל אבר $S^{-1}A$ הצורה $\sigma(a)\sigma(s)^{-1}$ עבור איזה שהוא $a \in A$ ואיזה שהוא $s \in S$.

(א4) לכל הומומורפיזם $\alpha\colon A \to B$ של חוגים שעבורו $\alpha(S) \subseteq B^{\times}$ קיָם הומומורפיזם יחיד $\alpha'\colon S^{-1}A \to B$ כך ש $\alpha \circ \alpha' = \sigma$.

מתנאי (א2) עולה שאם יש ב S מחלקי אפס, אזי $\sigma\colon A \to S^{-1}A$ אינו שִכון. למרות זאת רושמים לפעמים את $\sigma(a)$ כ a. במקרה זה אומרים למשל ש $a = 0$ ב $S^{-1}A$ אם $\sigma(a) = 0$.

דֻגמאות ה.א:

1. יהי $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני של חוג A. אזי $S = A \smallsetminus \{\mathfrak{p}\}$ הנה קבוצה כפלית. במקרה זה מסמנים את $S^{-1}A$ ב $A_{\mathfrak{p}}$ וב $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ את האידאל $\sigma(\mathfrak{p})$ של $A_{\mathfrak{p}}$. באפן מפֹרש

$$A_{\mathfrak{p}} = \left\{\frac{a}{s} \mid a \in A,\ s \in A \smallsetminus \mathfrak{p}\right\}, \qquad \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \left\{\frac{a}{s} \mid a \in \mathfrak{p},\ s \in A \smallsetminus \mathfrak{p}\right\}$$

אם $\frac{a}{s} \in A_\mathfrak{p} \smallsetminus \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, אזי $a \notin \mathfrak{p}$. לכן, $\frac{s}{a}$ הפוך ל $\frac{a}{s}$ ב $S^{-1}A$. מכאן נובע ש $A_\mathfrak{p}$ הנו חוג מקומי ו $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ הוא האידאל המרבי היחיד שלו. שדה השאריות $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ הנו שדה המנות של $A/\mathfrak{p}$.

המעבר מ A ל $A_\mathfrak{p}$ נקרא **מִקום** (localization) של A ב $\mathfrak{p}$.

2. יהי $f \in S$ ויהי $S = \{f^n \mid n \geq 0\}$. במקרה זה נרשׂם A_f במקום $S^{-1}A$.

3. במקרה ש $A = \mathbb{Z}$ ו $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}$, $A_\mathfrak{p}$ הנו חוג כל המנות $\frac{m}{n}$ שבהם n זר ל p. מסמנים חוג זה גם כ $\mathbb{Z}_{(p)}$.

4. יהי $K[\mathbf{x}]$ חוג הקואורדינטות של יריעה ב Ω^n מעל שדה סגור אלגברית K. תהי $\mathbf{a}$ נְקֻדה ב V. **החוג המקומי** של V ב $\mathbf{a}$ אינו אלא החוג המקומי של $K[\mathbf{x}]$ באידאל הראשוני $\mathfrak{p}_\mathbf{a} = \{f(\mathbf{x}) \mid f(\mathbf{a}) = 0\}$:

$$K[\mathbf{x}]_\mathbf{a} = \left\{\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x}}) \in f, g \in K[\mathbf{X}],\ g(\mathbf{a}) \neq 0\right\}. \qquad \blacksquare$$

נִתן להעביר את הבניה של $S^{-1}A$ מחוגים למודולים. יהי M מודול. נגדיר שני זוגות (s, m) ו (s', m') ב $S \times M$ כשקולים אם קיָם $u \in S$ כך ש $u(s'm - sm') = 0$. מוכיחים כמו מקודם שאכן זהו יחס שקילות. נסמן את מחלקת השקילות של (s, m) כשבר $\frac{m}{s}$, נסמן את אסף מחלקות השקילות ב $S^{-1}M$ ונהפך את $S^{-1}M$ למודול־$S^{-1}A$ על ידי שנגדיר חבור וכפל באברי $S^{-1}A$ בדרך דומה לזו שהגדרנו את החבור והכפל ב $S^{-1}A$. אם $S = A \smallsetminus \mathfrak{p}$ עבור אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$, נשתמש בסימון $M_\mathfrak{p}$ במקום $S^{-1}M$. במקרה ש $S = \{f^n \mid n \geq 0\}$ ו $f \in A$ נסמן M_f במקום $S^{-1}M$.

לכל הומומורפיזם $\alpha\colon M \to N$ של חוגי־A מגדירים הומומורפיזם $S^{-1}\alpha\colon S^{-1}M \to S^{-1}N$ על ידי $(S^{-1}\alpha)(\frac{m}{s}) = \frac{\alpha(m)}{s}$. אם $\beta\colon N \to N'$ הנו הומומורפיזם נוסף של מודולי־A, אזי $S^{-1}(\beta \circ \alpha) = S^{-1}\beta \circ S^{-1}\alpha$. בדיקה שגרתית מראה שהפעֻלה S^{-1} מדֻיקת:

משפטון ה.ב: *תהי $L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N$ סדרה מדֻיקת של מודולֵי־A. אזי גם הסדרה*

$$S^{-1}L \xrightarrow{S^{-1}\alpha} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\beta} S^{-1}N$$

מדֻיקת.

למעשה אפשר לקבל את המודולים $S^{-1}M$ מהחוגים $S^{-1}A$ בעזרת מכפלות טנזוריות:

משפטון ה.ג: *יהיו A חוג, S קבוצה כפלית ו M מודול־A. אזי קיָם איזומורפיזם טבעי $S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M$.*

הוכחה: מגדירים העתקה $S^{-1}M \to S^{-1}A \otimes_A M$ על ידי $\frac{m}{s} \mapsto \frac{1}{s} \otimes m$. ההעתקה ההפוכה תִנתן על ידי $\frac{a}{s} \otimes m \mapsto \frac{am}{s}$. $\blacksquare$

צרוף של המשפטונים ה.ב ו ה.ג נותן את התוצאה הבאה:

משפטון ה.ד: *$S^{-1}A$ הנו מודול־A שטוח.*

הפעלת S^{-1} מתחלפת עם המכפלה הטנזורית:

משפטון ה.ה: *יהיו M ו N מודולי־A ותהי S קבוצה כפלית ב A. אזי קיָם איזומורפיזם יחיד*

$$\alpha\colon S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \to S^{-1}(M \otimes_A N)$$

המקיֵם $\alpha\left(\frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t}\right) = \frac{m \otimes n}{st}$. בפרט, אם $\mathfrak{p}$ הנו אידאל של A, אזי $(M \otimes_A N)_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}}$ כמודולי־$A_{\mathfrak{p}}$.

תכונות מקומיות.

לְמִקוּם של חוג A באידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ יש היתרון שהוא מעביר את A לחוג פשוט יותר, לחוג שיש בו רק אידאל מרבי אחד. במקרים אחדים אפשר ללמד מהתכונות של החוגים המקומיים על תכונות של A. נאמר שתכונה P של חוגים (לחלופין מודולים) הנה **מקומית** (local) אם מנכונותה עבור $A_{\mathfrak{p}}$ (לחלופין $M_{\mathfrak{p}}$) עבור כל אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ של A נובעת נכונותה עבור A (לחלופין M). התוצאות הבאות נותנות דֻגמאות לתכונות מקומיות:

משפטון ה.ו: *התנאים הבאים על מודול־A M שקולים זה לזה:*

(א) $M = 0$.

(ב) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ *לכל אידאל ראשוני* $\mathfrak{p}$.

(ג) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ *לכל אידאל מרבי* $\mathfrak{m}$.

הוכחה: מספיק להוכיח ש (ג) גורר (א). יהי אפוא $x \in M$. אזי לכל $\mathfrak{m}$ מרבי קים $s_{\mathfrak{m}} \in A \setminus \mathfrak{m}$ כך ש $s_{\mathfrak{m}}x = 0$. בפרט, אין קיָם אידאל מרבי המכיל את כל ה $s_{\mathfrak{m}}$־ים. לכן, ה $s_{\mathfrak{m}}$־ים יוצר את A. במלים אחרות, קיָמים $a_{\mathfrak{m}}$־ים ב A שכמעט כֻּלם אפס כך ש $\sum a_{\mathfrak{m}} s_{\mathfrak{m}} = 1$. מכאן נובע ש $x = \sum a_{\mathfrak{m}} s_{\mathfrak{m}} x = 0$. ∎

משפטון ה.ז: *יהי $\alpha\colon M \to N$ הומומורפיזם של מודולֵי־A ותהי S תת קבוצה כפלית של A. אזי*

(א) $S^{-1}\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(S^{-1}\alpha)$.

(ב) $S^{-1}\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(S^{-1}\alpha)$.

(ג) $S^{-1}\mathrm{Coker}(\alpha) = \mathrm{Coker}(S^{-1}\alpha)$.

הוכחה: הוכח את הטענות בזו אחר זו בעזרת הדיוק של הפונקטור S^{-1} (משפטון ה.ב). ∎

משפטון ה.ח: *יהי $\alpha\colon M \to N$ הומומורפיזם של מודולֵי־A. אזי התנאים הבאים שקולים זה לזה.*

(א) α *חד חד ערכי.*

(ב) $\alpha_{\mathfrak{p}}\colon M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ *חד חד ערכי לכל אידאל ראשוני* $\mathfrak{p}$.

(ג) $\alpha_\mathfrak{m}\colon M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ *לכל אידאל מרבי* $\mathfrak{m}$.

הוכחה: (א) גורר (ב) כי מִקום באידאל ראשוני הנו פעֻלה מדֻיקת. כדי להוכיח ש (ג) גורר (א) מספיק לצין ש $\mathrm{Ker}(\alpha)_\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(\alpha_\mathfrak{m})$ ולהשתמש במשפטון ה.ו. ∎

התוצאה האחרונה נשארת נכונה אם מחליפים "חד חד ערכי" ב "על":

משפטון ה.ט: *יהי* $\alpha\colon M \to N$ *הומומורפיזם של מודולֵי־*A*. אזי התנאים הבאים שקולים זה לזה.*

(א) α *על.*

(ב) $\alpha\colon M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ *על לכל אידאל ראשוני* $\mathfrak{p}$.

(ג) $\alpha_\mathfrak{m}\colon M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ *על לכל אידאל מרבי* $\mathfrak{m}$.

הוכחה: כמו משפטון ה.ז גם כאן נובעות טענותינו מכך שמִקום הוא פעֻלה מדֻיקת ולהשתמש במשפטון ה.ז ובכך שלכל אידאל מרבי $\mathfrak{m}$ של A מתקיֵם ו $\mathrm{Coker}(\alpha)_\mathfrak{m} = \mathrm{Coker}(\alpha_\mathfrak{m})$. ∎

כדי להוכיח ש ששטיחות היא תכונה מקומית צריך לשים לב לכך שאם S הוא תת קבוצה כפלית של A ואם M הנו מודול־$S^{-1}A$, אזי $S^{-1}M = M$. בפרט, אם $\mathfrak{p}$ הוא אידאל ראשוני של A ו M הנו מודול־$A_\mathfrak{p}$, אזי $M = M_\mathfrak{p}$.

משפטון ה.י: *התנאים הבאים שקולים זה לזה לכל מודול־*A M:

(א) M *הנו מודול־*A *שטוח.*

(ב) $M_\mathfrak{p}$ *הנו מודול־*A_p *שטוח לכל אידאל ראשוני* $\mathfrak{p}$.

(ג) $M_\mathfrak{m}$ *הנו מודול־*$A_\mathfrak{m}$ *שטוח לכל אידאל מרבי* $\mathfrak{m}$.

הרחבה של אידאלים לחוג המנות.

יהיו A חוג ו S קבוצה כפלית בו. לכל אידאל $\mathfrak{a}$ של A $S^{-1}\mathfrak{a} = \{\frac{a}{s} \mid a \in \mathfrak{a},\ s \in S\}$ הוא אידאל של $S^{-1}A$. לפְעֻלת המִקום של אידאלים יש כמה תכונות:

משפטון ה.יא:

(א) *ההתאמה* $\mathfrak{p} \to S^{-1}\mathfrak{p}$ *מעתיקה את קבוצת האידאלים הראשוניים של* A *הזרים ל* S *באפן חד חד ערכי על קבוצת האידאלים הראשוניים של* $A_\mathfrak{p}$.

(ב) *הפעֻלה* $\mathfrak{a} \mapsto S^{-1}\mathfrak{a}$ *מתחלפת עם בנִית סכומים סופיים, מכפלות, חתוכים ושרשונים.*

הוכחת א: יהי $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני של A. אם קיָם אבר $s \in S \cap \mathfrak{p}$, אזי $S^{-1}\mathfrak{p}$ מכיל את האבר ההפיך $\frac{s}{1}$ של $S^{-1}A$ ולכן, $S^{-1}\mathfrak{p} = S^{-1}A$. להפך, אם $S^{-1}\mathfrak{p} = S^{-1}A$, אזי קיָמים $a \in \mathfrak{p}$ ו $s \in S$ כך ש $\frac{1}{1} = \frac{a}{s}$. לכן, קיָם $t \in S$ כך ש $su = au$. אגף שמאל שיך ל S ואלו אגף ימין שיך ל $\mathfrak{p}$. מכאן ש $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$.

עתה, אם $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, ו $\frac{x}{s}\frac{y}{s'} = \frac{a}{s''}$ באשר $s, s', s'' \in S$ ו $a \in \mathfrak{p}$, אזי קיָם $t \in S$ כך ש $xys''t = ass't$. הואיל ו $s'', t \notin \mathfrak{p}$, אחד משני האברים x או y שַיָך ל $\mathfrak{p}$. מכאן ש $S^{-1}\mathfrak{p}$ ראשוני.

לבסוף אם $\mathfrak{P}$ הוא אידאל ראשוני של $S^{-1}A$, אזי $\mathfrak{p} = \{a \in A \mid \frac{a}{1} \in \mathfrak{P}\}$ הוא אידאל ראשוני של A ו $S^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{P}$. ואכן, אם $\frac{a}{s} \in \mathfrak{P}$ עם $a \in A$ ו $s \in S$, אזי $\frac{a}{1} = \frac{s}{1} \cdot \frac{a}{s} \in \mathfrak{P}$ ולכן $a \in \mathfrak{p}$. ∎

תוצאה ה.יב: *יהי $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני של חוג A. אזי האידאלים של $A_\mathfrak{p}$ עומדים בהתאמה חד חד ערכית עם האידאלים של A המוכלים ב $\mathfrak{p}$.*

ו. הרחבות שלמות

תורת המספרים האלגבריים מעמידה במרכז מחקרה חוגי מספרים שאינם אלא הסגורים השלמים של $\mathbb{Z}$ בשדות מספרים. גם בגאומטריה אלגברית יש חשיבות גדולה להרחבות שלמות. בסעיף זה נלמד נושא זה עבור חוגים חלופיים כלשהם.

יהי B חוג, A תת חוג ו x אבר של B. אומרים ש x **שָׁלֵם** (integral) מעל A אם הוא מקיֵם משואה מהצורה

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{1}$$

עם מקדמים $a_i \in A$. בפרט, כל אבר של A שלם מעל A.

כדי לאפיֵן את מושג השלמות נעיר שמושג המטריצה ומושג הדטרמיננטה מוגדרים מעל כל חוג (חִלופי עם יחידה) A. בפרט, המטריצה המצֹרפת $\tilde{C}$ של מטריצה רבועית C מקיֶמת את הנֻסחה $\tilde{C}C = \det(C)I$, באשר I היא מטריצת היחידה [Lang, Algebra, 3rd Edition, p. 518].

משפטון ו.א: *יהיו B חוג, A תת חוג ו $x \in B$. הטענות הבאות שקולות זו לזו:*

(א) *x שלם מעל A.*

(ב) *$A[x]$ נוצר סופית כמודול־A.*

(ג) *$A[x]$ מוכל בתת חוג C של B הנוצר סופית כמודול־A.*

(ד) *קיָם מודול־$A[x]$ נאמן M הנוצר סופית כמודול־A.*

הוכחת (א) גורר (ב): נניח ש x מקיֵם את המשואה (1) עם מקדמים $a_i \in A$. אזי, לכל $r \ge 0$ מתקיֵם $x^{n+r} = -a_1x^{n+r-1} - \cdots - a_nx^r$. מכאן נובע באנדוקציה ש $x^k \in \sum_{i=0}^{n-1} Ax^i$ לכל $k \ge 0$. לכן, $A[x] = \sum_{i=0}^{n-1} Ax^i$ נוצר סופית כמודול־A.

הוכחת (ד) גורר (א): יהיו $v_1, \ldots, v_n$ יוצרים של M כמודול־$A[x]$. אזי, לכל $1 \le i \le n$ קיָמים $a_{ij} \in A$ כך ש $xv_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j$. לכן, $\sum_{j=1}^n (\delta_{ij}x - a_{ij})v_j = 0$, $i = 1, \ldots, n$, באשר δ_{ij} הוא הדלתא של קרונקֶר. נסמן ב $\mathbf{v}$ את העמודה מגֹבה n שהמרכיב ה j־י שלה הוא v_j. נתבונן במטריצה $C = (\delta_{ij}x - a_ij)_{1\le i,j\le n}$ מסדר $n \times n$ ונכפיל את שִׁויון המטריצות $C\mathbf{v} = 0$ משמאל במטריצה המצֹרפת $\tilde{C}$ כדי לקבל (לפי הדיון לפני המשפט) $\det(C)v_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. לכן, $\det(C)M = 0$. הואיל ו M הוא מודול־$A[x]$ נאמן, $\det(C) = 0$. פתוח הדטרמיננטה נותן את הפולינום האָפיני של המטריצה $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ ומשואה מהצורה (1) עבור x. ∎

תוצאה ו.ב: *יהי B חוג, A תת חוג ו $x_1, \ldots, x_n \in B$. אם כל אחד מהאברים x_i שלם מעל A, אזי $A[x_1, \ldots, x_n]$ נוצר סופית כמודול־A.*

הוכחה: אנדוקציה על n נותנת ש $A[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ נוצר סופית כמודול־A. הואיל ו x_n שלם גם

מעל $A[x_1,\dots,x_{n-1}]$, החוג $A[x_1,\dots,x_n]$ נוצר סופית כמודול־$A[x_1,\dots,x_{n-1}]$ (משפטון ו.א). לכן, $A[x_1,\dots,x_n]$ נוצר סופית גם כמודול־A. ∎

תוצאה ו.ג: *יהי A תת חוג של חוג B. אֹסף האברים של B השלמים מעל A מהוה תת חוג A' של C המקיף את A.*

הוכחה: יהיו x,y אברים של C שלמים מעל A. אזי החוג $A[x,y]$ נוצר סופית כמודול־A. לכן, לפי משפטון ו.א, $x+y$ ו xy שלמים מעל A. ∎

החוג A' הנִזכר בתוצאה ו.ג נקרא **הסגור השלם** של A ב B. אם $A'=A$, נאמר ש A **סגור בִּשלמות** (integrally closed) **ב** B. אם $A'=B$ נאמר ש B **שלֵם** (integral) מעל A.

התוצאה הבאה אומרת שהיחס "להיות שלם מעל" יוצא:

תוצאה ו.ד: *יהיו $C \supseteq B \supseteq A$ חוגים. נניח ש B שלם מעל A ו C שלם מעל B. אזי C שלם מעל A.*

הוכחה: כל $x \in C$ מקיֵם שויון מהצורה $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_0=0$ עם אברים $b_i \in B$. בפרט, $A[x]$ נוצר סופית מעל $A[b_1,\dots,b_n]$. הואיל ו B שלם מעל A, $A[b_1,\dots,b_n]$ נוצר סופית מעל A (תוצאה ו.ב). לכן, $A[x]$ נוצר סופית מעל A. לפי משפטון ו.א, x שלם מעל A. ∎

תוצאה ו.ה: *יהיו $B \supseteq A$ חוגים ו A' הסגור השלם של A ב B. אזי A' סגור בשלמות ב B.*

הוכחה: אם אבר x של B שלם מעל A', אזי לפי תוצאה ו.ד, x שלם מעל A. מכאן ש שַׁיָך ל A'. ∎

התוצאה הבאה מראה שהיחס "להיות שלם מעל" נשמר במעבר למנות ולחוגי מנות:

משפטון ו.ו: *יהי B חוג השלם מעל חוג A.*

(א) *יהיו $\mathfrak{b}$ אידאל של B ו $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\cap B$. אזי $B/\mathfrak{b}$ שלם מעל $A/\mathfrak{a}$.*

(ב) *תהי S תת קבוצה כפלית של A. אזי החוג $S^{-1}B$ שלם מעל החוג $S^{-1}A$.*

הוכחת ב: יהי $x \in B$ ו $s \in S$. אזי קיָמים $a_1,\dots,a_n \in A$ כך ש $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$. לכן,

$$\left(\frac{x}{s}\right)^n+\frac{a_1}{s}\left(\frac{x}{s}\right)^{n-1}+\cdots+\frac{a_n}{s^n}=0 \ .$$

כלומר, $\frac{x}{s}$ שלם מעל $S^{-1}A$. ∎

משפט הַעֲלִיָה.

יהיו $B \supseteq A$ חוגים. אם $\mathfrak{q}$ הוא אידאל ראשוני של B, אזי $\mathfrak{q}\cap A$ הנו אידאל ראשוני של A. במקרה ש B שלם מעל A, הקשר בין האידאלים הראשוניים של B לבין האידאלים הראשוניים של A הדוק יותר, כפי שנראה להלן:

משפטון ו.ז: *יהיו $B \supseteq A$ תחומי שלמות. נניח ש B שלם מעל A. אזי B שדה אם רק אם A שדה.*

הוכחה: נניח קודם ש A שדה. יהי x אבר שונה מאפס של B. אזי קיָמים $a_1, \ldots, a_n \in A$ כך ש $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ ו $a_n \neq 0$. לכן, $x^{-1} = a_n^{-1}(x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_n) \in B$. מכאן ש B שדה.

להפך, נניח ש B שדה ויהי $x \in A$, $x \neq 0$. אזי, $x^{-1} \in B$. לכן, קיָמים $a_1, \ldots, a_n \in A$ כך ש $x^{-n} + a_1x^{-n+1} + \cdots + a_n = 0$. לכן, $x^{-1} = -(a_1x + \cdots + a_nx^{n-1}) \in A$. ∎

תוצאה ו.ח: *יהיו $B \supseteq A$ חוגים ו $\mathfrak{q}$ אידאל של B. נניח ש B שלם מעל A ונסמן $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ (נאמר ש $\mathfrak{q}$* **מונח מעל** *$\mathfrak{p}$). אזי, $\mathfrak{q}$ מרבי אם ורק אם $\mathfrak{p}$ מרבי.*

הוכחה: חוג המנה $B/\mathfrak{q}$ מַקיף את $A/\mathfrak{p}$ ושלם מעליו. שני חוגים אלו הנם תחומי שלמות. לפי תוצאה ו.ז, $B/\mathfrak{q}$ שדה אם ורק אם $A/\mathfrak{p}$ שדה. לכן, $\mathfrak{q}$ מרבי אם ורק אם $\mathfrak{p}$ מרבי. ∎

תוצאה ו.ט: *יהיו $B \supseteq A$ חוגים כך ש B שלם מעל A. יהיו $\mathfrak{q}' \supseteq \mathfrak{q}$ אידאלים ראשוניים של B. נניח ש $\mathfrak{q}' \cap B = \mathfrak{q} \cap A$. אזי, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.*

הוכחה: החוג $B_\mathfrak{p}$ שלם מעל החוג המקומי $A_\mathfrak{p}$ בעל האידאל המרבי $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. החתוך של האידאלים הראשוניים $\mathfrak{q}B_\mathfrak{p}$ ו $\mathfrak{q}'B_\mathfrak{p}$ עם $A_\mathfrak{p}$ שוה ל $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. לכן, לפי תוצאה ו.ח, גם $\mathfrak{q}B_\mathfrak{p}$ וגם $\mathfrak{q}'B_\mathfrak{p}$ מרביים. לכן, $\mathfrak{q}B_\mathfrak{p} = \mathfrak{q}'B_\mathfrak{p}$. מכאן נובע ש $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. ∎

משפט ו.י: *יהיו $B \supseteq A$ חוגים ו $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני של A. נניח ש B שלם מעל A. אזי קיָם אידאל ראשוני $\mathfrak{q}$ של B המונח מעל $\mathfrak{p}$.*

הוכחה: נתבונן בתרשים החלופי

$$\begin{array}{ccc} A_\mathfrak{p} & \longrightarrow & B_\mathfrak{p} \\ \uparrow{\scriptstyle\alpha} & & \uparrow{\scriptstyle\beta} \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

שבו α ו β הן ההעתקות הרגילות והחִצים המאֻזנים הנם הכלות. החוג $B_\mathfrak{p}$ שלם מעל החוג המקומי $A_\mathfrak{p}$ בעל האידאל המרבי $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. נבחר אידאל מרבי $\mathfrak{n}$ של $B_\mathfrak{p}$. לפי תוצאה ו.ח, $\mathfrak{n} \cap A_\mathfrak{p}$ הנו אידאל מרבי של $A_\mathfrak{p}$. לכן, $\mathfrak{n} \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. לכן, $\mathfrak{q} = \beta^{-1}(\mathfrak{n})$ הנו אידאל ראשוני של B המונח מעל $\mathfrak{p}$. ∎

המשפט הבא נקרא "משפט העליה" (going up thoerem) כיון שעולים בו מסדרה נתונה של אידאלים ראשוניים לסדרת אידאלים גדולים יותר.

משפט ו.יא: *יהיו $B \supseteq A$ חוגים כך ש B שלם מעל A. יהיו $\mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n$ אידאלים ראשוניים של A ויהיו $\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m$ אידאלים ראשוניים של B כך ש $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$ עבור $i = 1, \ldots, m$. אזי קיָמים אידאלים ראשוניים $\mathfrak{q}_{m+1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n$ כך ש $\mathfrak{q}_m \subseteq \mathfrak{q}_{m+1}$ ו $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ עבור $i = m+1, \ldots, n$.*

הוכחה: אנדוקציה מראה שמספיק לדון במקרה שבו $m = 1$ ו $n = 2$. נסמן $\bar{A} = A/\mathfrak{p}_1$ ו $\bar{B} = B/\mathfrak{q}_1$. ויהי $\bar{\mathfrak{p}}_2$ התמונה של $\mathfrak{p}_2$ ב $\bar{A}$. הואיל ו $\bar{B}$ שלם מעל $\bar{A}$, קיָם לו אידאל ראשוני $\bar{\mathfrak{q}}_2$ המונח מעל $\bar{\mathfrak{p}}_2$. התמונה ההפוכה $\mathfrak{q}_2$ של $\bar{\mathfrak{q}}_2$ ב B תהיה אידאל ראשוני המקיף את $\mathfrak{q}_1$ והמונח מעל $\mathfrak{p}_2$. ∎

משפט ירידה.

תחומי שלמות שאחד מהם שלם מעל האחר מקיְמים, נוסף למשפט העליה, גם משפט ירידה עבור אידאלים ראשוניים.

ראשית נחריף את משפטון ו.ו(ב):

משפטון ו.י: *יהיו $B \supseteq A$ חוגים, A' הסגור השלם של A ב B ו S תת קבוצה כפלית של A. אזי $S^{-1}A'$ הנו הסגור השלם של $S^{-1}A$ ב $S^{-1}B$.*

הוכחה: לפי משפטון ו.ו(ב), מספיק להוכיח ש $S^{-1}A'$ סגור בשלמות ב $S^{-1}B$. ואכן, יהיו $b \in B$ ו $s \in S$ כך ש $\frac{b}{s}$ שלם מעל $S^{-1}A$. קיָמים אפוא $a_1, \ldots, a_n \in A$ ו $t_1, \ldots, t_n \in S$ כך ש

$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \frac{a_1}{t_1}\left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{t_n} = 0.$$

נסמן $t = t_1 \cdots t_n$ ונכפיל את השויון האחרון ב $(st)^n$ כדי לקבל שויון מהצורה

$$(tb)^n + a_1'(tb)^{n-1} + \cdots + a_n' = 0$$

עם מקדמים $a_i' \in A$. הואיל ו A' סגור בשלמות ב B, נקבל ש $tb \in A'$. לכן, $\frac{b}{s} = \frac{tb}{ts} \in S^{-1}A'$. ∎

תחם שלמות A מכֻנה **סגור בְּשלמות** (integrally closed) אם A סגור בשדה המנות שלו. לדֻגמה, $\mathbb{Z}$ סגור בשלמות ב $\mathbb{Q}$. באפן כללי יותר, אם A הנו תחום שלמות בעל פריקות חד ערכית, אזי A סגור בשלמות. בפרט, חוג הפולינומים $K[X_1, \ldots, X_n]$ מעל שדה K הנו סגור בשלמות..

ואכן, יהיו x, y אברים שונים מאפס זרים זה לזה של A. נניח שקיָמים $a_1, \ldots, a_n \in A$ כך ש

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

לכן, $x^n + a_1yx^{n-1} + \cdots + a_ny^n = 0$. אם y אינו הפיך, יש לו גורם אי פריק p. מהמשואה האחרונה נובע ש $p|x^n$ ולכן $p|x$. מסתירה זו נובע ש y הפיך ולכן, $\frac{x}{y} \in A$, כפי שהיה להוכיח.

מסתבר שלהיות סגור בשלמות היא תכונה מקומית עבור תחומי שלמות:

משפטון ו.יא: *יהי A תחום שלמות. אזי A שוה לחתוך של החוגים $A_\mathfrak{m}$ כאשר $\mathfrak{m}$ עובר על כל האידאלים המרביים של A.*

הוכחה: נניח שלכל $\mathfrak{m}$ מרבי, $x \in A_\mathfrak{m}$. אזי קיָם $s_\mathfrak{m} \in A \smallsetminus \mathfrak{m}$ כך ש $s_\mathfrak{m} x \in A$. כמו בהוכחת משפטון ה.ו, קיָמים $a_\mathfrak{m} \in A$ שכמעט כֻּלם אפס כך ש $\sum a_\mathfrak{m} s_\mathfrak{m} = 1$. לכן, $x = \sum a_\mathfrak{m} s_\mathfrak{m} x \in A$. ∎

משפטון ו.יב: *התכונות הבאות של תחום שלמות A שקולות זו לזו:*

(א) *A סגור בשלמות.*

(ב) *$A_\mathfrak{p}$ סגור בשלמות עבור כל אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ של A.*

(ג) *$A_\mathfrak{m}$ סגור בשלמות עבור כל אידאל מרבי $\mathfrak{m}$ של A.*

הוכחת (ג) גורר (א): יהי K שדה המנות של A (ושל כל $A_\mathfrak{m}$ עם $\mathfrak{m}$ מרבי). נניח שאבר x של K שלם מעל A. אזי, עבור כל אידאל מרבי $\mathfrak{m}$, x שלם מעל $A_\mathfrak{m}$. הואיל ו $A_\mathfrak{m}$ סגור בשלמות, $x \in A_\mathfrak{m}$. מ משפטון ו.יא נובע ש $x \in A$. ∎

התוצאה הבאה משלימה את משפט ו.י במקרה מיֻחד:

משפטון ו.יג: *יהי A תחום שלמות סגור בשלמות ויהי K שדה המנות של A. תהי L הרחבה נורמלית של K ויהי B הסגור השלם של A ב L. יהיו $\mathfrak{q}$ ו $\mathfrak{q}'$ אידאלים ראשוניים של B השוכנים מעל אותו האידאל הראשוני $\mathfrak{p}$ של A. נניח ש A סגור בשלמות, B שלם מעל A ו L נורמלי מעל K. אזי קיָם $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$ כך ש $\sigma\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.*

הוכחה: נפריד את ההוכחה לשני מקרים:

מקרה א: $[L : K] < \infty$. נניח בשלילה ש $\sigma\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}'$ לכל $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$. לפי תוצאה ו.ט, $\mathfrak{q}' \not\subseteq \sigma\mathfrak{q}$ לכל $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$. הואיל ו $\mathrm{Aut}(L/K)$ סופי, נובע ממשפטון א.יג(א) ש $\mathfrak{q}' \not\subseteq \bigcup_{\sigma\in\mathrm{Aut}(L/K)} \sigma\mathfrak{q}$. נבחר $x \in \mathfrak{q}' \smallsetminus \bigcup_{\sigma\in\mathrm{Aut}(L/K)} \sigma\mathfrak{q}$. אזי

(2) $\tau x \notin \mathfrak{q}$ לכל $\tau \in \mathrm{Aut}(L/K)$.

תהי $y = \mathrm{Norm}_{L/K} x = \left(\prod_{\tau\in\mathrm{Aut}(L/K)} \tau x\right)^{p^k}$ הנורמה של x, באשר $p = \mathrm{char}(K)$ אם $\mathrm{char}(K) > 0$ ו $p = 1$ אם $\mathrm{char}(K) = 0$ ו k מספר טבעי מתאים (השוה למעלת אי הפרידות של L/K). מתורת גלואה נובע ש $y \in K$. כמו כן, כל אחד מהאברים τx שלם מעל A ולכן, גם y שלם מעל A. הואיל ו y סגור בשלמות, $y \in A$. מכאן ש $y \in \mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p}$. לכן, $y \in \mathfrak{q}$ ולכן קיָם $\tau \in \mathrm{Aut}(L/K)$ כך ש $\tau x \in \mathfrak{q}$, בסתירה ל (2). סתירה זו מוכיחה ש $\mathfrak{q}$ ו $\mathfrak{q}'$ צמודים זה לזה מעל K.

מקרה ב: L/K *הרחבה נורמלית כלשהיא.* נתבונן בקבוצה $\mathcal{E}$ של כל הזוגות (E, σ) שעבורם E הנה הרחבה נורמלית סופית של K המוכלת ב L ו σ הנו אבר של $\mathrm{Aut}(L/K)$ המקיֵם $\sigma(\mathfrak{q} \cap E) = \mathfrak{q}' \cap E$. קבוצה זו אינה ריקה שכן $(K, \mathrm{id}) \in \mathcal{E}$. נרשֹם $(E, \sigma) \le (E', \sigma')$ עבור שני זוגות ב $\mathcal{E}$ אם $E \subseteq E'$ ו $\sigma = \sigma'|_E$. בזה הגדרנו

סדר חלקי על $\mathcal{E}$. הלמה של צורן נותנת אבר מרבי (E,σ) של $\mathcal{E}$. אם $E \neq L$, אזי קיֶמת ל E הרחבה סופית E' המוכלת ב L שהיא נורמלית מעל K. נרחיב את σ לאוטומורפיזם σ של E'/K. אזי $\sigma(\mathfrak{q} \cap E')$ ו $\mathfrak{q}' \cap E'$ הם אידאלים ראשוניים של הסגור השלם $E' \cap B$ של $E \cap B$ המונחים מעל $\mathfrak{q}' \cap E$. מקרה א נותן $\tau \in \mathrm{Aut}(E'/E)$ כך ש $\tau\sigma(\mathfrak{q} \cap E') = \mathfrak{q}' \cap E$. נרחיב את τ לאבר של $\mathrm{Aut}(L/K)$ שיסֻמן אף הוא ב τ. אזי, $(E',\tau\sigma)$ הנו אבר של $\mathcal{E}$ הגדול ממש מ (E,σ). סתירה זו למרביות של (E,σ) מוכיחה ש $E = L$ וש $\sigma\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$, כמבֻקש. ∎

משפט ו.יד (משפט הירידה): *יהי A תחום שלמות סגור בשלמות ויהי B חוג המקיף את A ושלם מעליו. יהיו $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$ אידאלים ראשוניים של A ויהי $\mathfrak{q}_1$ אידאל ראשוני של B המונח מעל $\mathfrak{p}_1$. אזי קיָם ל B אידאל ראשוני $\mathfrak{q}_2$ המוכל ב $\mathfrak{q}_1$ ומונח מעל $\mathfrak{p}_2$.*

הוכחה: נבחר הרחבה נורמלית L' של K המַקיפה את L ונסמן ב A' את הסגוּר השלם של A ב L'. אזי $B \subseteq A'$. לפי משפט העליה קיָמים אידאלים ראשוניים $\mathfrak{q}_1' \subseteq \mathfrak{q}_2'$ של A' כך ש $\mathfrak{q}_i' \cap A = \mathfrak{p}_i$, $i = 1,2$. בנוסף לכך קיָם ל A' אידאל ראשוני $\mathfrak{q}_1''$ המונח מעל $\mathfrak{q}_1$ (משפט ו.י) ולכן גם מעל $\mathfrak{p}_1$. משפטון ו.יב נותן $\sigma \in \mathrm{Aut}(L'/K)$ כך ש $\mathfrak{q}_1'' = \sigma\mathfrak{q}_1'$. נסמן $\mathfrak{q}_2'' = \sigma\mathfrak{q}_1'$ ו $\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}_2'' \cap B$ כדי לקבל ש $\mathfrak{q}_2$ הוא אידאל ראשוני של B המוכל ב $\mathfrak{q}_1$ והמונח מעל $\mathfrak{p}_2$, כנדרש. ∎

לבסוף נראה שחוג הפולינומים מעל תחום שלמות סגור בשלמות סגור אף הוא בשלמות.

למה ו.טו: *יהי A תחום שלמות סגור בשלמות בעל שדה מנות K ו $f,g \in K[X]$ פולינומים מתֻקנים. אם $fg \in A[X]$, אזי $f,g \in A[X]$.*

הוכחה: יהיו $f(X) = \prod_{i=1}^m (X - x_i)$ ו $g(X) = \prod_{j=1}^n (X - y_j)$ הפרוקים של f ושל g למכפלה של גורמים ראשוניים מעל $\tilde{K}$. אזי כל אחד מהאברים x_i ו y_j הוא שרש של הפולינום המתֻקן fg שמקדמיו ב A. מכאן ש x_i, y_j שלמים לכל i ו j. המקדמים של f הם פולינומים עם מקדמים שלמים ב $x_1,\ldots,x_m$ ולכן הם שלמים מעל A. מצד שני מקדמים אלו שיָכים ל K ולכן הם שיָכים גם ל A. באפן דומה מראים ש $g \in A[X]$. ∎

משפטון ו.טז: *יהי A תחום שלמות סגור בשלמות. אזי גם $A[X]$ הנו תחום שלמות סגור בשלמות.*

הוכחה: יהי K שדה המנות של A. אזי $K(X)$ הוא שדה המנות של $A[X]$. הואיל ו $K[X]$ סגור בשלמות, מספיק להראות שכל אבר $f \in K[X]$ שהוא שלם מעל $A[X]$ שיָך ל $A[X]$. ואכן, קיָמים $g_0,\ldots,g_{n-1} \in A[X]$ כך ש $f^n + g_{n-1}f^{n-1} + \cdots + g_0 = 0$. נבחר r טבעי הגדול מ $\deg(f), \deg(g_0), \ldots, \deg(g_{n-1})$ ונסמן $p = f - X^r$. אזי $(p+X^r)^n + g_{n-1}(p+X^r)^{n-1} + \cdots + g_0 = 0$. לכן, קיָמים $h_0,\ldots,h_{n-1} \in A[X]$ כך ש $p^n + h_{n-1}p^{n-1} + \cdots + h_0 = 0$. את השויון האחרון נרשֹם גם בצורה

$$p(p^{n-1} + h_{n-1}p^{n-2} + \cdots + h_1) = -h_0 \tag{2}$$

נראה כל אחד מהגורמים באגף ימין של (2) כפולינום עם מקדמים ב K. בתור שכזה, $deg(p) = r$. מבחירת r נובע לכל i בין 1 ל $n-2$ ש

$$\deg(h_{n-i+1}p^{n-i}) = \deg(h_{n-i+1}) + (n-i)r < r + (n-2)r = \deg(p^{n-1}) \, .$$

לכן, כל אחד מהגורמים באגף ימין של (2) מתֻקן. מלמה ו.טו, נובע שכל אחד מהם שיָך ל $A[X]$. בפרט, $p \in A[X]$ ולכן גם $f \in A[X]$. ∎

ז. חוּגֵי הַעֲרָכָה

הסגור השלם של תחום שלמות A בשדה F המקיף אותו שוה לחתוך כל חוגי ההערכה של F המַקיפים את A (תוצאה ז.ג) משפט האפסים של הלברט (תוצאה ז.ו) הנו תוצאה ממשפט ההרחבה של חוגי הערכה. בסעיף זה נפתח בקצרה את המושג של חוגי הערכה באפן שנוכל להוכיח את שתי התוצאות שהזכרנו.

יהי B תחום שלמות עם שדה מנות K. נאמר ש B הוא **חוג הערכה** (valuation ring) אם לכל $x \in K^\times$, $x \in B$ או $x^{-1} \in B$.

משפטון ז.א: *יהי B חוג הערכה עם שדה מנות K.*

(א) *B הנו חוג מקומי.*

(ב) *אם B' הוא חוג המקיף את B ומוכל ב K, אזי B' הנו חוג הערכה. יתר על כן, האידאל המרבי של B' מוכל באידאל המרבי של B.*

(ג) *B סגור בשלמות.*

הוכחת א: יהי $\mathfrak{m}$ קבוצת כל האברים הלא הפיכים של B. עלינו להראות ש $\mathfrak{m}$ הוא אידאל. קודם כל נראה ש $\mathfrak{m}$ סגור תחת כפל באברי B. ואכן, אם $x \in \mathfrak{m}$ ו $b \in B$ שונים מאפס, אזי $x^{-1} = b(bx)^{-1}$ ולכן, גם $(bx)^{-1} \notin B$. עתה, אם $x, y \in B$ שונים מאפס, נוכל להניח ש $x^{-1}y \in B$. לכן, לפי הטענה שהוכחנו, $x+y = x(1+x^{-1}y) \in \mathfrak{m}$.

הוכחת ג: יהי x אבר של K השלם מעל B. קיָמים אפוא $b_1, \ldots, b_n \in B$ כך ש $x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$. אלו היה $x \notin B$, היה $x^{-1} \in B$ ולכן $x = -(b_1 + \cdots + b_nx^{-(n-1)}) \in B$, סתירה. לכן $x \in B$. ∎

משפט ז.ב (משפט ההרחבה של שֶׁבָלֶה): *יהיו A תחום שלמות, F שדה המַקיף את A, Ω שדה סגור אלגברית ו $\alpha\colon A \to \Omega$ הומומורפיזם. אזי קיָם חוג הערכה B של F המקיף את A והומומורפיזם $\beta\colon B \to \Omega$ המרחיב את α כך ש $\mathrm{Ker}(\beta)$ הנו האידאל המרבי של B.*

הוכחה: נחלק את ההוכחה לכמה חלקים:

חלק א: *הפעלת הלמה של צורן.* נסמן את אֹסף כל הזוגות (A', α') שבהם A' הנו תת חוג של F המקיף את A ו $\alpha'\colon A' \to \Omega$ הנו הומומורפיזם המרחיב את α ב $\mathcal{A}$. הזוג (A, α) שיָך ל $\mathcal{A}$. נסדר את $\mathcal{A}$ באפן חלקי על ידי שנגדיר $(A', \alpha') \le (A'', \alpha'')$ אם $A' \subseteq A''$ ו α'' מרחיב את α'. אחוד של שרשרת ב $\mathcal{A}$ שיָך ל $\mathcal{A}$. לכן, לפי הלמה של צורן, יש ב $\mathcal{A}$ אבר מרבי (B, β).

חלק ב: *B הנו חוג מקומי ו $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(\beta)$ הנו האידאל המרבי של B.* בתור חוג חלקי ל Ω, החוג $\beta(B)$ הוא תחום שלמות. לכן, $\mathrm{Ker}(\beta)$ הנו אידאל ראשוני ו B מוכל בחוג המקומי $B_\mathfrak{m}$. נרחיב את β להומומורפיזם $\beta_\mathfrak{m}\colon B_\mathfrak{m} \to \Omega$ על ידי $\beta_\mathfrak{m}\left(\frac{b}{s}\right) = \frac{\beta(b)}{\beta(s)}$ לכל $b \in B$ ו $s \in B \smallsetminus \mathfrak{m}$. הואיל ו (B, β) מרבי, $B = B_\mathfrak{m}$ ו $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}B_\mathfrak{m}$ הנו האידאל המרבי שלו.

חלק ג: אם $x \in F$, אזי $B[x] \neq \mathfrak{m}[x]$ או $B[x^{-1}] \neq \mathfrak{m}[x^{-1}]$. נעיר ש $\mathfrak{m}[x]$ הוא אסף כל הפולינומים ב x עם מקדמים ב $\mathfrak{m}$ (בפרט $x \notin \mathfrak{m}[x]$). נניח בשלילה ש $B[x] = \mathfrak{m}[x]$ ו $B[x^{-1}] = \mathfrak{m}[x^{-1}]$. אזי קיָמים $a'_0, \ldots, a'_n, a_0, \ldots, a_m \in \mathfrak{m}$ כך ש

$$1 = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \tag{1a}$$

$$1 = a'_0 + a'_1 x^{-1} + \cdots + a'_n x^{-n} \tag{1b}$$

נניח ש m ו n מזעריים עם ההצגה (1). כמו כן נניח ש $n \geq m$. נכפיל את (1b) ב x^m ונעביר את האבר הראשון באגף ימין שמאלה: $(1-a'_0)x^m = a'_1 x^{m-1} + \cdots + a'_n x^{m-n}$. מכך ש $a'_0 \in \mathfrak{m}$, נובע ש $1 - a'_0$ הפיך ב B (כאן אנו משתמשים בכך ש B מקומי). לכן, $x^m = (1-a'_0)^{-1} a'_1 x^{m-1} + \cdots + (1-a'_0)^{-1} x^{m-n}$. אם נציב את הבטוי הזה ל x^m ב (1a) נקבל הצגה סתירה למזעריות של m. סתירה זו גוררת את טענתנו.

חלק ד: *B הנו חוג הערכה של F.* יהי $x \in F^\times$. נניח, לפי חלק ג, ש $\mathfrak{m}[x]$ הוא אידאל נאות של החוג $B[x]$. נבחר אידאל מרבי $\mathfrak{m}'$ של $B[x]$ המקיף את $\mathfrak{m}[x]$. הואיל ו $\mathfrak{m}$ מרבי, $\mathfrak{m}' \cap B = \mathfrak{m}$. נסמן $\bar{K} = \beta(B)$. לכן נִתן להרחיב את β להומומורפיזם β' של $B[x]$ על שדה $\bar{K}[\bar{x}]$ שבו $\bar{x} = \beta'(x)$. אלו היה $\bar{x}$ נעלה מעל $\bar{K}$, לא היה $\bar{K}[\bar{x}]$ שדה. לכן $\bar{x}$ אלגברי מעל $\bar{K}$. הואיל ו $\bar{K} \subseteq \Omega$ ו Ω סגור אלגברית, קיָם שכון־$\bar{K}$ $\gamma'\colon \bar{K}[\bar{x}] \to \Omega$. ההומומורפיזם $\gamma' \circ \beta'\colon B[x] \to \Omega$ מרחיב את β. מהמרביות של (B, β) נובע ש $B[x] = B$ ולכן ש $x \in B$. מכאן נובע ש B הוא חוג הערכה של F. ∎

תוצאה ז.ג: *יהי A תחום שלמות ו F שדה המקיף את A. נסמן ב A' את הסגור השלם של A ב K. אזי A' הנו החתוך של כל חוגי ההערכה של F המקפים את A.*

הוכחה: יהי x אבר של A'. אזי x שלם מעל A ולכן שלם מעל כל חוג הערכה B של F המקיף את A. הואיל ו B סגור בשלמות (משפטון ז.א(ג)), $x \in B$.

להפך, יהי x אבר של F שאינו שלם מעל A. אזי $x \notin A[x^{-1}]$ (אחרת היו קיָמים $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ כך ש $x = a_0 + a_1 x^{-1} + \cdots + a_{n-1} x^{-(n-1)}$. לכן, $x^n = a_0 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}$, בסתירה להנחה). לכן, x^{-1} אינו הפיך ב $A[x^{-1}]$. קיָם אפוא אידאל מרבי $\mathfrak{p}$ של $A[x^{-1}]$ המכיל את x^{-1}. נסמן ב $\tilde{K}$ את הסגור האלגברי של השדה $A[x^{-1}]/\mathfrak{p}$ וב $\alpha\colon A[x^{-1}] \to \tilde{K}$ את העתקת המנה. משפט ז.ב נותן חוג הערכה B של F המקיף את $A[x^{-1}]$ והומומורפיזם $\beta\colon A[x^{-1}] \to \tilde{K}$ המרחיב את α. אלו היה $x \in B$, היינו מקבלים $1 = \beta(1) = \beta(x \cdot x^{-1}) = \beta(x)\beta(x^{-1}) = \beta(x) \cdot 0 = 0$, סתירה. לכן $x \notin B$ ולכן $x \notin A'$. ∎

תוצאה ז.ד: *יהי A תחום שלמות ו B תחום שלמות השלם מעל A. אזי כל הומומורפיזם של A לתוך שדה סגור אלגברית Ω נִתן להרחבה להומומורפיזם של B לתוך Ω.*

הוכחה: יהי $\alpha\colon A \to \Omega$ הומומורפיזם. מההנחה נובע ש B מוכל בסגור השלם A' של A ב $F = \mathrm{Quot}(B)$. משפט ההרחבה של שֶבָלֶה נותן חוג הערכה O של F והומומורפיזם $\gamma\colon O \to \Omega$ המרחיב את α. לפי תוצאה ז.ג, $A' \subseteq O$. לכן, $\beta = \gamma|_B$ הנו הומומורפיזם של B לתוך Ω המרחיב את α. ∎

משפטון ז.ה: *יהיו* $B \supseteq A$ *תחומי שלמות ו* y *אבר שונה מאפס של* B. *נניח ש* B *נוצר סופית (כחוג) מעל* A. *אזי קיָם* $u \in A$, $u \neq 0$, *כך שכל הומומורפיזם* α *של* A *לתוך שדה סגור אלגברית* Ω *המקיֵם* $\alpha(u) \neq 0$ *נִתן להרחבה להומומורפיזם* $\beta\colon B \to \Omega$ *כך ש* $\beta(y) \neq 0$.

הוכחה: אנדוקציה על מספר היוצרים של B מאפשרת להניח ש $B = A[x]$. נבדיל בין שני מקרים:

מקרה א: x *נעלה מעל* A. במקרה זה B הנו חוג הפולינומים ב x מעל A. הואיל ו $y \neq 0$, קיָמים $a_0, \ldots, a_m \in A$ כך ש $y = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$ ו $a_0 \neq 0$. נבחר $u = a_m$. יהי α הומומורפיזם של A לתוך שדה סגור אלגברית Ω כך ש $\alpha(a_m) \neq 0$. הואיל ו Ω אינסופי, קיָם $\bar{x} \in \Omega$ כך ש $\alpha(a_m)\bar{x}^m + \alpha(a_{m-1})\bar{x}^{m-1} + \cdots + \alpha(a_0) \neq 0$. נרחיב את α להומומורפיזם $\beta\colon A[x] \to \Omega$ על ידי שנבחר $\beta(x) = \bar{x}$. בפרט, $\beta(y) = \alpha(a_m)\bar{x}^m + \cdots + \alpha(a_0) \neq 0$.

מקרה ב: x *אלגברי מעל* A. אזי גם y אלגברי מעל A. שני האברים x ו y מקיְמים אפוא משוואות

$$a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0 = 0 \tag{2a}$$

$$b_n y^{-n} + b_{n-1}y^{-n+1} + \cdots + b_0 = 0 \tag{2b}$$

שבהן $a_i, b_j \in A$ ו $u = a_m b_0 \neq 0$. יהי עתה α הומומורפיזם של A לתוך שדה סגור אלגברית Ω כך ש $\alpha(u) \neq 0$. אזי נִתן להרחיב את α להמומורפיזם $\alpha'\colon A[u^{-1}] \to \Omega$ כך ש $\alpha'(u^{-1}) = \alpha(u)^{-1}$. נסמן ב C את הסגור השלם של $A[u^{-1}]$ בשדה המנות של B. תוצאה ז.ד מאפשרת להרחיב את α' להומומורפיזם γ של C לתוך Ω. מ $(2a)$ נובע ש $x \in C$. הפעלת γ על השויון $(2b)$ מראה שאלו היה $\gamma(y) = 0$, היה $\gamma(b_0) \neq 0$, בנִגוד לבחירתנו. לכן, $\gamma(y) \neq 0$. הצמצום β של γ ל $A[x]$ הנו ההומומורפיזם המבֻקש. ∎

נסמן את הסגור האלגברי של שדה K ב $\tilde{K}$.

תוצאה ז.ו (משפט האפסים הַחַלש של הִלברט): *יהי* I *אידאל נאות של חוג הפולינומים* $K[X_1, \ldots, X_n]$ *מעל שדה* K. *אזי קיָמים* $a_1, \ldots, a_n \in \tilde{K}$ *כך ש* $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ *לכל* $f \in I$.

הוכחה: נבחר אידאל מרבי M של $K[X_1, \ldots, X_n]$ המַקיף את I. נסמן $x_i = X_i + M$ אזי $K[x_1, \ldots, x_n]$ הנו תחום שלמות המַקיף את K. יהי $\pi\colon K[X_1, \ldots, X_n] \to K[x_1, \ldots, x_n]$ הומומורפיזם המנה. לפי משפט ז.ה, נתן להרחיב את השִכון $K \to \tilde{K}$ להומומורפיזם $\alpha\colon K[x_1, \ldots, x_n] \to \tilde{K}$. נסמן $a_i = \alpha(x_i)$. אזי $\alpha \circ \pi$

הוא הומומורפיזם של $K[X_1,\dots,X_n]$ המתאפס על M ולכן על I. בפרט, $f(a_1,\dots,a_n)=0$ לכל $f\in I$, כפי שהיה להוכיח. ∎

אפס אלגברי של אידאל I של חוג הפולינומים $K[X_1,\dots,X_n]$ מעל שדה K הנו n־יה $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\tilde{K}^n$ כך ש $f(\mathbf{a})=0$ לכל $f\in I$.

תוצאה ז.ז (משפט האפסים הֶחָזָק של הִלברט): *יהי I אידאל של חוג הפולינומים $K[X_1,\dots,X_n]$ מעל שדה K ויהי $f\in K[X_1,\dots,X_n]$. נניח ש f מתאפס על כל האפסים האלגבריים של I. אזי $f\in\sqrt{I}$. במִלים אחרות, קַיָם מספר טבעי r כך ש $f^r\in I$.*

הוכחה: נסמן $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$ ונתבונן במשתנה נוסף Y. לפי ההנחה אין לאידאל

$$K[\mathbf{X},Y]I+K[\mathbf{X},Y](1-Yf(\mathbf{X}))$$

של $K[\mathbf{X},Y]$ שום אפס אלגברי. לכן, לפי משפט האפסים החלש של הלברט, אידאל זה הוא כל החוג. במלים אחרות, קַיָמים $h(\mathbf{X})\in I$ ו $g_1,g_2\in K[\mathbf{X},Y]$ כך ש

$$g_1(\mathbf{X},Y)h(\mathbf{X})+g_2(\mathbf{X},Y)(1-Yf(\mathbf{X}))=1\ .$$

נציב בשויון זה $Y=\frac{1}{f(\mathbf{X})}$ כדי לקבל $g_1\big(\mathbf{X},\frac{1}{f(\mathbf{X})}\big)h(\mathbf{X})=1$. יהי $r=\deg_Y g_1$ ונכפיל את השויון האחרון ב $f(\mathbf{X})^r$ כדי לקבל, $f(\mathbf{X})^r=\big(f(\mathbf{X})^r g_1(\mathbf{X},\frac{1}{f(\mathbf{X})})\big)h(\mathbf{X})\in I$, כפי שהיה להוכיח. ∎

במקרה הפרטי ש I אידאל ראשוני שוה השרשון של I ל I עצמו:

תוצאה ז.ח: *יהי P אידאל ראשוני של חוג הפולינומים $K[X_1,\dots,X_n]$ מעל שדה K ויהי $f\in K[X_1,\dots,X_n]$. אם f מתאפס על כל האפסים האלגבריים של P, אזי $f\in P$.*

תוצאה ז.ט: *יהי K שדה ו $B=K[x_1,\dots,x_n]$ חוג הנוצר סופית מעל K. אם B הוא שדה, אזי B הנו הרחבה אלגברית סופית של K.*

הוכחה: תוצאה ז.ד נותנת הומומורפיזם־K $\alpha\colon B\to\tilde{K}$. הואיל ו B שדה, α הוא שכון. ∎

ח. חוגי נֶטֶר ומוֹדוּלֵי נטר

החוגים המופיעים בתורת המספרים ובגאומטריה אלגברית מקיְמים תנאי סופיות שונים שמצדם גוררים תכונות רבות נוספות.

משפטון ח.א: *התנאים הבאים על מודול M מעל חוג A שקולים זה לזה:*

(א) *תנאי השרשרת העולה: כל שרשרת עולה של תת מודולים הנה עֲמידה (stationary). במלים אחרות: לכל שרשרת עולה $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$ של תת מודולים קיָם n טבעי כך ש $M_r = M_n$ לכל $r \geq n$.*

(ב) *תנאי הבסיס: כל מודול חלקי של M נוצר סופית.*

(ג) *תנאי המֵרַב (maximum) כל קבוצה לא ריקה $\mathcal{M}$ של מודולים חלקיים מכילה אבר מרבי.*

הוכחת (א) גורר (ב): יהי M_0 תת מודול של M. נניח באנדוקציה שבחרנו כבר אברים $x_1, \ldots, x_n \in M$. אם $\sum_{i=1}^n Ax_i = M_0$ נגדיר $x_{n+1} = x_n$, אחרת נבחר אבר $x_{n+1} \in M_0 \setminus \sum_{i=1}^n Ax_i$. נקבל סדרה עולה של תת מודולים: $Ax_1 \subseteq Ax_1 + Ax_2 \subseteq Ax_1 + Ax_2 + Ax_3 \subseteq \cdots$. לפי ההנחה קיָם n כך ש $\sum_{i=1}^{n+1} Ax_i = \sum_{i=1}^n Ax_i$. בפרט, $x_{n+1} \in \sum_{i=1}^n Ax_i$. לכן, לפי הבניה, $\sum_{i=1}^n Ax_i = M_0$.

הוכחת (ב) גורר (א): נניח בשלילה שאין ב $\mathcal{M}$ מודול מרבי. אזי אפשר לבחור באנדוקציה סדרה עולה ממש של מודולים חלקיים השיָכים ל $\mathcal{M}$, בנגוד ל (ב). ∎

אומרים על מודול־A M שהוא **מודול נֶטֶר** (Noetherian modul) אם הוא מקיֵם את התנאים השקולים של משפטון ח.א. חוג A נקרא **חוג נטר** (Noetherian ring) אם הוא מודול נטר מעל עצמו. הואיל ותת מודול־A של A אינו אלא אידאל, A הוא חוג נטר אם ורק אם הוא מקיֵם את התנאים השקולים הבאים:

(א1) כל סדרה עולה של אידאלים של A עֲמידה.

(א2) כל אידאל של A נוצר סופית.

(א3) בכל קבוצה לא ריקה של אידאלים יש אבר מרבי.

משפטון ח.ב:

(א) *תמונה הומומורפית של מודול (חוג) נטר הנה שוב מודול (חוג) נטר.*

(ב) *אם A הוא חוג נטר ו S קבוצה כפלית ב A, אזי גם $S^{-1}A$ הוא חוג נטר.*

(ג) *מודול (חוג) חלקי של מודול (חוג) נטר הוא שוב מודול (חוג) נטר.*

(ד) *יהי M מודול ו M_0 תת מודול. אם M_0 ו M/M_0 נוצרים סופית, אזי גם M נוצר סופית.*

(ה) *יהי M מודול ו M_0 תת מודול. אם M_0 ו M/M_0 הנם מודולי נטר, גם M הוא מודול נטר.*

הוכחת (ד): יהיו $x_1, \ldots, x_m$ יוצרים של M_0 ו $y_1 + M_0, \ldots, y_n + M_0$ יוצרים ש M/M_0. אזי $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ יוצרים של M.

הוכחת (ה): *יהי M_1 תת מודול. אזי $M_0 \cap M_1$ נוצר סופית, בתור תת מודול של M_0. כמו כן, $(M_0+M_1)/M_0$ נוצר סופית בתור תת מודול של M/M_0. הואיל ו $M_1/(M_0+M_1) \cong (M_0+M_1)/M_0$, גם $M_1/(M_0 \cap M_1)$ נוצר סופית. מכאן נובע, לפי (ג), ש M_1 נוצר סופית.* ∎

תוצאה ח.ג: *יהי A חוג.*

(א) *סכום ישר של מספר סופי של מודולי־A נֶטֵרים הנו מודול נטר.*

(ב) *סכום סופי של תת מודולים נטרים של מודול־A M הנו מודול נטר.*

הוכחת א: יהיו M_1 ו M_2 מודולי נטר. אזי $M_2 \cong (M_1 \oplus M_2)/M_1$. לכן, לפי משפטון ח.ב(ה), $M_1 \oplus M_2$ הוא מודול נטר. אנדוקציה מראה שגם סכום ישר של מספר סופי של מודולי נטר הוא מודול נטר.

הוכחת ב: יהיו $M_1, \ldots, M_n$ תת מודולים נטרים של מודול M. אזי $\sum_{i=1}^n M_i$ הנו תמונה של הסכום הישר $\bigoplus_{i=1}^n M_i$. לפי (א), הסכום הישר הוא מודול נטר. לכן, לפי משפטון ח.ב(א), גם $\sum_{i=1}^n M_i$ הוא מודול נטר. ∎

תוצאה ח.ד: *יהי A מודול נטר. אזי כל מודול־A M נוצר סופית הוא מודול נטר.*

הוכחה: נניח ש M נוצר על ידי n אברים. אזי M הוא תמונה של המודול A^n. לפי תוצאה ח.ג(א), A^n הוא מודול נטר. לכן גם M הוא מודול נטר. ∎

דֻגמאות ח.ה: כל שדה וכל חוג ראשי הנם חוגי נטר. בפרט, $\mathbb{Z}$ ו $K[X]$ הם חוגי נטר. ∎

דֻגמאות נוספות אפשר לקבל מהתוצאה הבאה:

משפט ח.ו (משפט הבסיס של הלברט): *אם A הוא חוג נטר, גם $A[X]$ הנו חוג נטר.*

הוכחה: יהי $\mathfrak{A}$ אידאל של $A[X]$. כדי להוכיח שאידאל זה נוצר סופית נסמן לכל $i \geq 0$ את אסף כל המקדמים העליונים של פולינומים ממעלה i השיָכים ל $\mathfrak{A}$ ב $\mathfrak{a}_i$. אזי $\mathfrak{a}_i$ הוא אידאל. יתר על כן, אם a הוא המקדם העליון של פולינום f ממעלה i השיָך ל $\mathfrak{A}$ אזי $Xf \in \mathfrak{A}$ ממעלה $i+1$ ו a הוא המקדם העליון של Xf. לכן, $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots$. הואיל ו A הנו חוג נטר, קיָם $n \geq 0$ כך ש $\mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}_n$ לכל $r \geq n$. יתר על כן, $\mathfrak{a}_i$ נוצר סופית, נאמר על ידי אברים $a_{i1}, \ldots, a_{i,m(i)}$. לכל i, j נבחר פולינום f_{ij} ממעלה i ב A ש a_{ij} הוא המקדם העליון שלו. נוכיח ש $\{f_{ij} \mid i = 0, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m(i)\}$ יוצרים את $\mathfrak{A}$.

יהי אפוא f פולינום ב $\mathfrak{A}$ ממעלה d ויהי a המקדם העליון שלו. אזי $a \in \mathfrak{a}_d$. אם $d \leq n$, קיָמים $b_1, \ldots, b_{m(d)}$ כך ש $a = \sum_{j=1}^{m(d)} b_j a_{ij}$. לכן, $g = f - \sum_{j=1}^{m(d)} b_j f_{ij}$ הוא פולינום ממעלה קטנה מ d השיָך ל $\mathfrak{A}$. אם $d > n$, אזי $a \in \mathfrak{a}_n$ וקיָמים $c_1, \ldots, c_{m(d)}$ כך ש $a = \sum_{j=1}^{m(n)} c_j a_{nj}$. לכן, $g = f - X^{d-n} \sum_{j=1}^{m(n)} c_j f_{nj}$ הוא פולינום ממעלה קטנה מ d השיָך ל $\mathfrak{A}$. בשני המקרים נוכל להסיק מהנחת אנדוקציה ש g הוא צרוף לינארי של ה f_{ij}־ים עם $i \leq n$. לכן, גם f הוא צרוף של אותם ה f_{ij}־ים. ∎

תוצאה ח.ז: *יהי A חוג נטר. אזי כל חוג $B = A[x_1, \dots, x_n]$ הנוצר סופית (כחוג) מעל A הוא חוג נטר.*

הוכחה: באנדוקציה על מספר המשתנים נובע ש $A[X_1, \dots, X_n]$ הוא חוג נטר. הואיל ו B הוא מנה של $A[X_1, \dots, X_n]$ גם B הוא חוג נטר. ∎

תוצאה ח.ז יחד עם משפטון ח.ב(ב) גוררת שכל החוגים הרגילים המופיעים בגאומטריה האלגברית הנם חוגי נטר. התוצאה הבאה תראה שהחוגים המופיעים בתורת המספרים האלגברית הנם חוגי נטר.

משפטון ח.ח: *יהיו A תחום שלמות של נטר הסגור בשלמות, K שדה המנות שלו ו L הרחבה סופית פרידה של K. נסמן ב B את הסגור השלם של A ב L.*

(א) *B הנו מודול־A נוצר סופית. בפרט B הוא חוג נטר.*

(ב) *נניח ש $A = \mathbb{Z}$ ו $n = [L : K]$. אזי B הנו מודול־$\mathbb{Z}$ חפשי (כלומר חבורה אבלית חפשית) מדרגה n.*

הוכחת א: יהי $w_1, \dots, w_n$ בסיס ל L/K. כפל של $w_1, \dots, w_n$ באבר מתאים של A, מאפשר להניח ש $w_1, \dots, w_n$ שלמים מעל A. יהיו $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ שִכּוּני־K השונים של L לתוך K_s. אזי גם $\sigma_i w_k$ שלמים מעל A ו $d = \det(\sigma_j w_k)_{1 \le j,k \le n} \neq 0$ [Lang, Algebra, 3rd Edition, p. 284]. בפרט d שלם מעל A. נסמן ב $\hat{L}$ את סגור גלואה של L/K. לכל $\sigma \in \mathrm{Gal}(\hat{L}/K)$ ה n־יה $(\sigma\sigma_1, \dots, \sigma\sigma_n)$ הנה תמורה של $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ המשרה תמורה של שורות המטריצה $(\sigma_j w_k)_{1 \le j,k \le n}$. לכן, $\sigma d = \pm d$ ולכן $\sigma d^2 = d^2$. מכאן נובע ש $d^2 \in K$.

כל אבר $b \in B$ נתן להצגה בצורה $b = \sum_{k=1}^n a_k w_k$ עם $a_k \in K$. לכן, $\sigma_j b = \sum_{k=1}^n a_k \sigma_j w_k$, $j = 1, \dots, n$. מכלל קְרֶמֶר נובע ש $a_k = d^{-1} c_k$ באשר c_k שיכים לחוג $A[\sigma_j a, \sigma_j w_k]_{1 \le j,k \le n}$. בפרט c_k שלמים מעל A. לכן גם האברים dc_k שלמים מעל A. בנוסף $dc_k = d^2 a_k$ ואגף ימין שיך ל K. הואיל ו A סגור בשלמות, $dc_k \in A$. לכן, $b = \sum_{k=1}^n dc_k \cdot d^{-2} w_k \in \sum_{k=1}^n A d^{-2} w_k$ מכאן נובע ש $B \subseteq \sum_{k=1}^n A d^{-2} w_k$. הואיל ו A הנו מודול נטר, אגף ימין של ההכלה האחרונה הנו מודול נטר. לכן B נוצר סופית כמודול־A ולכן גם כחוג מעל A. מתוצאה ח.ז נובע ש B הנו חוג נטר.

הוכחת ב: מהוכחת (א) עולה ש B הנו תת חבורה של החבורה החִלופית החפשית $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} d^{-1} w_i$. לכן, B הנו חבורה חלופית חפשית מדרגה שאינה עולה על n. מצד שני מקיפה B את החבורה החלופית החפשית $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} w_i$ מדרגה n. לכן דרגת B שוה ל n. ∎

ט. על חוגי נטר מֻשלמים

בִּיָצאנו ממשפט הבסיס של הלברט, נוכיח בסעיף זה את למת ארטין־ריס ונסיק ממנה את התוצאה הבאה: [Zar]: אם $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ הם אידאלים של חוג נטר A ו A מֻשלם ביחס לטופולוגית־$\mathfrak{a}$, אזי A מֻשלם גם ביחס לטופולוגית־$\mathfrak{b}$.

סִדרה $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$ של תת מודולים של A תִקרא **סִנון־$\mathfrak{a}$** של M אם $\mathfrak{a}M_n \subseteq M_{n+1}$ לכל n. אנדוקציה על k מראה שבמקרה זה $\mathfrak{a}^k M_n \subseteq M_{n+k}$ לכל k ו n.

דֻגמה לסִנון־$\mathfrak{a}$ של M הנה הסדרה $M = \mathfrak{a}^0 M \supseteq \mathfrak{a}M \supseteq \mathfrak{a}^2 M \supseteq \mathfrak{a}^3 M \supseteq \cdots$ בפרט, במקרה שבו $M = A$ מהוה סדרת האידאלים $A \supseteq \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}^2 \supseteq \mathfrak{a}^3 \supseteq \cdots$ סִנון־$\mathfrak{a}$ של A. על בסיס סדרה זו נבנה את החוג (המדֻרג) $A^* = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathfrak{a}^n$. כל אבר של A^* הנו סדרה $a^* = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ שבה $a_n \in \mathfrak{a}^n$ לכל n ו $a_n = 0$ לכל n גדול דיו. החבור ב A^* מֻגדר לפי מרכיבים. הכפל $a^* b^* = c^*$ מֻגדר כמו בכפל של פולינומים על ידי הכלל $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$. נשכן את A לתוך A^* על ידי שנתאים לכל אבר a של A את האבר $a^{(0)} = (a, 0, 0, \ldots)$ של A^*. באפן כללי, נסמן ב $a^{(n)}$ את האבר של A^* שבמקום ה n־י שלו עומד a ובכל מקום אחר עומד 0.

במקביל נהפך את הסכום הישר $M^* = \bigoplus_{n=0}^\infty M_n$ למודול־A^* (מדֻרג) . אבר של M^* יהיה סדרה $z^* = (z_0, z_1, z_2, \ldots)$ שהמרכיב ה n־י שלה שַיָך ל M_n וכמעט כל המרכיבים שוים לאפס. שוב, החבור מֻגדר על ידי מרכיבים ואלו המרכיב ה n־י של המכפלה $a^* z^*$ יהיה $\sum_{i=0}^n a_i z_{n-i}$. נשכן את M לתוך M^* על ידי שנתאים לאבר y של M את האבר $y^{(0)} = (y, 0, 0, \ldots)$ של M^*.

למה ט.א: *יהיו A חוג נטר, ו $\mathfrak{a}$ אידאל של A, אזי A^* הנו חוג נטר.*

הוכחה: יהיו $x_1, \ldots, x_r$ יוצרים של $\mathfrak{a}$. אזי לכל n טבעי אֹסף המונומים ב $x_1, \ldots, x_r$ ממעלה n יוצר את $\mathfrak{a}^n$. כל $a \in \mathfrak{a}^n$ נִתן אפוא להצגה בצורה $a = \sum a_{\mathbf{i}} x_1^{i_1} \cdots x_r^{i_r}$, באשר $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r)$ עובר על כל ה r־יות של מספרים שלמים אי שליליים המקיְמים $i_1 + \cdots + i_r = n$ ולכל $\mathbf{i}$ כזה $\mathbf{a}_i \in A$. לכן $a^{(n)} = \sum_{\mathbf{i}} a_{\mathbf{i}} (x_1^{(1)})^{i_1} \cdots (x_r^{(1)})^{i_r}$. כל אבר של A^* הנו סכום של אברים מהצורה $a^{(n)}$ עם $a \in A$. לכן $A^* = A[x_1^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}]$. לכן ההעתקה $\alpha\colon A[X_1, \ldots, X_n] \to A^*$ המֻגדרת על ידי $\alpha(a) = a^{(0)}$ ו $\alpha(X_i) = x_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, r$, הנם אפימורפיזם. לפי משפט הבסיס של הלברט, $A[X_1, \ldots, X_n]$ הנו נטרי. לכן, גם A^* נטרי. ∎

למה ט.ב: *יהיו A חוג, $\mathfrak{a}$ אידאל ו M מודול־A נוצר סופית. נסמן $A^* = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathfrak{a}^n$ ו $M^* = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathfrak{a}^n M$. אזי M^* הנו מודול־A^* נוצר סופית. בפרט, אם A הוא חוג נטר, M^* הנו מודול־A^* נטר.*

הוכחה: יהיו $y_1, \ldots, y_s$ יוצרים של M. נוכיח ש $y_1^*, \ldots, y_s^*$ יוצרים את $M^* = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathfrak{a}^n M$ מעל A^*. ואכן M^* נוצר על ידי כל האברים מהצורה $z^* = (0, \ldots, 0, ay, 0, \ldots)$ עם אפסים בכל מרכיב פרט למרכיב ה n־י שבו עומדת מכפלה של אבר $a \in \mathfrak{a}^n$ באבר $y \in M$. לפי ההנחה קיָמים $b_1, \ldots, b_s \in A$ כך ש $y = \sum_{i=1}^s b_i y_i$.

נסמן ב a' את האבר של A^* שבכל מרכיב פרט למרכיב ה n־י עומד בו 0 ואלו במרכיב ה n־י עומד a. אזי, בסימונים דלעיל, $z^* = \sum_{i=1}^s a'b_i^*y_i^*$.

אם A הוא חוג נטר, אזי A^* הוא נטר (למה ט.א). לכן, לפי הפסקה הקודמת, M^* הנו מודול נטר (תוצאה ח.ד). ∎

משפט ט.ג (למת ארטין־ריס): *יהיו A חוג נטר, $\mathfrak{a}$ אידאל של A, M מודול־A נוצר סופית ו N תת מודול. אזי קיָם מספר טבעי n כך ש $\mathfrak{a}^{k+n}M \cap N = \mathfrak{a}^k(\mathfrak{a}^nM \cap N)$ לכל $k \geq 0$.*

הוכחה: לכל n טבעי נתבונן עתה בסִנון־$\mathfrak{a}$ הבא של N

$$N = N \supseteq \mathfrak{a}M \cap N \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}^nM \cap N \supseteq \mathfrak{a}(\mathfrak{a}^nM \cap N) \supseteq \mathfrak{a}^2(\mathfrak{a}^nM \cap N) \supseteq \cdots$$

ונבנה את מודול־A^* המתאים:

$$.N_n^* = N \oplus (\mathfrak{a}M \cap N) \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{a}^nM \cap N) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i(\mathfrak{a}^nM \cap N)$$

אזי N_n^* הנו תת מודול של M^*. בנוסף על זה, $N_n^* \subseteq N_{n+1}^*$ לכל n. הואיל ו M^* הנו מודול נטר (למה ט.ב), קיָם n טבעי כך ש $N_n^* = N_{k+n}^*$ לכל $k \geq 0$. השואה של המרכיבים ה $(k+n)$־ים של שני המודולים נותנת $\mathfrak{a}^k(\mathfrak{a}^nM \cap N) = \mathfrak{a}^{k+n}M \cap N$, כפי שהיה להוכיח. ∎

מסקנה ט.ד: *יהיו A חוג נטר, $\mathfrak{a}$ אידאל של A ו M מודול־A נוצר סופית. נסמן $N = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^nM$. אזי $\mathfrak{a}N = N$. אם בנוסף, $\mathfrak{a}$ מוכל בשָרשון יעקבוסון של A, אזי $N = 0$.*

הוכחה: למת ארטין־ריס נותנת n טבעי כך ש

$$.\mathfrak{a}^{1+n}M \cap N = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}^nM \cap N) \tag{1}$$

הואיל ו $N \subseteq \mathfrak{a}^{1+n}M$ ו $N \subseteq \mathfrak{a}^nM$, שוה האגף השמאלי של (1) ל N ואִלו האגף הימָני שלו שוה ל $\mathfrak{a}N$. לכן $N = \mathfrak{a}N$. אם $\mathfrak{a}$ מוכל בשרשון יעקבסון, נובע מהלמה של נקימה ש $N = 0$. ∎

המקרה הפרטי של מסקנה ט.ד שבו A תחום שלמות ו $M = \mathfrak{a}$ נותן את למת קרול:

מסקנה ט.ה (למת קרול): *יהי A תחום שלמות נטרי ו $\mathfrak{a}$ אידאל נאות של A. אזי $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$.*

הוכחה: נסמן $\mathfrak{b} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n$. לפי מסקנה ט.ד, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$. יהיו $b_1, \ldots, b_n$ יוצרים של $\mathfrak{b}$. מהטענה שהוכחנו נובע שלכל b_i קיָמים $a_{ij} \in \mathfrak{a}$ כך ש $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_j$. לכן, $C\mathbf{b} = 0$, באשר $C = (a_{ij} - \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ ו $\mathbf{b}$ הנו העמודה מגֹבה n שהמרכיב ה k־י שלה הוא b_k. אם נכפיל את השויון האחרון משמאל במטריצה המצֹרפת ל C,

נקבל $\det(C)b_k = 0$, $k = 1, \dots, n$. מכאן שקיָם $a \in \mathfrak{a}$ כך ש $(a-1)b_k = 0$ לכל k. הואיל ו $\mathfrak{a}$ נאות, $a - 1 \neq 0$. הואיל ו A תחום שלמות, $b_k = 0$ לכל k. לכן, $M = 0$, כמו שהיה להוכיח. ∎

יהי אפוא A חוג נטר, $\mathfrak{a}$ אידאל של A ו M מודול־A. **בסיס לסביבות־**0 **של טפוולוגית־**$\mathfrak{a}$ **של** M הנו אסף תת הקבוצות $\{\mathfrak{a}^n M\}_{n=1,2,3\dots}$ של M. בסיס לסביבות הפתוחות של אבר x של M יהיו אפוא הקבוצות $\{x + \mathfrak{a}^n M\}_{n=1,2,3,\dots}$. לכן, תנאי הכרחי ומספיק לכך שתת קבוצה N של M תהיה סגורה בטופולוגית־$\mathfrak{a}$ הוא ש $N = \bigcap_{n=1}^{\infty}(N + \mathfrak{a}^n M)$.

סִדרה $x_1, x_2, x_3, \dots$ של אברים של M נקראת **סדרת קושי** בטופולגית־$\mathfrak{a}$ אם לכל m טבעי קיָם n_0 כך שלכל $n, n' \geq n_0$ מתקיֵם $x_{n'} - x_n \in \mathfrak{a}^m M$, לחלופין $x_{n+1} - x_n \in \mathfrak{a}^m M$. (ואכן, מהתנאי האחרון נובע שאם $n' \geq n$, אזי $x_{n'} - x_n = (x_{n'} - x_{n'-1}) + \dots + (x_{n+1} - x_n) \in \mathfrak{a}^m M$.) החוג M **מְשלם** (complete) בטופולוגית־$\mathfrak{a}$ אם כל סדרת קושי שלו $x_1, x_2, x_3, \dots$ מתכנסת לאבר x של M. כלומר, לכל m טבעי, קים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיֵם $x_n - x \in \mathfrak{a}^m M$. טור $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ של אברים של M מתכנס, אם סדרת הסכומים החלקיים שלו $\sum_{i=1}^{n} x_i$ מתכנסת. הואיל ו $\sum_{i=1}^{n+1} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i = x_{n+1}$, נובע שאם M מְשלם, אזי הטור מתכנס אם ורק אם $x_i \to 0$.

למושג של התכנסות סדרה לאבר יש טעם רק אם $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = 0$. במקרה זה, אם סדרה $x_1, x_2, x_3, \dots$ מתכנסת, גבולה נקבע באפן יחיד. ואכן, אם x ו x' הם שני גבולות, אזי $x - x' \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = 0$ ולכן $x = x'$. במקרה ש $A = M$ ו $\mathfrak{a}$ מוכל בשרשון יעקבסון של A או ש A הנו תחום שלמות נטרי, אזי $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$ ולכן אם קיָם לסדרה ב A גבול, הוא יחיד.

למה ט.ו: *יהיו A חוג נטר ו $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ אידאלים של A. נניח ש A מְשלם בטופולוגית־ $\mathfrak{a}$ ו $\mathfrak{a}$ מוכל בשרשון יעקבסון של A. אזי $\mathfrak{b}$ סגור בטופולוגית־ $\mathfrak{a}$.*

הוכחה: נסמן $M = A/\mathfrak{b}$ ו $N = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n M$. אזי M הנו מודול־A הנוצר על ידי אבר אחד (והוא $1 + \mathfrak{b}$). לפי למה ט.ד, $N = 0$. לכן, $\mathfrak{b} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n + \mathfrak{b})$. במלים אחרות, $\mathfrak{b}$ סגור בטופולוגית־$\mathfrak{a}$. ∎

למה ט.ז: *יהי A חוג נטר ויהיו $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ אידאלים של A. נניח ש A מְשלם ביחס לטופולוגית־ $\mathfrak{a}$ ו $\mathfrak{a}$ מוכל בשרשון יעקבסון של A. אזי A מְשלם גם ביחס לטופולוגית־ $\mathfrak{b}$.*

הוכחה: תהי $x_1, x_2, x_3, \dots$ סדרת קושי ב A בטופולוגית־$\mathfrak{b}$. אזי

$$x_j - x_i \in \mathfrak{b}^{m(i)} \tag{2}$$

לכל $i \geq j$ ו $m(i)$ שואף לאינסוף כאשר i שואף לאינסוף. הואיל ו $\mathfrak{b}^{m(i)} \subseteq \mathfrak{a}^{m(i)}$, הסדרה $x_1, x_2, x_3, \dots$ הנה קושי גם בטופולוגית־$\mathfrak{a}$. לפי ההנחה היא מתכנסת לאבר x של A בטופולוגית־$\mathfrak{a}$. במלים אחרות,

$$x_j - x \in \mathfrak{a}^{n(j)} \tag{3}$$

ו $n(j)$ שואף לאינסוף כאשר j שואף לאינסוף. לפי מסקנה ט.ו, האידאל $\mathfrak{b}^{m(i)}$ סגור בטופולוגית־$\mathfrak{a}$. לכן, לפי (1) ו (3)

$$.x_i - x \in \bigcap_{j \geq i} (\mathfrak{a}^{n(j)} + \mathfrak{b}^{m(i)}) = \mathfrak{b}^{m(i)}$$

מכאן נובע ש x_i שואף ל x בטופולוגית־$\mathfrak{b}$, כנדרש. ∎

למה ט.ח: *יהי A תחום נטר מֻשלם ביחס לאידאל נאות $\mathfrak{a}$. אזי $\mathfrak{a}$ מוכל בשרשון יעקבסון של A.*

הוכחה: אלו $\mathfrak{a}$ לא היה מוכל בשרשון יעקבסון של A היה קַיָם ל A אידאל מרבי $\mathfrak{m}$ שאינו מַקיף את $\mathfrak{a}$ ולכן $A = \mathfrak{a} + \mathfrak{m}$. היו קַיָמים אפוא $a \in \mathfrak{a}$ ו $m \in \mathfrak{m}$ כך ש $a + m = 1$. לכן, $m = 1 - a$ אינו הפיך. מצד שני, נובע מהשלמות של A שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ מִתכנס ב A ולכן מהוה את ההפוך של $1 - a$ (כאן אנו משתמשים בלמת קרול האומרת ש $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$). מסתירה זו נובע שאכן, $\mathfrak{a}$ מוכל בשרשון יעקבסון של A. ∎

השִלוב של למה ט.ז ולמה ט.ח נותן את התוצאה הבאה:

משפט ט.ט: *יהי A תחום נטר ו $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ אידאלים נאותים שלו. אם A מֻשלם ביחס ל $\mathfrak{a}$, אזי A מֻשלם גם ביחס ל $\mathfrak{b}$.*

נזכיר שחוג מקומי A עם אידאל מרבי $\mathfrak{m}$ מכֻנה **מֻשלם** אם A מֻשלם ביחס לטופולוגית־$\mathfrak{m}$. התוצאה הבאה היא אפוא מקרה פרטי של משפט ט.ז:

תוצאה ט.י: *יהי A חוג נטר מקומי מֻשלם. אזי A מֻשלם־$\mathfrak{a}$ ביחס לכל אידאל נאות שלו $\mathfrak{a}$.*

הוכחה: אם $\mathfrak{a}$ הנו אידאל נאות של A, אזי הוא מוכל באידאל המרבי $\mathfrak{m}$ של A. האידאל $\mathfrak{m}$ הנו גם שרשון יעקבסון של A. לפי ההנחה, A מֻשלם ביחס ל $\mathfrak{m}$. לכן, לפי למה ט.ו, A מֻשלם גם ביחס ל $\mathfrak{a}$. ∎

י. אידאלים מקדימים

תחליף חלש בחוג נטר לפרוק חד ערכי בחוג בעל פריקות חד ערכי הנו ההצגה של כל אידאל כחתוך של אידאלים מקדימים וסופיות מספר האידאלים הראשוניים המזעריים המקיפים אידאל נתון.

יהי $\mathfrak{a}$ אידאל בחוג A. נאמר ש $\mathfrak{a}$ **אי פריק** (irreducible) אם $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ גורר ש $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ או $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$. בפרט, כל אידאל ראשוני של A אי פריק (משפטון א.יג(ג)).

למה י.א: *בחוג נטר A כל אידאל נאות הנו חתוך של מספר סופי של אידאלים אי פריקים.*

הוכחה: נסמן ב $\mathcal{A}$ את קבוצה כל האידאלים הנאותים של A שאינם חתוך של מספר סופי של אידאלים אי פריקים. נניח בשלילה ש $\mathcal{A}$ אינה ריקה. הואיל ו A הנו חוג נטר, קים ב $\mathcal{A}$ אבר מֵרַבִּי $\mathfrak{a}$. בפרט $\mathfrak{a}$ פריק ולכן קָיָמים אידאלים $\mathfrak{b}$ ו $\mathfrak{c}$ המַקיפים ממש את $\mathfrak{a}$ כך ש $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{b}$. מהמרביות של $\mathfrak{a}$ נובע ש $\mathfrak{b}$ ו $\mathfrak{c}$ הם חתוכים סופיים של אידאלים אי פריקים. לכן גם $\mathfrak{a}$ הוא חתוך סופי של אידאלים אי פריקים, בסתירה לכך ש $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$. מסתירה זו נסיק ש $\mathcal{A}$ ריקה.
∎

אידאל נאות $\mathfrak{q}$ של חוג A מכֻנֶה **מֻקְדִים** (primary) אם $\mathfrak{q} \neq A$ ו $xy \in \mathfrak{q}$ גורר ש $x \in \mathfrak{q}$ או שקָיָם n טבעי $y^n \in \mathfrak{q}$. לחִלופין, $A/\mathfrak{q} \neq 0$ וכל מחלק אפס של $A/\mathfrak{q}$ הנו אפיסי. נעיר כי השרשון $\sqrt{\mathfrak{q}}$ של אידאל מקדים הנו אידאל ראשוני. ואכן, אם $xy \in \sqrt{\mathfrak{q}}$ ו $x \notin \sqrt{\mathfrak{q}}$, אזי $x \notin \mathfrak{q}$ ולכן קיָם n טבעי כך ש $y^n \in \mathfrak{q}$ כלומר $y \in \mathfrak{q}$. הטענה ההפוכה אינה נכונה: קיָמים אידאלים $\mathfrak{q}$ שאינם מקדימים אולם ששרשוניהם ראשוניים (ראה תרגיל 23). אם S היא קבוצה כפלית של A הזרה ל $\mathfrak{q}$, אזי $S^{-1}\mathfrak{q}$ הוא אידאל מקדים ואם $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ אזי $S^{-1}\mathfrak{p} = \sqrt{S^{-1}\mathfrak{q}}$.

דֻגמה י.ב: חזקה של אידאל ראשוני שאינה אידאל מקדים. יהי K שדה, $R = K[X, Y, Z]$ חוג הפולינומים במשתנים X, Y, Z ו $A = R/R(XY - Z^2)$. נסמן ב x, y, z את התמונות של האברים X, Y, Z תחת העתקת המנה $R \to A$. אזי $A = K[x, y, z]$ ו $xy = z^2$. האידאל $\mathfrak{p} = Ax + Az$ ראשוני, כי $A/\mathfrak{p} \cong R/RX + RZ \cong K[Y]$ הנו תחום שלמות. יתר על כן, $xy = z^2 \in \mathfrak{p}^2$. מצד שני, $x \notin \mathfrak{p}^2$, אחרת קיָמים פולינומים $f, g, h, j \in K[X, Y, Z]$ כך ש $X = f(X,Y,Z)X^2 + g(X,Y,Z)XY + h(X,Y,Z)Y^2 + j(X,Y,Z)(XY - Z^2)$. שויון זה לא יתכן, כי מעלת אגף שמאל שלו הנה 1 בעוד שמעלת אגף ימין הנה 2. בנוסף נובע באיזומורפיזם $A/\mathfrak{p} \cong K[Y]$ עובר y ל Y ולכן $y \notin \mathfrak{p}$. מכאן ש $y^n \notin \mathfrak{p}^2$ לכל n טבעי. מכל זה נובע ש $\mathfrak{p}^2$ אינו אידאל מקדים.
∎

הַמְאַפֵּס (annihalator) של אידאל $\mathfrak{a}$ של חוג A מֻגדר כאסף כל האברים $x \in A$ כך ש $x\mathfrak{a} = 0$. זהו כמובן אידאל של A.

משפטון י.ג: *כל אידאל אי פריק ונאות $\mathfrak{a}$ של חוג נטר A הנו מקדים.*

הוכחה: נעבֹר לחוג $A/\mathfrak{a}$ כדי להניח ש $A \neq 0$ וש $\mathfrak{a} = 0$. עלינו להוכיח שכל מחלק אפס x של A אֲפיסי. ואכן, יהי

$y \in A$ כך ש $y \neq 0$ ו $xy = 0$. נתבונן בסִדרת האידאלים $\mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathrm{Ann}(x^2) \subseteq \mathrm{Ann}(x^3) \subseteq \cdots$. הואיל ו A נוטרי, קיָם n טבעי כך ש $\mathrm{Ann}(x^n) = \mathrm{Ann}(x^{n+1})$.

טענה: $Ax^n \cap Ay = 0$. ואכן, יהי $z \in Ax^n \cap Ay$. אזי קיָמים $a_1, a_2 \in A$ כך ש $z = a_1x^n$ ו $z = a_2y$. לכן, $a_1x^{n+1} = zx = a_2xy = 0$. מכאן ש $a_1 \in \mathrm{Ann}(x^{n+1})$ ולכן $a_1 \in \mathrm{Ann}(x^n)$. במלים אחרות, $z = a_1x^n = 0$, כַּנטען.

הואיל ו 0 אי פריק ו $Ay \neq 0$, נקבל ש $Ax^n = 0$. במלים אחרות, $x^n = 0$ ולכן x אפיסי. ∎

נצָרף את המשפטונים י.א ו י.ג:

משפטון י.ד: *בחוג נוטר A כל אידאל נאות הנו חתוך של מספר סופי של אידאלים מקדימים.*

יהי $\mathfrak{a}$ אידאל בחוג A. על אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ של A נאמר שהוא **שיָך** (belongs) ל $\mathfrak{a}$ (או גם שהוא **אידאל מזערי של** $\mathfrak{a}$) אם הוא מזערי בין קבוצת האידאלים הראשוניים המַקיפים את $\mathfrak{a}$.

משפטון י.ה: *יהי $\mathfrak{a}$ אידאל בחוג נוטר A. אזי רק מספר סופי של אידאלים ראשוניים של A שיָכים ל $\mathfrak{a}$.*

הוכחה: נרשֹם את $\mathfrak{a}$ כחתוך $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}$ של אידאלים מקדימים. לכל i, $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ הנו אידאל ראשוני. אם אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ מַקיף את $\mathfrak{a}$, אזי קיָם i כך ש $\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}$ (משפטון א.יג(ב)). לכן $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$ (משפטון א.ח). האידאלים הראשוניים השיָכים ל $\mathfrak{a}$ הנם אפוא האברים המזעריים בקבוצה הסופית $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. ∎

נִתן למשפטון י.ה פרוש גאומטרי: יהי $\mathfrak{a}$ אידאל בחוג נוטר A ויהיו $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ האידאלים הראשוניים השיָכים ל $\mathfrak{a}$ (מספרם סופי לפי משפטון י.ה). כל אידאל ראשוני של A המַקיף את $\mathfrak{a}$, מַקיף אחד מה $\mathfrak{p}_i$־ים. לכן, $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{p}_m)$. מצד שני אף אחד מה $\mathfrak{p}_i$־ים אינו מקיף את האחר. לכן, ה $V(\mathfrak{p}_i)$־ים הם המרכיבים האי פריקים של $V(\mathfrak{a})$ (משפטון ב.ה(ד)).

הצגה של אידאל $\mathfrak{a}$ כחתוך של אידאלין מקדימים תִקרא **הצגה מקדימה**. הצגה מקדימה $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ תכֻנה **מצֻמצמת** אם

(א) אי אפשר להשמיט שום $\mathfrak{q}_i$.

(ב) האידאלים הראשוניים $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ השיָכים ל $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ שונים זה מזה.

למה י.ו: *יהיו $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ אידאלים מקדימים של חוג A בעלי שרשון משֻתף $\mathfrak{p}$. אזי גם $\bigcap_{i=1}^m \mathfrak{q}_i$ הנו אידאל מקדים ושרשונו שוה ל $\mathfrak{p}$.*

הוכחה: יהיו x, y אברים של A המקיְמים $xy \in \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{q}_i$ ו $x \notin \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{q}_i$. אזי קיָם j כך ש $x \notin \mathfrak{q}_j$. הואיל ו $\mathfrak{q}_j$ מקדים, קיָם n טבעי כך ש $y^n \in \mathfrak{p}$. הואיל ו $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ קיָם r_i טבעי, כך ש $y^{nr_i} \in \mathfrak{q}_i$. נסמן $r = \max_{1 \le i \le m} r_i$. אזי $y^{nr} \in \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{q}_i$. לכן, $\bigcap_{i=1}^m \mathfrak{q}_i$ מקדים.

יהי עתה $\mathfrak{p}'$ אידאל ראשוני של A המַקיף את $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$. אזי $\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_n \subseteq \mathfrak{p}'$. לפי משפטון א.יג קיָם j כך ש $\mathfrak{q}_j \subseteq \mathfrak{p}'$. הואיל ו $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}_j}$ מתקיֵם $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$. מכאן נובע ש $\mathfrak{p} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^m \mathfrak{q}_i}$. ∎

למה י.ז: *לכל אידאל $\mathfrak{a}$ בחוג נטר A יש הצגה מקדימה מצֻמצמת.*

הוכחה: לפי משפטון י.ד יש ל $\mathfrak{a}$ הצגה מקדימה $\mathfrak{q} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{q}_i$. נגדיר יחס שקילות על I: שני אנדקסים i, j יהיו שקולים זה לזה אם $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \sqrt{\mathfrak{q}_j}$. יהי $I = \dot\bigcup_{j\in J} I_j$ ההצגה של I כאחוד זר של מחלקות השקילות. לכל $j \in J$ האידאל $\mathfrak{q}'_j = \bigcap_{i\in I_j} \mathfrak{q}_i$ מקדים (למה י.ו). יתר על כן, אם $j \neq j'$, אזי $\sqrt{\mathfrak{q}'_j} \neq \sqrt{\mathfrak{q}'_{j'}}$. אם מההצגה המקדימה $\mathfrak{q} = \bigcap_{j\in J} \mathfrak{q}'_j$ עדין אינה מצֻמצמת, אפשר להשמיט ממנה אידאל מקדים אחד ולהשאר עם הצגה מקדימה קצרה יותר. אחרי מספר סופי של השמטות כאלו, נגיע להצגה מקדימה מצֻמצמת של $\mathfrak{a}$. ∎

שדה מספרים הנו הרחבה סופית K של $\mathbb{Q}$. נסמן את הסגור השלם של $\mathbb{Z}$ ב K ב O_K. בדרך כלל אין ב O_K פריקות חד ערכית. אולם כל אידאל של O_K נִתן להצגה באפן חד ערכי כמכפלה של אידאלים ראשוניים. משפט זה הנו נקֻדת המוצא של תורת המספרים האלגבריים. באפן כללי יותר יש לכל אידאל של "חוג דדקינד" הצגה חד ערכית כמכפלה של אידאלים ראשוניים, כפי שנלמד בסעיף זה.

למה יא.א: *יהי A תחום שלמות של נטר שבו כל אידאל ראשוני שונה מאפס מרבי. אזי כל אידאל שונה מאפס $\mathfrak{a}$ נִתן להצגה יחידה כמכפלה של אידאלים מקדימים זרים זה לזה.*

הוכחת קיום: אם $A = \mathfrak{a}$, אזי $\mathfrak{a}$ הנו מכפלה של קבוצה ריקה של אידאלים מקדימים. נניח אפוא ש $\mathfrak{a} \neq A$. תהי $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{q}_i$ הצגה מקדימה מצֻמצמת של $\mathfrak{q}$ (משפטון י.ז). לכל i, הרדיקל $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ הוא אידאל ראשוני שונה מאפס (כי $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}_i$) ולכן מְרַבִּי. יתר על כן, האידאלים $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ שונים זה מזה ולכן זרים זה לזה. לפי תרגיל 5, האידאלים $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ זרים זה לזה. לפי משפטון א.יא(א), $\bigcap_{i=1}^m \mathfrak{q}_i = \prod_{i=1}^m \mathfrak{q}_i$. לכן, $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^m \mathfrak{q}_i$.

הוכחת יחידות: יהי $\mathfrak{p}$ אידאל מרבי של A השיך לאידאל מקדים $\mathfrak{q}$ המופיע בהצגה של $\mathfrak{a}$ כמכפלה של אידאלים מקדימים זרים זה לזה. אזי $\prod_{i=1}^m \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. לכן, לפי משפטון א.יג(ב), $\mathfrak{p}$ מקיף אחד מהנחתכים באגף ימין, למשל $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{p}$. לכן, $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}$. הואיל ושני האידאלים הללו מרביים, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$.

אם $\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}$ עבור איזה שהוא $1 \leq i \leq n$, אזי $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$ ולכן, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$, כלומר $i = 1$. לפי משפטון ה.ט, $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p} = \prod_{i=1}^n \mathfrak{q}_i A_\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 A_\mathfrak{p}$. לכן, $A \cap \mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}_1} = A \cap \mathfrak{q}_1 A_{\mathfrak{p}_1} = \mathfrak{q}_1$. מכאן שגם האידאלים הקדומים $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ נקבעים באפן יחיד על ידי $\mathfrak{a}$. ∎

הַעֲרכות בדידות.

יהי K שדה. **הערכה בדידה** של K הנה העתקה v של $K^\times$ על $\mathbb{Z}$ המקיֶמת לכל $x, y \in K^\times$,

(1א) $v(xy) = v(x) + v(y)$

(1ב) $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$.

נוהגים להרחיב את v לכל K על ידי שמגדירים $v(0) = \infty$, באשר ∞ הנו סימן שנוסף ל $\mathbb{Z}$ והמקיֵם את הכללים הבאים: $k < \infty$ לכל $k \in \mathbb{Z}$ ו $k + \infty = \infty + \infty = \infty$ לכל $k \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. תחת הגדרות אלו ממשיך כלל (1) להתקיֵם גם עבור כל $x, y \in K$.

מכלל (1א) נובע ש $v(1) = 0$ וש $v(-k) = v(k)$ לכל $k \in \mathbb{Z}$. כמו כן נובע מ (1) התנאי השמושי הבא:

(2) אם $x, y \in K$ מקיְמים $v(x) \neq v(y)$, אזי $v(x + y) = \min(v(x), v(y))$.

ואכן, נניח למשל ש $v(x) < v(y)$. אזי $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$. בנוסף,

$$v(x) = v(x + y - y) \geq \min(v(x + y), v(y)) \geq v(x + y).$$

לכן, $v(x+y)=v(x)$.

הקבוצה $O_v=\{x\in K \mid v(x)\geq 0\}$ הנה חוג הערכה של K ו $M_v=\{x\in K \mid v(x)>0\}$ הנה האידאל המרבי שלו. לשני אברים $x,y\in K$ יש אותה הערכה אם ורק אם $\frac{x}{y}\in O_v^\times$.

דֻגמה יא.ב: יהי A חוג בעל פריקות חד ערכית עם שדה מנות K. יהי p אבר אי פריק של A. כל $a\in A$ נתן להצגה בצורה $a=\frac{x}{y}p^m$ באשר $x,y\in A$ אינם מתחלקים ב p ו $m\in\mathbb{Z}$. בהצגה זו m נקבע באפן יחיד על ידי a. נגדיר $v_p(a)=m$. הפונקציה $v_p\colon K^\times\to\mathbb{Z}$ המֻגדרת באפן כזה הנה הערכה בדידה של K המכֻנה **ההצגה ה p־אדית.**

במקרה שבו $A=\mathbb{Z}$ ו $K=\mathbb{Q}$ אין זה קשה להראות שכל הערכה של $\mathbb{Q}$ שקולה ל v_p עבור איזה שהוא מספר ראשוני p. אם $p\neq q$ הם מספרים ראשוניים, אזי v_p אינה שקולה ל v_q.

נתבונן במקרה שבו $A=K_0[x]$, K_0 שדה, $K=K_0(x)$ ו x נעלה מעל K. לכל פולינום אי פריק ומתֻקן $p\in K_0[x]$ מתקיֵם $v_p(a)=0$ לכל $a\in K_0$. אומרים ש v_p **טריביאלית** על K_0. אם $p\neq q$ הם פולינומים ראשוניים מתֻקנים השונים זה מזה, ההערכות v_p ו v_q אינן שקולות. להפך, כל הערכה של K שהיא טריביאלית על K_0 שקולה לאחת ההערכות v_p או להערכה v_∞ המֻגדרת על מנה $\frac{g}{h}$ של פולינומים אי פריקים על ידי הנֻסחה $v_\infty(\frac{g}{h})=\deg(h)-\deg(g)$. ∎

תחום שלמות A נקרא **חוג הערכה בדידה** אם קיֶמת הערכה בדידה v על $K=\mathrm{Quot}(A)$ כך ש $A=O_v$. במקרה זה A הוא תחום ראשי, בפרט A הנו חוג נטר. ואכן, יהי π אבר של A כך ש $v(\pi)=1$. נבונן באידאל $\mathfrak{a}\neq 0$ של A. אזי $v(\mathfrak{a})$ הנו אידאל שונה מאפס של $\mathbb{Z}$ (אחרת היו כל אברי $\mathfrak{a}$ השונים מאפס אחדות). לכן $\mathfrak{a}=k\mathbb{Z}$ עבור איזה שהוא מספר טבעי k. נבחר $a_0\in\mathfrak{a}$ כך ש $v(a_0)=k$. אזי, $v(a_0)=v(\pi^k)$. לכן, $\frac{\pi^k}{a_0}$ הנה אחדה של A ומכאן ש $\pi^k\in\mathfrak{a}$. כל אבר $a\in\mathfrak{a}$ מקיֵם $v(a)\geq k$ ולכן, $a=\frac{a}{\pi^k}\pi^k\in A\pi^k$. מכאן נובע ש $\mathfrak{a}=O_v\pi^k$ הוא אידאל ראשי.

המשפט הבא נותן אפיונים שונים לחוג הערכה בדידה:

משפטון יא.ג: *יהי A תחום שלמות נטרי מקומי שבו כל אידאל ראשוני שונה מאפס הנו מרבי. יהי $\mathfrak{m}$ האידאל המרבי היחיד של A ויהי $\bar{K}=A/\mathfrak{m}$ שדה השאריות. הטענות הבאות שקולות זו לזו:*

(א) *A הנו חוג הערכה בדידה.*

(ב) *A סגור בשלמות.*

(ג) *$\mathfrak{m}$ הנו אידאל ראשי.*

(ד) $\dim_{\bar{K}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=1$.

(ה) *כל אידאל שונה מאפס של A הנו חזקה של $\mathfrak{m}$.*

(ו) *קיֶם $\pi\in A$ כך שכל אידאל הנו מהצורה $A\pi^n$ עבור איזה שהוא $n\geq 0$ שלם.*

הוכחה: נתחיל את ההוכחה בשתי הערות:

(א2) יהי $\mathfrak{a}$ אידאל נאות שונה מאפס של A. לפי ההנחה יש ל A רק אידאל ראשוני אחד שונה מאפס והוא $\mathfrak{m}$. בפרט, $\mathfrak{m}$ הנו האידאל הראשוני היחיד המקיף את $\mathfrak{a}$. לכן, $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}$. יהיו $x_1, \ldots, x_m$ יוצרים של $\mathfrak{m}$ (A הנו חוג נטר). קיָם אפוא מספר טבעי k כך ש $x_1^k, \ldots, x_m^k \in \mathfrak{a}$ ולכן $\mathfrak{m}^k \subseteq \mathfrak{a}$.

(ב2) $\mathfrak{m}^{n+1} \neq \mathfrak{m}^n$ לכל n טבעי. ואכן, אם $\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$ עבור איזה שהוא n, אזי $\mathfrak{m}^r = \mathfrak{m}^n$ לכל $r \geq m$. לכן, לפי משפט קרול, $\mathfrak{m}^n = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i = 0$. בסימונים של (א2) נובע ש $x_i^n = 0$ ולכן $x_i = 0$ עבור $i = 1, \ldots, n$. מכאן נובע ש $\mathfrak{m} = 0$, סתירה.

הוכחת (א) $\Longrightarrow$ (ב): *ראה משפטון ז.א(ג).*

הוכחת (ב) $\Longrightarrow$ (ג): *לפי (ב2),* $\mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{m}$. *נבחר* $x \in \mathfrak{m}$, $x \neq 0$. *לפי (א2) קיָם n טבעי כך ש* $\mathfrak{m}^n \subseteq Ax$ *ו* $\mathfrak{m}^{n-1} \not\subseteq Ax$. *נבחר* $y \in \mathfrak{m}^{n-1} \setminus Ax$ *ונסמן* $\pi = \frac{x}{y}$. *אזי* $\pi^{-1} \notin A$ *(אחרת היה* $y \in Ax$*). לכן,* π^{-1} *אינו שלם מעל* A. *הואיל ו* $\mathfrak{m}$ *הנו מודול־*$A[x]$ *נאמן נוצר סופית,* $\pi^{-1}\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}$ *(משפטון ו.א). מצד שני,* $y\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^{n-1}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^n \subseteq Ax$ *ולכן* $\pi^{-1}\mathfrak{m} \subseteq A$. *קבלנו אפוא ש* $\pi^{-1}\mathfrak{m}$ *הוא אידאל של* A *שאינו מוכל באידאל המרבי של* A. *לכן,* $\pi^{-1}\mathfrak{m} = A$ *ומכאן ש* $\mathfrak{m} = \pi A$*, כפי שהיה להוכיח.*

הוכחת (ג) $\Longrightarrow$ (ד): *תנאי (ג) נותן* $\pi \in A$ *כך ש* $\mathfrak{m} = A\pi$. *לכן,* $\dim_{\bar{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$. *מצד שני, לפי (ב2),* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \neq 0$*. לכן,* $\dim_{\bar{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$.

הוכחת (ד) $\Longrightarrow$ (ה): *מההנחה ש* $\dim_{\bar{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ *נובע לפי נקָימה (משפטון ג.ה) שקים* $\pi \in A$ *כך ש* $\mathfrak{m} = A\pi$. *קיָם n טבעי כך ש* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}^n$ *ו* $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{m}^{n+1}$*. נבחר* $y \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{m}^{n+1}$*. אזי* $y = u\pi^n$ *עבור איזה שהוא* $u \in A \setminus \mathfrak{m}$. *בפרט, u הפיך ו* $\mathfrak{a} \supseteq Ay = A\pi^n = \mathfrak{m}^n$*. לכן,* $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^n$*, כמבֻקש.*

הוכחת (ה) $\Longrightarrow$ (ו): *נבחר לפי (ב2) אבר* $\pi \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. *לפי ההנחה קיָם n כך ש* $\mathfrak{m}^n = A\pi$. *אזי* $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^n$ *ו* $\mathfrak{m}^n \not\subseteq \mathfrak{m}^2$*. לכן,* $n = 1$ *ו* $\mathfrak{m} = A\pi$. *הואיל וכל אידאל שונה מאפס הנו חזקה של* $\mathfrak{m}$ *נקבל שכל אידאל שונה מאפס הנו מהצורה* $A\pi^n$ *עבור איזה שהוא n.*

הוכחת (ו) $\Longrightarrow$ (א): *יהי* $x \in A$, $x \neq 0$. *ההנחה נותנת n טבעי כך ש* $Ax = A\pi^n$. *לכן קיָם* $u \in A^\times$ *כך ש* $x = u\pi^n$. *נגדיר אפוא* $v(x) = n$. *הפונקציה* $v\colon A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ *שהֻגדרה בזה מקיֶמת את תנאי (1) לכל* $x, y \in A \setminus \{0\}$*. נוכל להרחיב אותה להערכה של* K *על ידי שנגדיר* $v(\frac{x}{y}) = v(x) - v(y)$ *לכל* $x, y \in A \setminus \{0\}$.

∎

חוגי דדקינד.

משפט יא.ד: *יהי A תחום שלמות נטרי שבו כל אידאל ראשוני שונה מאפס מרבי. אזי הטענות הבאות שקולות זו לזו.*

(א) *A סגור בשלמות.*

(ב) *לכל אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ שונה מאפס של A החוג המקומי $A_\mathfrak{p}$ הנו חוג הערכה בדידה.*

(ג) *כל אידאל מקדים של A הנו חזקה של אידאל ראשוני.*

הוכחת (א) $\Longrightarrow$ (ב): יהי $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני שונה מאפס של A. אזי $A_\mathfrak{p}$ הנו חוג נטר (משפטון ח.ב) סגור בשלמות (משפטון ו.יב) וכל אידאל ראשוני שונה מאפס של $A_\mathfrak{p}$ הנו מרבי (משפטון ה.ט). לפי משפטון יא.ג, $A_\mathfrak{p}$ הנו חוג הערכה בדידה.

הוכחת (ב) $\Longrightarrow$ (ג): יהי $\mathfrak{q}$ אידאל מקדים של A ויהי $\mathfrak{p}=\sqrt{\mathfrak{q}}$ האידאל הראשוני השיָך לו. אזי, $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$ הנו אידאל מקדים של $A_\mathfrak{p}$. יתר על כן, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}=\sqrt{\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}}$ (משפטון ה.ט). לכן, קיָם n טבעי כך ש $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}=(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})^n$. אם נחתך את שני האגפים ב A נקבל ש $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}^n$ (משפטון ה.ט).

הוכחת (ג) $\Longrightarrow$ (א): כדי להוכיח ש A סגור בְשלמות מספיק להוכיח ש $A_\mathfrak{p}$ סגור בשלמות לכל אידאל ראשוני שונה מאפס $\mathfrak{p}$ של A (משפטון יא.יב). לפי משפטון יא.ג, מספיק להוכיח שכל אידאל שונה מאפס של $A_\mathfrak{p}$ הנו חזקה של $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. ואכן, לפי משפטון ה.ט, נתן להציג כל אידאל שונה מאפס של $A_\mathfrak{p}$ כ $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ באשר $\mathfrak{a}$ הנו אידאל שונה מאפס של A. לפי למה יא.א, $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\cdots\mathfrak{q}_m$ באשר $\mathfrak{q}_1,\dots,\mathfrak{q}_2,\dots,\mathfrak{q}_m$ הנם אידאלים מקדימים של A השיָכים לאידאלים ראשוניים $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\dots,\mathfrak{p}_m$ שונים זה מזה. לפי ההנחה, קיָם לכל i אידל ראשוני $\mathfrak{l}$ ומספר טבעי k_i כך ש $\mathfrak{q}_i=\mathfrak{l}^{k_i}$. בפרט $\mathfrak{q}_i\subseteq\mathfrak{l}$ ולכן $\mathfrak{p}_i\subseteq\mathfrak{l}$. מהמרביות של $\mathfrak{p}_i$ נובע ש $\mathfrak{l}=\mathfrak{p}$. לכן $\mathfrak{q}_i=\mathfrak{p}_k^{k_i}$ ו $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{k_1}\cdots\mathfrak{p}_2^{k_2}\cdots\mathfrak{p}_n^{k_n}$. רק אחד מהאידאלים $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ שוה ל $\mathfrak{p}$. נאמר אפוא ש $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_2,\dots,\mathfrak{p}_n$. אזי, $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1^{k_1}A_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p}_2^{k_2}A_\mathfrak{p}\cdots\mathfrak{p}_n^{k_n}A_\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1^{k_1}A_\mathfrak{p}$. אם $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_1$, אזי $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}=A_\mathfrak{p}=(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})^0$, אחרת $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}=(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})^{k_1}$. בשני המקרים $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ הנו חזקה של $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, כנדרש. ∎

תחום שלמות A המקיֵם את תנאי משפט יא.ד נקרא **חוג דדקינד**.

הוכחת "(ג) $\Longrightarrow$ (א)" של משפט יא.ד כוללת בתוכה גם את ההוכחה של התוצאה הבאה:

משפט יא.ה: *בחוג דדקינד, יש לכל אידאל שונה מאפס פרוק חד ערכי למכפלה של אידאלים ראשוניים.*

דֻגמה יא.ו: חוגים ראשיים. יהי A חוג ראשי. בפרט A הנו חוג נטר בעל פריקות חד ערכית. לכן, כל אידאל ראשוני שונה מאפס של A מרבי. בנוסף לכך, A סגור בשלמות (דִיון אחרי משפטון ו.י). לכן, A הנו חוג דדקינד. בפרט $\mathbb{Z}$ ו $K_0[x]$ (K_0 שדה) הם חוגי דדקינד. ∎

החוגים הראשיים מולידים דֻגמאות נוספות של חוגי דדקינד:

משפט יא.ז: *יהי A חוג דדקינד בעל שדה מנות K. יהי L הרחבה פרידה סופית של K ונסמן ב B את הסגור השלם של A ב L. אזי B הנו חוג דדקינד.*

הוכחה: לפי ההגדרה A הנו תחום נטר סגור בשלמות. לפי משפטון ח.ח(א), גם B הוא תחום נטר הסגור בשלמות.

הואיל וכל אידאל ראשוני שונה מאפס של A מרבי, גם כל אידאל ראשוני שונה מאפס של B מרבי (תוצאה ו.ח). לכן, B הוא חוג דדקינד. ∎

דֻּגמה יא.ח: יהי K הרחבה סופית של $\mathbb{Q}$. נסמן ב O_K את הסגור השלם של $\mathbb{Z}$ ב K. לפי דֻּגמה יא.ו, $\mathbb{Z}$ הנו חוג דדקינד. לכן, לפי משפט יא.ז, גם O_K הוא חוג דדקינד.

עתה יהיו K_0 שדה, x משתנה, $K = K_0(x)$ ו L הרחבה פרידה סופית של K. אזי הסגור השלם של $K_0[x]$ ב L הנו חוג דדקינד. ∎

תרגיל יא.ט: יהי A חוג דדקינד בעל שדה מנות K. יהי L הרחבה אי פרידה בטהרה סופית של K ונסמן ב B את הסגור השלם של A ב L. הוכח ש B הוא חוג דדקינד. הסק שמשפט יא.ז נכון לכל הרחבה סופית של K. ∎

יב. חוגים של טורי חֲזָקוֹת פורמליים

במקום טורים חזקות מתכנסים באנליזה דנים באלגברה בטורי חזקות פורמליים. חוגים של טורי חזקות פורמליים מעל חוג נתון A יורשים במקרים רבים את התכונות של A ומוסיפים להם תכונות מיֻחדות.

יהי A חוג. **טור חזקות פורמלי** (formal power series) ב X עם מקדמים ב A הנו בטוי פורמלי $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ שבו $a_i \in A$ (אברים אלו נקראים **מְקַדְּמֵי** הטור), $i = 0, 1, 2, \ldots$. האבר a_0 הנו **המקדם החפשי**.

נסמן את אסף כל טורי החזקות הללו ב $A[[X]]$. מגדירים חבור וכפל של טורי חזקות באפן הבא:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i$$

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{\infty} b_j X^j\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} a_i b_j X^k$$

האפס והאחד של $A[[X]]$ מֻגדרים כטורי החזקות שבהם $a_0 = 0$ ו $a_0 = 1$ בהתאמה וכל שאר המקדמים שוים לאפס. באפן כזה הופך $A[[X]]$ לחוג הנקרא **חוג טורי החזקות הפורמליים ב X מעל A**. נִתן לשכן את החוג $A[X]$ בחוג $A[[X]]$ על ידי שלכל פולינום $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ ב $A[X]$ מתאימים את טור החזקות $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ שבו $a_i = 0$ לכל $i > n$.

נגדיר את **הסדר** של אבר שונה מאפס $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ של $A[[X]]$ כ i הקטן ביותר שעבורו $a_i \neq 0$. נסמנו ב $\mathrm{ord}(f)$. נשלים הגדרה זו על ידי שנִקבע $\mathrm{ord}(0) = \infty$. פונקצית הסדר $\mathrm{ord}\colon A[[X]] \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ מקיֶמת את הדרישות הבאות:

(וא) $\mathrm{ord}(f) = \infty$ אם ורק אם $f = 0$.

(וב) $\mathrm{ord}(f+g) \geq \min(\mathrm{ord}(f) + \mathrm{ord}(g))$.

(וג) $\mathrm{ord}(fg) \geq \mathrm{ord}(f) + \mathrm{ord}(g)$.

(וד) אם A הנו תחום שלמות, אזי $\mathrm{ord}(fg) = \mathrm{ord}(f) + \mathrm{ord}(g)$. במקרה זה גם $A[[X]]$ הנו תחום שלמות.

אם נסמן ב $\mathfrak{a}$ את האידאל של $A[[X]]$ הנוצר על ידי X נקבל ש $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$. לכן, הגבול של סדרה מתכנסת ב $A[[X]]$ בטופולוגיה ה $\mathfrak{a}$־אדית נקבע באפן יחיד. כמו כן, $f \in \mathfrak{a}^n$ אם ורק אם $\mathrm{ord}(f) \geq n$. לכן, סדרה $f_1, f_2, f_3, \ldots$ של אברי $A[[X]]$ שואפת לאפס אם ורק אם סדרת המספרים השלמים $\mathrm{ord}(f_1), \mathrm{ord}(f_2), \mathrm{ord}(f_3), \ldots$ שואפת לאינסוף.

משפטון יב.א: *יהי A חוג ו $\mathfrak{a}$ אידאל של A. נסמן ב $\mathfrak{A}$ את האידאל של $A[[X]]$ הנוצר על ידי $\mathfrak{a}$ ו X.*

(א) *חוג טורי החזקות הפורמליים מֻשלם ביחס לאידאל הנוצר על ידי X.*

(ב) *אם $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n = 0$, אזי $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}^n = 0$.*

(ג) *אם A מֻשלם ביחס לאידאל $\mathfrak{a}$, אזי $A[[X]]$ מֻשלם ביחס לאידאל $\mathfrak{A}$ הנוצר על ידי $\mathfrak{a}$.*

(ד) *טור חזקות* $f=\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i$ *הפיך ב* $A[[X]]$ *אם ורק אם המקדם החפשי שלו* a_0 *הפיך ב* A.

(ה) *אם* A *מקומי מֻשלם ו* $\mathfrak{m}$ *האידאל המרבי של* A, *אזי* $A[[X]]$ *הוא חוג מקומי מֻשלם והאידאל המרבי שלו הנו* $\mathfrak{M}=A[[X]]\mathfrak{m}+A[[X]]X$.

הוכחת ב: יהי $f=\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i$ אבר של $\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{A}^n$. אזי, לכל k ו n טבעיים

$$\sum_{i=0}^{k+n} a_iX^i \in \mathfrak{A}^{k+n}=\sum_{i=0}^{k+n}\mathfrak{a}^{k+n-i}X^i+\sum_{i=k+n+1}^{\infty}AX^i .$$

אם נשוה את המקדמים של X^k בשני האגפים נקבל ש $a_k\in\mathfrak{a}^n$. לכן, $a_k=0$ ומכאן ש $f=0$.

הוכחת ג: תהי $f_1,f_2,f_3,\dots$ סִדרת קושי ב $A[[X]]$ בְּיַחס ל $\mathfrak{A}$. נרשֹם $f_i=\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}X^j$ עם $a_{ij}\in A$ ונוכיח שלכל k טבעי $a_{1k},a_{2k},a_{3k},\dots$ היא סדרת קושי ביחס ל $\mathfrak{a}$. ואכן, יהי n מספר טבעי. אזי קַיָם $i_0\ge k+n$ כך ש $f_{i+1}-f_i\in\mathfrak{A}^{k+n}$ לכל $i\ge i_0$. לכן,

$$\sum_{j=0}^{\infty}(a_{i+1,j}-a_{ij})X^j\in\sum_{j=0}^{k+n}\mathfrak{a}^{k+n-j}X^j+\sum_{j=k+n+1}^{\infty}AX^j$$

לכן, $a_{i+1,k}-a_{ik}\in\mathfrak{a}^n$, כַּנִדרש.

הואיל ו A מֻשלם ביחס ל $\mathfrak{a}$ מתכנסת הסדרה $a_{1k},a_{2k},a_{3k},\dots$ לאבר a_k של A (ביחס ל $\mathfrak{a}$). נסמן $f=\sum_{k=0}^{\infty} a_kX^k$ ונוכיח ש $f_i\to f$ ביחס ל $\mathfrak{A}$.

יהי אפוא n מספר טבעי. אזי קַיָם i_0 כך $a_{ik}-a_k\in\mathfrak{a}^n$ עבור $k=0,\dots,n-1$ ולכל $i\ge i_0$. לכן, $f_i-f=\sum_{k=0}^{\infty}(a_{ik}-a_k)X^k\in\mathfrak{A}^n$.

הוכחת ד: אם f הפיך, קַיָם $g=\sum_{i=0}^{\infty} b_iX^i$ כך ש $fg=1$. בפרט, $a_0b_0=1$ ולכן $a_0\in A^\times$.

להפך, אם a_0 הפיך, נוכל לחלק את f בו כדי להניח ש $a_0=1$. תחת הנחה זו $g=-\sum_{i=1}^{\infty} a_iX^i$ מקַיֵם $f=1-g$ ו $f^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty} g^i$.

הוכחת ה: נתבונן באבר $f=\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i$ של $A[[X]]$. אם $f\notin\mathfrak{M}$, אזי $a_0\in A\smallsetminus\mathfrak{m}$. הואיל הואיל ו $\mathfrak{m}$ הנו האידאל המרבי היחיד של A, האבר a_0 הפיך ב A. לכן, לפי (ד), f הפיך ב $A[[X]]$. מכאן נובע ש $\mathfrak{M}$ הִנו האידאל המרבי היחיד של $A[[X]]$.

הוכחת א: החוג A מֻשלם ביחס לאידאל האפס. לכן, לפי (ג), $A[[X]]$ מֻשלם ביחס לאידאל הנוצר על ידי X. ∎

יהי $f\in A[[X]]$. **המקדם התחתון** של f הנו המקדם של $X^{\mathrm{ord}(f)}$ ב f.

משפטון יב.ב: *אם A הוא חוג נטר, אזי גם $A[[X]]$ הוא חוג נטר.*

הוכחה: עלינו להוכיח שכל אידאל $\mathfrak{A}$ של $A[[X]]$ נוצר סופית. לכל $i \geq 0$ נסמן ב $\mathfrak{a}_i$ את אבר האפס יחד עם אסף כל המקדמים התחתונים של אברים $f \in \mathfrak{A}$ מסדר i. אסף זה הוא אידאל של A ו $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots$. הואיל ו A נטרי, קיָם n כך ש $\mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}_n$ לכל $r \geq n$. כמו כן נוכל לבחור יוצרים $a_{i1}, \ldots, a_{i,m(i)}$ של $\mathfrak{a}_i$ עבור $i = 0, \ldots, n$. לכל $0 \leq i \leq n$ ו $1 \leq j \leq m(i)$ נבחר $f_{ij} \in \mathfrak{A}$ בעל מקדם תחתון a_{ij}. נוכיח שה f_{ij}־ים יוצרים את $\mathfrak{A}$.

יהי $f \in \mathfrak{A}$. נסמן $d = \mathrm{ord}(f)$ ויהי a המקדם התחתון של f. אזי $a \in \mathfrak{a}_d$. אם $d \leq n$, קיָמים $b_{d1}, \ldots, b_{d,m(d)} \in A$ כך ש $a = \sum_{j=1}^{m(d)} b_{dj} a_{dj}$. לכן, $g = f - \sum_{j=1}^{m(d)} b_{dj} f_{dj}$ הנו אבר של $\mathfrak{A}$ ו $\mathrm{ord}(g) \geq d+1$. אם $d \geq n$ קיָמים $b_{d1}, \ldots, b_{d,m(n)} \in A$ כך ש $a = \sum_{j=1}^{m(n)} b_{dj} a_{nj}$. לכן, $g = f - \sum_{j=1}^{m(n)} b_{dj} f_{nj} X^{d-n}$ הנו אבר של $\mathfrak{A}$ ו $\mathrm{ord}(g) \geq d+1$.

נוכל אפוא למצא סדרה עולה $0 \leq d(0) < d(1) < d(2) < \cdots$ של מספרים שלמים, $l \leq n$ וסדרה $g_{d(0)}, g_{d(1)}, g_{d(2)}, \ldots$ של אברי $\mathfrak{A}$ כך ש $d(k) < n$ לכל $k \leq l$, $d(k) \geq n$ לכל $k > l$, $g_{d(0)} = f$, $\mathrm{ord}(g_{d(i)} = d(i)$, ו

$$g_{d(k)} = g_{d(k-1)} - \sum_{j=1}^{m(d(k)} b_{d(k),j} f_{d(k),j}, \qquad k \leq l$$

$$.g_{d(k)} = g_{d(k-1)} - \sum_{j=1}^{m(d(n))} b_{d(k),j} f_{n,j} X^{d(k)-n}, \qquad k > l$$

עבור כל $r > l$ נקבל

$$f = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m(d(k))} b_{d(k),j} f_{d(k),j} + \sum_{j=1}^{m(d(n))} \Big(\sum_{k=l+1}^{r} b_{d(k),j} X^{d(k)-n} \Big) f_{nj} + g_{d(r+1)}$$

אם נתן ל r לשאֹף לאינסוף, נקבל בגבול

$$, f = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m(d(k))} b_{d(k),j} f_{d(k),j} + \sum_{j=1}^{m(d(n))} \Big(\sum_{k=r+l}^{\infty} b_{d(k),j} X^{d(k)-n} \Big) f_{nj}$$

כפי שהיה להוכיח. ∎

נכליל עתה את מושג טור החזקות הפורמלי ממשתנה אחד לכמה משתנים. נגדיר **טור חזקות פורמלי** במשתנים $X_1, \ldots, X_n$ מעל A כִּסכום פורמלי $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$, באשר $f_i \in A[X_1, \ldots, X_n]$ הוא פולינום הומוגני ממעלה i.

נסמן את אסף כל טורי החזקות האלו ב $\hat{R} = A[[X_1, \ldots, X_n]]$. נגדיר חבור וכפל ב $\hat{R}$ על ידי הנֻסחאות

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i + \sum_{i=0}^{\infty} g_i = \sum_{i=0}^{\infty} (f_i + g_i)$$
$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} f_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty} g_j\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} f_i g_j$$

כמו כן נזהה פולינום $f \in A[X_1, \ldots, X_n]$ עם טור חזקות על ידי שנרשם את f כסכום החלקים ההומוגניים שלו ונשלים את האברים החסרים על ידי אפסים. באפן כזה הופך $\hat{R}$ לחוג ו $R = A[X_1, \ldots, X_n]$ לתת חוג.

נזהה עתה כל אבר ב $\hat{R}$ עם אבר ב $A[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][[X_n]]$ באפן הבא: לכל $k \geq 0$ יהי $f_k \in A[X_1, \ldots, X_n]$ פולינום הומוגני ממעלה k. אזי

$$, f_k(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{j=0}^{k} f_{kj}(X_1, \ldots, X_{n-1}) X_n^{k-j}$$

באשר f_{kj} הם פולינומים הומוגניים ממעלה j. לכן,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(X_1, \ldots, X_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} f_{k,k-j}(X_1, \ldots, X_{n-1}) X_n^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{\infty} f_{j+l,l}(X_1, \ldots, X_{n-1}) \Big) X_n^j \end{aligned} \tag{2}$$

והמקדם של X_n^j בטור האחרון הנו אבר של $A[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$. באפן כזה קבלנו זהוי של חוגים:

$$A[[X_1, \ldots, X_n]] = A[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][[X_n]] \tag{3}$$

כדי לבסס את השויון השני ב (2), נעיר ש $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ שלם ביחס לאידאל $\mathfrak{M}$ הנוצר על ידי $X_1, \ldots, X_n$. ואכן, אם $f_1, f_2, f_3, \ldots$ היא סִדרת קושי-$\mathfrak{M}$, ו $f_i = \sum_{j=0}^{\infty} f_{ij}$ הוא הפרוק של f_i למרכיבים הומוגניים, אזי לכל j קיָם $i(j)$ כך ש $f_{i+1} - f_i \in \mathfrak{M}^{j+1}$ ולכן $f_{ij} = f_{i(j),j}$ לכל $i \geq i(j)$. מכאן ש f_i שואף ל $f = \sum_{j=0}^{\infty} f_{i(j),j}$. כמובן ש $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}^i = 0$ ולכן הגבול של סדרה (או של טור) מתכנסת נקבע באפן יחיד.

בעקבות זאת, נתן לראות כל טור $f = \sum_{i=0}^{\infty}$ ב $A[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$ שבו $f_i \in A[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ הנו פולינום הומוגני ממעלה i גם כאבר ש $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ והטור באגף ימין של (2) מתכנס לאבר יחיד של

$A[[X_1,\ldots,X_n]]$. לכל r טבעי ההפרש בין האבר השני של (2) והאבר השלישי שלו מקֻים:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} f_{k,k-j}(X_1,\ldots,X_{n-1})X_n^j - \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{l=0}^{\infty} f_{j+l,l}(X_1,\ldots,X_{n-1})\Big)X_n^j \\ = \sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} f_{k,k-j}(X_1,\ldots,X_{n-1})X_n^j - \sum_{j=0}^{r}\Big(\sum_{l=0}^{\infty} f_{j+l,l}(X_1,\ldots,X_{n-1})\Big)X_n^j \\ - \sum_{j=r+1}^{\infty}\Big(\sum_{l=0}^{\infty} f_{j+l,l}(X_1,\ldots,X_{n-1})\Big)X_n^j\end{aligned}$$

כל אחד מהאברים בכל אחד מהסכומים של אגף ימין של השויון האחרון שיָך ל $\mathfrak{M}^{r+1}$. לכן, שיָך גם אגף שמאל ל $\mathfrak{M}^{r+1}$. אולם אגף שמאל אינו תלוי בכלל ב r, לכן הוא שוה לאפס, כפי שנטען.

אנדוקציה על n מראה, לפי (א4), שאם A הוא תחום שלמות, גם $A[[X_1,\ldots,X_n]]$ הוא תחום שלמות. כמו כן, מקבלים אנו הכללה של משפטון יב.ב:

משפט יב.ג: *אם A הוא חוג נטר, אזי גם $A[[X_1,\ldots,X_n]]$ הוא חוג נטר.*

יג. פריקות חד ערכית של טורי חזקות פורמליים

נוכיח בפרק זה שחוג טורי החזקות הפורמליים ב n משתנים מעל שדה הוא בעל פריקות חד ערכית.

יהי A חוג מקומי עם אידאל מרבי $\mathfrak{m}$. אבר $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots$ של $A[[X]]$ יִקרא **טור וירשטרס** אם לא כל המקדמים שלו שַׁיָכים ל $\mathfrak{m}$. כלומר, קַיָם $n \geq 0$ כך ש $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{m}$ ו $a_n \in A^\times$. במקרה זה יקרא n **הדרגה של** f. אם כל המקדמים של טור חזקות $g \in A[[X]]$ שַׁיָכים ל $\mathfrak{m}$, אזי גם המקדמים של כל כפולה של g שַׁיָכים ל $\mathfrak{m}$. לכן, אם $f = gh$ ו f הוא טור וירשטרס, גם g ו h הם טורי וירשטרס.

משפטון יג.א (חֲלֻקה עם שארית): *יהי A חוג מקומי נטרי מֻשלם עם אידאל מרבי $\mathfrak{m}$, יהי n מספר טבעי ויהי $f \in A[[X]]$ טור וירשטרס מדרגה n. אזי לכל טור חזקות $g \in A[[X]]$ קַיָמים $q \in A[[X]]$ ו $r \in A[X]$ יחידים כך ש $g = qf + r$ ו* $\deg(r) \leq n-1$.

הוכחה (Manin): נגדיר שתי העתקות $\alpha, \omega\colon A[[X]] \to A[[X]]$ על ידי

$$\alpha(\sum_{i=0}^{\infty} b_iX^i) = b_0 + b_1X + \cdots + b_{n-1}X^{n-1}$$

$$\omega(\sum_{i=0}^{\infty} b_iX^i) = b_n + b_{n+1}X + b_{n+2}X^{n+2}\cdots$$

שתי ההעתקות לינאריות ולכל $h \in A[[X]]$

(1א) $\omega(hX^n) = h = \alpha(h) + \omega(h)X^n$ ו

(1ב) $\omega(h) = 0$ אם ורק אם h הנו פולינום ממעלה לכל היותר $n-1$.

מתנאי (1ב) נובע שעלינו להוכיח את הקיום והיחידות של $q \in A[[X]]$ כך ש $\omega(g) = \omega(qf)$. לפי (1א),

$$\omega(qf) = \omega(q\alpha(f) + q\omega(f)X^n) = \omega(q\alpha(f)) + \omega(q\omega(f)X^n) = \omega(q\alpha(f)) + q\omega(f)\ .$$

הואיל ו $a_n \in A^\times$ נובע ממשפטון יב.א(ד) ש $\omega(f) = a_n + a_{n+1}X + a_{n+2}X^2 + \cdots$ הפיך ב $A[[X]]$. נציב אפוא $z = q\omega(f)$ ו $h = -\frac{\alpha(f)}{\omega(f)}$ ונקבל שעלינו להוכיח את הקיום והיחידות של z ב $A[[X]]$ כך ש

(2) $\omega(g) = -\omega(zh) + z$.

כדי לפתֹר את המשואה (ב) נראה את $\omega \circ h$ כהעתקה של $A[[X]]$ לתוך עצמו המֻגדרת על ידי $(\omega \circ h)f = \omega(hf)$. כמו כן נסמן ב 1 את העתקת הזהות של $A[[X]]$. באפן זה מקבלת המשואה (ב) את הצורה

(3) $\omega(g) = (1 - \omega \circ h)z$.

נוכיח ש $1 - \omega \circ h$ הנה העתקה הפיכה. ואכן, מהתנאים על f נובע ש $h = \frac{\alpha(f)}{\omega(f)} \in \mathfrak{m}[[X]]$ (כלומר, כל המקדמים של h שַׁיָכים ל $\mathfrak{m}$). יהי אפוא $y \in A[[X]]$. נניח באנדוקציה ש $(\omega \circ h)^k y \in \mathfrak{m}^k[[X]]$. אזי,

מכאן נובע ש $(\omega\circ h)^{k+1}y=\omega\circ h\big((\omega\circ h)^k y\big)=\omega(h(\omega\circ h)^k y)\in\mathfrak{m}^{k+1}[[X]]$

$$(1-\omega\circ h)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(\omega\circ h)^k$$

היא העתקה מֻגדרת היטב של $A[[X]]$ לתוך עצמו ההפוכה ל $1-\omega\circ h$. אם נפעיל אותה על שני האגפים של (3), נקבל את הקיום והיחידות של z, דְּהַיְנוּ, $z=(1-\omega\circ h)^{-1}\omega(g)$. ∎

יהי שוב A חוג מקומי עם אידאל מרבי $\mathfrak{m}$. פולינום מתֻקן $f=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0\in A[X]$ נקרא **פולינום וַיֶרשטרס** (Weierstrass polynomial) אם $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathfrak{m}$. בפרט f הנו טור וירשטרס. נעיר שמכפלה של פולינומי וַיֶרשטרס הנה שוב פולינום וַיֶרשטרס.

משפטון יג.ב (משפט ההכנה של וַיֶרְשְׁטְרָס): *יהי A חוג מקומי מֻשלם עם אידאל מרבי $\mathfrak{m}$ ויהי $f=\sum_{i=0}^{\infty}a_iX^i$ טור וירשטרס מדרגה n. אזי נִתן להציג את f כמכפלה $f=gu$ שבה g פולינום וירשטרס ממעלה n ו $u\in A[[X]]^\times$. יתר על כן, אם $f(X)=g'u'$ הוא פרוק נוסף של f שבו g' הנו פולינום וירשטרס ו $u'\in A[[X]]^\times$, אזי $g=g'$ ו $u=u'$.*

הוכחה: נשתמש במתכון של אוקלידס כדי למצא $q\in A[[X]]$ ו $r=b_0+b_1X+\cdots+b_{n-1}X^{n-1}\in A[X]$ כך ש

$$X^n=qf+r\ . \tag{ה}$$

נרשֹם $q=c_0+c_1X+\cdots$. אזי $qf\equiv c_0a_nX^n+d_{n+1}X^{n+1}+\cdots \mod \mathfrak{m}$. הצבה ב (ה) והשואת המקדמים של $1,X,\dots,X^n$ בשני האגפים נותנת, $c_0a_n\equiv 1\mod\mathfrak{m}$ ו $b_0,\dots,b_{n-1}\in\mathfrak{m}$. לכן c_0 הפיך ב A ומכאן ש q הפיך ב $A[[X]]$ (משפטון יג.ב). נוכל אפוא לחלץ את f מ (ה) ולקבל את ההצגה המבֻקשת $f=(X^n-r)q^{-1}$.

כדי להוכיח את יחידות ההצגה במשפטון נניח ש $f=(X^n+r)u$ ו $f=(X^m+r')u'$ באשר r,r' הם פולינומים ממעלה $n-1,m-1$ בהתאמה ב $A[X]$ ו u,u' אברים הפיכים של $A[[X]]$. אזי, $X^nu\equiv X^mu'\mod\mathfrak{m}$. הואיל והמקדמים החפשיים של u ו u' הפיכים ב A נובע מכאן ש $m=n$. לכן, $X^n=u^{-1}f-r$ ו $X^n=(u')^{-1}f-r'$. מהיחידות של ההצגה במתכון אוקלידס נובע ש $u=u'$ ו $r=r'$.
∎

הערה יג.ג: על הצבות בטורי חזקות. יהי A חוג, יהי R חוג מקומי מֻשלם המַקיף את A בעל אידאל מרבי $\mathfrak{m}$ ויהי $S=A[[X_1,\dots,X_n]]$ חוג טורי החזקות הפורמליים מעל A. לבסוף, יהיו $x_1,\dots,x_n$ אברים של $\mathfrak{m}$. אם $f=\sum_{i=0}^{\infty}f_i$ הוא אבר של S שבו $f_i\in A[X_1,\dots,X_n]$ הנו פולינומים הומוגניים ממעלה i, אזי $f_i(x_1,\dots,x_n)\in\mathfrak{m}^i$. לכן, הטור $\sum_{i=0}^{\infty}f_i(x_1,\dots,x_n)$ מתכנס ב R. מכאן, שההצבה של x_i במקום X_i מגדירה הומומורפיזם $\tau\colon S\to R$ המשבית את אברי A.

אם נסמן ב $\mathfrak{M}$ את האידאל של S הנוצר על ידי $X_1,\ldots,X_n$, נִמצא ש τ רציף־$\mathfrak{M}$. ואכן, יהי S $g \in S$ ויהי n מספר טבעי. אזי לכל $f \in S$ המקיֵם $f-g \in \mathfrak{M}^n$ מתקיֵם

$$\tau(f)-\tau(g)=f(x_1,\ldots,x_n)-g(x_1,\ldots,x_n) \in \mathfrak{m}^n$$

כי $x_1,\ldots,x_n \in \mathfrak{m}$. במלים אחרות, אם f קרוב־$\mathfrak{M}$ ל g, אזי $\tau(f)$ קרוב־$\mathfrak{m}$ ל $\tau(g)$. מכאן ש τ רציף. ∎

משפטון יג.ד (משפט האוטומורפיזמים): *יהי K שדה ו $S=K[[X_1,\ldots,X_n]]$ טור חוגי החזקות מעליו. נסמן את האידאל של S הנוצר על ידי $X_1,\ldots,X_n$ ב $\mathfrak{M}$. לכל $1 \le i \le n$ יהי $f_i = X_i + g_i$ אבר של S שבו $g_i \in \mathfrak{M}^2$. אזי ההצבה $f_i \mapsto X_i$ מגדירה אוטומורפיזם רציף τ של S.*

הוכחה: לפי הערה יב.ו, ההצבה $X_i \mapsto f_i$ מגדירה הומומורפיזם רציף $\tau\colon S \to S$. יהי $h=\sum_{i=d}^{\infty} h_i$ אבר של S שבו h_i הוא פולינום הומוגני ממעלה i ו $h_d \neq 0$. אזי $\tau(h)=h_d+h'_{d+1}+h'_{d+2}+\cdots$, באשר h'_j הנו פולינום הומוגני ממעלה j לכל $j \ge d+1$. לכן, $h-\tau(h) \in \mathfrak{M}^{d+1}$. בפרט, אם $h \neq 0$, אזי גם $\tau(h) \neq 0$. קִבלנו אפוא ש τ חד חד ערכי.

טענה: $\mathrm{Im}(\tau)$ *צפוף ב* S. ואכן, יהי $h \in S$ כמתאר לעיל. אזי $g_{d+1}=h-\tau(h) \in \mathfrak{M}^{d+1}$. באפן דומה, $g_{d+1}-\tau(g_{d+1}) \in \mathfrak{M}^{d+2}$. לכן, $g_{d+2}=h-\tau(g+g_{d+1}) \in \mathfrak{M}^{d+2}$. באנדוקציה אפשר להגדיר באפן כזה $g_{d+1},g_{d+2},g_{d+3},\ldots$ כך ש $h-\tau(h+g_{d+1}+\cdots+g_{d+i}) \in \mathfrak{M}^{d+i+1}$ לכל i טבעי, כפי שטָעַנּוּ.

יהי עתה h' אבר של S. אזי קיָמים $h_i \in S$ כך ש $\lim_{i\to\infty}\tau(h_i)=h'$. בפרט,

$$\tau(h_1),\tau(h_2),\tau(h_3),\ldots$$

היא סדרת קושי. לפי החלק הראשון של הוכחת המשפטון, $\tau(h_{i+1})-\tau(h_i) \in \mathfrak{M}^d$ אם ורק אם $h_{i+1}-h_i \in \mathfrak{M}^d$. לכן, $h_1,h_2,h_3,\ldots$ היא סדרת קושי. הואיל ו S מֻשלם, h_i מתכנס לאבר h של S. הואיל ו τ רציף, $h'=\lim_{i\to\infty}\tau(h_i)=\tau(h)$. לכן τ היא גם על. ∎

למה יג.ה: *יהיו A חוג, n מספר טבעי ו $0 \neq f \in A[[X_1,\ldots,X_n]]$. אזי קיָם מספר טבעי d כך ש*

$$f(T^{d^{n-1}},T^{d^{n-2}},\ldots,T^d,T) \neq 0$$

ב $A[[T]]$.

הוכחה: נרשֹם את המונום $X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}$ כ $M_{\mathbf{i}}(\mathbf{X})$, באשר $\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_n)$ ו $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$. נסדר את המונומים בסדר מִלוני:

$$M_{\mathbf{i}}(\mathbf{X})<M_{\mathbf{j}}(\mathbf{X}) \iff \mathbf{i}<\mathbf{j} \iff \exists k \le n:\ i_1=j_1,\ldots,i_{k-1}=j_{k-1},i_k<j_k \ .$$

יהי עתה $aM_{\mathbf{i}}(\mathbf{X})$ המונום הקטן ביותר ב f עם $a \neq 0$. נבחר d הגדול מכל המרכיבים i_ν של $\mathbf{i}$. ההצבה של $T^{d^{n-\nu}}$ במקום X_ν מעתיקה את $aM_{\mathbf{i}}(\mathbf{X})$ ל $aT^{d(\mathbf{i})}$, באשר $d(\mathbf{i}) = \sum_{\nu=1}^n i_\nu d^{n-\nu}$. אם $\mathbf{j} > \mathbf{i}$, אזי $d(\mathbf{j}) > d(\mathbf{i})$. לכן האבר $aT^{d(\mathbf{i})}$ בטור החזקות $g(T) = f(T^{d^{n-1}}, T^{d^{n-2}}, \ldots, T^d, T)$ אינו מצטמצם. במלים אחרות, $g \neq 0$.
∎

למה יג.ו: *יהי K שדה ו $f \in K[[X_1, \ldots, X_n]]$ טור חזקות שונה מאפס מעל K. אזי קַיָם אוטומורפיזם τ של $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ כך ש $\tau(f)(0, \cdots, 0, X_n) \neq 0$.*

הוכחה: נשתמש בלמה יג.ה כדי לבחֹר מספר טבעי d כך ש $g(T) = f(T^{d^{n-1}}, \ldots, T^d, T) \neq 0$. משפט האוטומורפיזם נותן אוטומורפיזם τ של $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ כך ש $\tau(X_\nu) = X_\nu + X_n^{d^{n-\nu}}$ עבור $\nu \leq n-1$ ו $\tau(X_n) = X_n$. אזי $\tau(f)(0, \ldots, 0, X_n) = g(X_n) \neq 0$. ∎

בהוכחת המשפט הבא נשתמש במשפט שאם A הנו תחום שלמות בעל פריקות חד ערכית, גם חוג הפולינומים $A[X]$ בעל פריקות חד ערכית. ההוכחה של עֻבדה ידועה זו מסתמכת על המתכון של אוקלידס לפולינומים ועל למת גאוס. כמו כן נזקק לעוד שני משפט עזר:

למה יג.ז: *יהי A חוג מקומי מֻשלם בעל פריקות חד ערכית ויהי $g \in A[X]$ פולינום וירשטרס. נניח ש g אי פריק ב $A[X]$. אזי g אי פריק גם ב $A[[X]]$.*

הוכחה: נניח ש $g = g_1 g_2$ הוא פרוק של g ב $A[[X]]$. אזי g_1 הנו טור וירשטרס. לפי משפט ההכנה של וירשטרס (משפטון יג.ב), $g_1 = hu$ באשר h הוא פולינום וירשטרס ו $u \in A[[X]]^\times$. בפרט h הוא פולינום מתֻקן. לכן אפשר לחלק בו את g עם שארית ב $A[X]$. במלים אחרות, קַיָמים $q, r \in A[X]$ כך ש $g = qh + r$ ו $\deg(r) < \deg(h)$. מצד שני, $g = ug_2 h$. מהיחידות של החִלוק עם שארית נובע ש $r = 0$ ו $q = ug_2$. לכן $g = qh$ הוא פרוק של g ב $A[X]$. הואיל ו g אי פריק, $h \in A[X]^\times$ או $q \in A[X]^\times$. אם $h \in A[X]^\times$, אזי $h \in A[[X]]^\times$. מכאן ש $g_1 \in A[[X]]^\times$. אם $q \in A[X]^\times$, אזי $g_2 \in A[[X]]^\times$. בכל מקרה, הפרוק $g = g_1 g_2$ של g ב $A[[X]]$ טריביאלי, כפי שהיה להוכיח. ∎

למה יג.ח: *יהי A חוג מקומי עם אידאל מרבי $\mathfrak{m}$, יהיו $f, g, h \in A[X]$ פולינומים מתֻקנים כך ש f הנו פולינום וירשטרס ו $f = gh$. אזי גם g ו h הנם פולינומי וירשטרס.*

הוכחה: יהיו $n = \deg(f)$, $g = a_0 + \cdots + a_{k-1}X^{k-1} + X^k$ ו $h = b_0 + \cdots + b_{l-1}X^{l-1} + X^l$. נסמן $a_k = 1$ ו $b_l = 1$. יהי r המספר הקטן ביותר כך ש $a_r \notin \mathfrak{m}$. יהי s המספר הקטן ביותר כך ש $b_s \notin \mathfrak{m}$. אזי $0 \leq r \leq k$, $0 \leq s \leq l$ ו

$$.\Big(\sum_{i=r}^{k} a_i X^i\Big)\Big(\sum_{j=s}^{l} b_j X^j\Big) \equiv X^n \mod \mathfrak{m}$$

אלו היה $r < k$ או $s < l$, היה $r + s < k + l = n$ ולכן $a_r b_s \equiv 0 \mod \mathfrak{m}$ בסתירה להנחה. לכן, $r = k$ ו $s = l$. זה אומר ש g ו h הם פולינומי וירשטרס. ∎

משפט יג.ט (משפט הפריקות החד ערכית): *לחוג טורי החזקות* $R_n = K[[X_1, \ldots, X_n]]$ *יש פריקות חד ערכית.*

הוכחה: יהי $f \in R_n$ אבר שונה מאפס. למה יג.ו נותנת אוטומורפיזם τ של R_n כך ש $\tau(f)(0, \ldots, 0, X_n) \neq 0$. אם נחליף את f ב $\tau(f)$, נוכל להניח ש $f(0, \ldots, 0, X_n) \neq 0$. מכאן ש $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i X_n^i$, באשר $f_i \in R_{n-1}$ וקיָם d גדול או שוה לאפס כך ש $f_0, \ldots, f_{d-1}$ שיָכים לאידאל המרבי $\mathfrak{M}_{n-1}$ של R_{n-1} הנוצר על ידי $X_1, \ldots, X_{d-1}$ ו $f_d(0, \ldots, 0) \neq 0$ כלומר $f_d \in R_{n-1}^{\times}$. לכן f הנו טור ויֶרשטרס. לפי משפט ההכנה של ויֶרשטרס, $f = gu$, באשר $g \in R_{n-1}[X_n]$ הוא פולינום ויֶרשטרס ממעלה d ו $u \in R_n^{\times}$. הנחת אנדוקציה על n נותנת ש R_{n-1} בעל פריקות חד ערכית. לכן, גם $R_{n-1}[X_n]$ בעל פריקות חד ערכית. קיָמים אפוא אי פריקים ומתֻקנים $g_1, \ldots, g_r$ ב $R_{n-1}[X_n]$ כך ש $g = g_1 \cdots g_r$. לפי למה יג.ח, $g_1, \ldots, g_r$ הם פולינומי וירשטרס. לכן, לפי למה יג.ז, $g_1, \ldots, g_r$ אי פריקים ב $R_{n-1}[[X_n]] = R_n$.

בזאת הוכחנו את קיום הפרוק של f. כדי להוכיח את היחידות של (עד כדי חֲברות) נניח ש $f = f_1 \cdots f_s$ הוא פרוק לגורמים אי פריקים ב R_n. אזי, $\prod_{i=1}^{s} f_i(0, \ldots, 0, X_n) = f(0, \ldots, 0, X_n) \neq 0$. לכן, $f_i(0, \ldots, 0, X_n) \neq 0$. משפט ההכנה של ויֶרשטרס נותן פולינום אי פריק $h_i \in R_{n-1}[X_n]$ ואבר הפיך u_i של R_n כך ש $f_i = h_i u_i$. לכן, $g_1 \cdots g_r u = h_1 \cdots h_s (u_1 \cdots u_s)$. הואיל והמכפלות $g_1 \cdots g_r$ ו $h_1 \cdots h_s$ הן פולינומי ויֶרשטרס, נובע מיחידות ההצגה במשפט ההכנה של ויֶרשטרס ש $g_1 \cdots g_r = h_1 \cdots h_s$ ו $u = u_1 \cdots u_s$. מיחידות הפרוק ב $R_{n-1}[X_n]$ נובע ש $r = s$ ושלאחר מִספור מחדש של $h_1, \ldots, h_s$ כל g_i הנו חבר של h_i. בכך סִיַמנו את הוכחת יחידות הפרוק ב R_n. ∎

הערה יג.י: הכללות של משפט הפריקות החד ערכית. אי אפשר להחליף את K בהוכחת משפט יג.ט בחוג מֻשלם A בעל פריקות חד ערכית. ואכן, בתחילת ההוכחה מגיעים לטור חזקות $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i X_n^i$ שבו $f_i \in R_{n-1}$ לכל i, f_i שיכים לאידאל של R_{n-1} הנוצר על ידי $X_1 \ldots, X_{n-1}$ עבור $i = 0, \ldots, d-1$ ו f_d אינו שיך לאידאל זה. במקרה ש $R_{n-1} = K[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$, התנאי האחרון אומר ש f_d הפיך ואז אפשר להשתמש במשפט ההכנה של ויֶרשטרס. אולם אם $R_{n-1} = A[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$, יתכן עדין שהמקדם החפשי של f_d שיך לאידאל המרבי $\mathfrak{m}$ של A. במקרה זה f_d אינו הפיך ואין אנו יכולים להסיק ש f הנו טור וירשטרס כנאמר בהוכחת משפט יג.ט.

כנראה שאפשר להכליל את ההוכחה ולהחליף את K בחוג הערכה בדיד מֻשלם. באפן כללי יותר, אם A הוא חוג ראשי, יש לחוג טורי החזקות $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ פריקות חד ערכית [Bur, p. 566, exer. 9(c)].

במקרה הכללי משפט הפריקות החד ערכית אינו נכון. לדֻגמה, הוא אינו נכון כאשר

$$A = K(T)[[X_1, X_2, X_3]]/\langle X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \rangle$$

ראה [Sal]. ראה דֻגמה נגדית אחרת בתרגיל 8 בעמוד 565 של [Bur].

לעומת זאת, אם דורשים ש A בנוסף להיותו חוג מקומי מֻשלם שיהיה גם רגולרי, מקבלים ש $A[[X_1,\dots,X_n]]$ בעל פריקות חד ערכית. ביתר דיוק, לפי משפט של Auslander-Buchsbaum כל חוג מקומי רגולרי הנו בעל פריקות חד ערכית [Mat, p. 163]. בנוסף לזה, אם A הנו חוג מקומי רגולרי, אזי גם $A[[X]]$ הנו חוג מקומי רגולרי [Mat, p. 157] ולכן, לפי Auslander-Buchsbaum, יש ל $A[[X]]$ פריקות חד ערכית. לבסוף נאמר שחוג נטר מקומי A עם אידאל מרבי $\mathfrak{m}$ הנו **רגולרי** אם

$$\dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim(A),$$

באשר $\dim(A)$ הנו המספר המרבי d שעבורו קיֶמת סדרה של אידאלים ראשוניים $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_d$.

∎

יד. הממד של חוגי פולינומים

אחת הדרכים למדד את הסבוכיות של חוג R הוא לחשב את המספר המרבי n שעבורו קיֶמת שרשרת

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \cdots \subset \mathfrak{p}_n$$

של פולינומים ראשוניים של R. מספר זה נקרא **ממד קרול** של R ומסֻמן ב $\dim(R)$. מטרתנו היא להוכיח שאם R הוא תחום שלמות הנוצר סופית כחוג מעל שדה K, אזי $\dim(R) = \text{trans.deg}(\text{Quot}(R)/K)$. הכלים הנחוצים להוכחה הם "משפט העליה" "ומשפט התִקון של נטר".

למה יד.א: *יהי S חוג השלם מעל חוג R. אזי $\dim(R) = \dim(S)$.*

הוכחה: תהי $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_n$ שרשרת של אידאלים ראשוניים של S. לכל i, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap R$ הוא אידאל ראשוני של R ולפי תוצאה ו.ט, $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$. לכן, $\dim(S) \le \dim(R)$.

להפך, לפי משפט העלִיָה (משפט ו.יא) כל שרשרת סופית של אידאלים ראשוניים של R נִתנת להרמה לשרשרת סופית של אידאלים ראשוניים של S בעלת אותו האֹרך. לכן, $\dim(R) \le \dim(S)$. אם נצרף אי שויון זה לשויון בפסקה הקודמת נקבל את מסקנת המשפט, $\dim(R) = \dim(S)$. ∎

למה יד.ב (משפט התִקון של נטר): *יהי $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ תחום שלמות הנוצר סופית (כחוג) מעל שדה K ויהי $r = \text{trans.deg}(\text{Quot}(R)/K)$. אזי קיָמים $t_1, \ldots, t_r$ ב R שאינם תלויים אלגברית מעל K כך ש $K[x_1, \ldots, x_n]$ שלם מעל $K[t_1, \ldots, t_r]$.*

הוכחה: אם $x_1, \ldots, x_n$ אינם תלויים אלגברית מעל K, אזי $r = n$ ונוכל לבחֹר $t_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$. אחרת קיֶמת קבוצה לא ריקה I של n־יות $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r)$ של מספרים שלמים אי שליליים ולכל $i \in I$ קיָם $a_i \in K^\times$ כך ש

$$\sum_{\mathbf{i} \in I} a_{\mathbf{i}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} = 0 \,. \tag{1}$$

יהיו $k_2, \ldots, k_n$ מספרים טבעיים ונציב $y_2 = x_2 - x_1^{k_2}, \ldots, y_n = x_n - x_1^{k_n}$ ב (1) כדי לקבל

$$\sum_{\mathbf{i} \in I} a_{\mathbf{i}} x_1^{i_1} (y_2 + x_1^{k_2})^{i_2} \cdots (y_n + x_1^{k_n})^{i_n} = 0 \tag{2}$$

נפתח את הגורם ה j במחֻבר $\mathbf{i}$ של (2) ונקבל פולינום $f_{\mathbf{i},j} \in K[X_1, \ldots, X_n]$ כך ש

$$(y_j + x_1^{k_j})^{i_j} = f_{\mathbf{i},j}(x_1, y_j) + x_1^{k_j i_j} \tag{3}$$

ו $\deg_{X_1}(f_{\mathbf{i},j}) < k_j i_j$. הכפלה של כל הבטויים (3) תתן פולינום $f_{\mathbf{i}} \in K[X_1, \ldots, X_n]$ כך ש

$$a_{\mathbf{i}} x_1^{i_1} (y_2 + x_1^{k_2})^{i_2} \cdots (y_n + x_1^{k_n})^{i_n} = f_{\mathbf{i}}(x_1, y_2 \ldots, y_n) + a_{\mathbf{i}} x_1^{i_1 + k_2 i_2 + \cdots + k_n i_n} \tag{4}$$

ו $\deg_{X_1} f_{\mathbf{i}} < k_1 + k_2 i_2 + \cdots + k_n i_n$. אם נסכם את כל הבטויים (3) נקבל מ (2) פולינום $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ כך ש

$$f(x_1, y_2 \ldots, y_n) + \sum_{\mathbf{i} \in I} a_{\mathbf{i}} x_1^{i_1 + k_2 i_2 + \cdots + k_n i_n} = 0 \tag{5}$$

ו $\deg_{X_1} f < \max_{\mathbf{i} \in I} i_1 + k_2 i_2 + \cdots + k_n i_n$. לכן, אם נבחר את $k_2, \ldots, k_n$ כך ש

$$i_1 + k_2 i_2 + \cdots + k_n i_n \neq i_1' + k_2 i_2' + \cdots + k_n i_n'$$

עבור כל שני אברים שונים זה מזה $\mathbf{i}, \mathbf{i}'$ ב I נקבל שאין צמצומים במחֻבר השני באגף ימין של (5) ולכן מהוה (5) משואה מתֻקנת עבור x_1 מעל $K[x_1, y_2 \ldots, y_n]$.

הבחירה של $k_2, \ldots, k_n$ תעשה כך ש $h(k_1, \ldots, k_n) \neq 0$ באשר

$$h(Y_2, \ldots, Y_n) = \prod_{\mathbf{i} \neq \mathbf{i}'} \left[(i_1 + Y_2 i_2 + \cdots + Y_n i_n) - (i_1' + Y_2 i_2' + \cdots + Y_n i_n') \right]$$

הנו פולינום שונה מאפס במקדמים שלמים.

מההגדרות ומ (5) נובע ש $K[x_1, x_2, \ldots, x_n] = K[x_1, y_2, \ldots, y_n]$ שלם מעל $K[y_2, \ldots, y_n]$. בפרט, מעלת הנעלות של $K(y_2, \ldots, y_n)$ מעל K היא כמו זו של $K(x_1, \ldots, x_n)$. אנדוקציה על n נותנת אפוא $t_1, \ldots, t_r \in K[y_2, \ldots, y_n]$ כך ש $K[y_2, \ldots, y_n]$ שלם מעל $K[t_1, \ldots, t_r]$. לכן, גם $K[x_1, \ldots, x_n]$ שלם מעל $K[t_1, \ldots, t_r]$. ∎

משפט יד.ג: *יהי* $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ *תחום שלמות נוצר סופית כחוג מעל שדה* K*, יהי* $F = K(x_1, \ldots, x_n)$ *שדה המנות של* R*. אזי* $\dim(R) = \text{trans.deg}(F/K)$.

הוכחה: נוכיח את המשפט באנדוקציה על $r = \text{trans.deg}(F/K)$. ראשית נמצא לפי משפט יד.ב אברים $t_1, \ldots, t_r \in R$ שאינם תלויים אלגברית מעל K כך ש R שלם מעל $K[t_1, \ldots, t_r]$. לפי למה יד.א, $\dim(R) = \dim(K[t_1, \ldots, t_r])$. לכן, בלי הגבלת הכלליות, $x_1, \ldots, x_n$ אינם תלויים אלגברית מעל K.

לכל i בין 1 ל n נסמן $\mathfrak{q}_i = \sum_{i=1}^n R x_i$. אזי $R/\mathfrak{q}_i \cong K[x_{i+1}, \ldots, x_n]$ הנו תחום שלמות ולכן $\mathfrak{q}_i$ הוא אידאל ראשוני של R. קבלנו אפוא שרשרת אידאלים ראשוניים $0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_n$ מארך n. לכן, $n \leq \dim(R)$. נותר לנו אפוא להוכיח שהארך של כל שרשרת עולה של אידאלים ראשוניים של R אינו עולה על n.

תהי אפוא $0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$ שרשרת עולה של אידאלים ראשוניים של R מארך m. נבחר $f \in \mathfrak{p}_1$, $f \neq 0$. אחד הגורמים האי פריקים של f שַיָך ל $\mathfrak{p}_1$. לכן, בלי הגבלת הכלליות נוכל להניח ש f אי פריק. הואיל ו R הנו חוג בעל פרוק חד ערכי Rf הנו אידאל ראשוני של R. לכן, R/Rf הנו תחום שלמות. נוסיף תג לאברים ואידאלים של R כדי לציֵן את השארית שלהם ביַחס ל Rf. אזי $R' = K[x'_1, \ldots, x'_n]$ ו $f(x'_1, \ldots, x'_n) = 0$. בפרט $x'_1, \ldots, x'_n$ תלויים אלגברית מעל K ולכן, $\mathrm{trans.deg}(K(x'_1, \ldots, x'_n)/K)) \leq n-1$. מהנחת האנדוקציה עולה ש $\dim(R') \leq n-1$. מאידך, $\mathfrak{p}'_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}'_m$ היא שרשרת עולה של אידאלים ראשוניים של R' מארך $m-1$. לכן, $m-1 \leq n-1$, כלומר $m \leq n$, כפי שהיה להוכית. ∎

עתה נרצה להחריף את משפט יד.ג ולהוכיח שהארך של כל שרשרת מרבית של תחום שלמות R הנוצר סופית מעל שדה K הנו $\dim(R)$.

למה יד.ד: *יהי* $\alpha\colon R \to R'$ *אפימורפיזם של חוגים. אזי* $\dim(R) \geq \dim(R')$. *אם* R *ו* R' *נוצרים סופית מעל* K *ו* $\alpha(a) = a$ *לכל* $a \in K$ *(במקרה זה נאמר ש* α *הנו* **אפימורפיזם-**K*), ו* $\dim(R) = \dim(R')$*, אזי* α *הנו איזומורפיזם.*

הוכחה: תהי $\mathfrak{p}'_0 \subset \mathfrak{p}'_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}'_m$ שרשרת עולה של אידאלים ראשוניים של R'. לכל i נסמן $\mathfrak{p}_i = \alpha^{-1}(\mathfrak{p}'_i)$. אזי $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$ היא שרשרת עולה של אידאלים ראשוניים של R. לכן, $\dim(R) \geq \dim(R')$.

נניח עתה ש R ו R' נוצרים סופית מעל K, ש α הנו אפימורפיזם-K וש $\dim(R) = \dim(R')$. לפי למה יד.ג, מעלת הנעלות r של $\mathrm{Quot}(R)$ מעל K שוה לזו של $\mathrm{Quot}(R')$. נבחר לפי משפט התקון של נטר (למה יד.ב) אברים $t'_1, \ldots, t'_r \in R'$ שאינם תלויים אלגברית מעל K. לכל i נבחר $t_i \in R$ כך ש $\alpha(t_i) = t'_i$. אזי גם $t_1, \ldots, t_r$ אינם תלויים אלגברית מעל K. אחרת, היה קיָם פולינום $0 \neq f \in K[X_1, \ldots, X_r]$ כך ש $f(t_1, \ldots, t_r) = 0$. הפעלה של α היְתה נותנת $f(t'_1, \ldots, t'_r) = 0$, בסתירה לבחירת $t'_1, \ldots, t'_r$. לכן, $\mathrm{Quot}(R)$ אלגברי מעל $K(t_1, \ldots, t_r)$.

אלו α לא היה איזומורפיזם, היה קיָם $x \in R$, $x \neq 0$, כך ש $\alpha(x) = 0$. לפי הפסקה הקודמת קיָמים $g_0, \ldots, g_n \in K[X_1, \ldots, X_r]$ כך ש

$$g_n(\mathbf{t})x^n + \cdots + g_1(\mathbf{t})x + g_0(\mathbf{t}) = 0 \tag{6}$$

ו $g_0 \neq 0$. לכן, גם $g_0(\mathbf{t}') \neq 0$. מאידך, הפעלת α על (6) נותנת $g_0(\mathbf{t}') = 0$. סתירה זו מוכיחה ש α הנו איזומורפיזם. ∎

למה יד.ה: *יהי* $f \in R = K[X_1, \ldots, X_n]$ *פולינום אי פריק. אזי* $\dim(R) = n$ *ו* $\dim(R/Rf) = n-1$.

הוכחה: שדה המנות של R הנו שדה הפונקציות הרציונליות $K(X_1, \ldots, X_n)$ שמעלת הנעלות שלו מעל K הנה n. לפי משפט יד.ג, $\dim(R) = n$.

מההנחה ש f אי פריק, נובע ש R/Rf הנו תחום שלמות. נסמן ב $\alpha\colon R \to R/Rf$ את העתקת המנה. אזי α אינו איזומורפיזם ולכן, לפי למה יד.ד ולפי הפסקה הראשונה של ההוכחה, $\dim(R/Rf) \leq n-1$.

מאידך, נניח בלי הגבלת הכלליות ש X_n מופיע ב f. נבחר $n-1$ אברים $y_1, \ldots, y_{n-1}$ שאינם תלויים אלגברית מעל K ונבחר y_n בסגור האלגברי של $K(y_1, \ldots, y_{n-1})$ כך ש $f(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = 0$. אזי ממד הנעלות של $K(y_1, \ldots, y_n)$ מעל K הנו $n-1$ ולכן, לפי משפט יד.ג, $\dim(K[y_1, \ldots, y_n]) = n-1$. נתבונן עתה באפימורפיזם־K $\varphi\colon R \to K[y_1, \ldots, y_n]$ המֻגדר על ידי $\varphi(X_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$. לפי הבניה, מתאפס אפימורפיזם זה על Rf ולכן הוא משרה אפימורפיזם $\bar{\varphi}\colon R/Rf \to K[y_1, \ldots, y_n]$. לפי למה יד.ד, $\dim(R/Rf) \geq \dim(K[y_1, \ldots, y_n]) = n-1$. אם נצרף אי שויון זה לאי השויון שהושג בפסקה הקודמת, נקבל ש $\dim(R/Rf) = n-1$. ∎

משפט יד.ו: *יהי R תחום שלמות נוצר סופית מעל שדה K בעל ממד קרול r. אזי הארך של כל שרשרת עולה ממש של אידאלים ראשוניים הוא r.*

הוכחה: תהי $\mathfrak{q}_m \subset \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_0 \subset 0$ שרשרת עולה ממש מרבית של אידאלים ראשוניים של R. למה יד.ב ולמה יד.ג נותנים אברים $t_1, \ldots, t_r$ של R שאינם תלויים אלגברית מעל K כך ש R שלם מעל $K[\mathbf{t}]$, באשר $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_r)$. נסמן, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap K[\mathbf{t}]$, $i = 0, \ldots, m$. אזי $\mathfrak{p}_0$ הנו אידאל ראשוני שונה מאפס מזערי של $K[\mathbf{t}]$. אחרת היה קיָם ל $K[\mathbf{t}]$ אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ שונה מאפס שהיה מוכל ממש ב $\mathfrak{p}_0$. לפי משפט הי‍ְרידה (משפט ו.יד), מונח מעל $\mathfrak{p}$ אידאל ראשוני $\mathfrak{q}$ של R המוכל ב $\mathfrak{q}_0$. לפי תוצאה ו.ט, $\mathfrak{q}$ שונה הן מ 0 והן מ $\mathfrak{q}_0$, בסתירה למזעריות של $\mathfrak{q}_0$. נבחר פולינום $f \in \mathfrak{q}_0$. על ידי פרוק לגורמים אי פריקים נוכל להניח ש f אי פריק. לכן, $K[\mathbf{t}]f$ הנו אידאל ראשוני שונה מאפס. מהמזעריות של $\mathfrak{q}_0$ נובע ש $\mathfrak{q}_0 = K[\mathbf{t}]f$. לפי למה יד.ה, $\dim(K[\mathbf{t}]/K[\mathbf{t}]f) = r-1$. כמו כן, שרשרת האידאלים הראשוניים $\mathfrak{p}_m/\mathfrak{p}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_0 \subset 0$ של $K[\mathbf{t}]/K[\mathbf{t}]f$ הנה מרבית. אנדוקציה על r נותנת של $m-1 = r-1$. לכן, $m = r$, כנטען. ∎

1. הוכח שכל חוג ראשי A הנו בעל פריקות חד ערכית. רמז: אם אבר $a \in A$ שאינו אחדה אינו מתפרק למכפלה של מספר סופי של אברים אי פריקים, אזי אפשר לבנות באנדוקציה סדרה של אברים $a_1, a_2, a_3, \dots$ בעלי אתה תכונה שכל אחד מהם מחלק את קודמו. עתה התבונן באידאל $\bigcup_{i=1}^{\infty} Aa_i$ כדי לקבל סתירה. כדי להוכיח את חד ערכיות הפרוק הוכח שאם p הנו אבר אי פריק, אזי האידאל Ap מרבי.

2. יהי K שדה ו X משתנה. נצל את החִלֻקה עם שארית ב $K[X]$ כדי להוכיח שחוג הפולינומים $K[X]$ הנו חוג ראשי. הסק ש $K[X]$ הוא בעל פריקות חד ערכית.

3. יהי R תחום שלמות בעל פריקות חד ערכי. נגדיר את **התכן** של פולינום $f \in R[X]$ כמחלק המשֻתף המרבי של מקדמיו. הוכח ש $\mathrm{cont}(fg) = \mathrm{cont}(f)\mathrm{cont}(g)$ לכל שני פולינומים $f, g \in R[X]$ (הלמה של גאוס).

4. השתמש בלמה של גאוס כדי להוכיח שאם R הנו תחום שלמות בעל פריקות חד ערכית, אזי גם לחוג הפולינומים $R[X]$ יש פריקות חד ערכית. הסק שהחוגים $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ ו $K[X_1, \dots, X_n]$, באשר K, שדה הנם חוגים בעלי פריקות חד ערכית.

5. הוכח שאם x הנו אבר אֲפיסי של חוג A, אזי $1 - x \in A^{\times}$. הסק שהסכום של אבר אפיסי ואבר הפיך הנו הפיך.

6. נצל את הלמה של צורן כדי להוכיח שלכל מרחב וקטורי יש בסיס.

7. נצל את משפטון א.ג כדי לשחזֵר הוכחה של אמיל ארטין שלכל שדה K יש סגוֹר אלגברי. הדרכה: לכל פולינום אי פריק f ב $K[X]$ נבחר משתנה X_f ונבנה את חוג הפולינומים A במשתנים X_f מעל K. נסמן ב $\mathfrak{a}$ את האידאל של A הנוצר על ידי כל הפולינומים $f(X_f)$. הוכח ש $\mathfrak{a}$ נאות. בחר אידאל מרבי $\mathfrak{m}$ של A המקיף את $\mathfrak{a}$. יהי $K_1 = A/\mathfrak{m}$. הוכח ש K_1 הנו שדה המקיף את K שבו יש לכל פולינום לא קבוע ב $K[X]$ שרש. בנה באנדוקציה סדרה עולה של שדות $K \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots$ כך שלכל פולינום לא קבוע עם מקדמים ב K_i יש שרש ב K_{i+1}. עמֹד על כך שהאחוד $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ הנו שדה סגור אלגברית המקיף את K. לבסוף, סמֵן ב $\tilde{K}$ את אסף כל אברי L שהם אלגבריים מעל K. הוכח ש $\tilde{K}$ הנו הסגוֹר האלגברי של K.

8. יהי $\mathfrak{m}$ האידאל ב $K[X,Y]$ הנוצר על ידי X ו Y. הוכח ש $\mathfrak{m}$ מרבי ומקיף ממש את שני האידאלים הראשוניים $K[X,Y]X$ ו $K[X,Y]Y$.

9. יהיו $\mathfrak{a}$ ו $\mathfrak{b}$ אידאלים בחוג A. נניח ש $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ו $\sqrt{\mathfrak{b}}$ זרים זה לזה. הוכח ש $\mathfrak{a}$ ו $\mathfrak{b}$ זרים זה לזה.

10. יהי A חוג שונה מאפס. הוכח בעזרת משפטון א.ג שיש ל A אידאל ראשוני מזערי ביחס להכלה.

11. יהי $A[X]$ חוג הפולינומים במשתנה X מעל חוג A. הוכח שכל אידאל ראשוני של A הוא חתוך של A עם אידאל ראשוני של $A[X]$.

12. יהי $A[X]$ חוג הפולינומים ב X מעל חוג A ויהי $f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ פולינום ב $A[X]$.

(א) הוכח ש $f \in A[X]^\times$ אם ורק אם $a_0 \in A^\times$ ו $a_1, \dots, a_n$ אֲפיסיים.

(ב) הוכח ש f אפיסי אם ורק אם $a_1, a_1, \dots, a_n$ אפיסיים.

(ג) הוכח ש f מחלק אפס אם ורק אם קיָם $a \in A$ שונה מאפס כך ש $af = 0$.

(ד) פולינום $f = \sum_{i=1}^n a_i X^i \in A[X]$ מכֻנה **קדום** אם $\sum_{i=0}^n A_i a_i = A$, לחלופין, אין קים אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ של A המכיל את כל המקדמים a_i (משפטון א.ג). יהי $g \in A[X]$ פולינום נוסף. הוכח ש fg קדום אם ורק אם גם f וגם g קדומים (הלמה של גאוס).

13. יהיו m ו n מספרים טבעיים זרים זה לזה. הוכח ש $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$.

14. יהיו A חוג, $\mathfrak{a}$ אידאל ו M מודול־A. הוכח ש $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M \cong M/\mathfrak{a}M$.

15. יהיו A חוג מקומי ו M, N מודולי־A נוצרים סופית. הוכח שאם $M \otimes N = 0$, אזי $M = 0$ או $N = 0$.

16. תהי $(M_i)_{i \in I}$ משפחה של מודולי־A ו $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. הוכח שכל M_i הנו מודול־A שטוח אם ורק אם M שטוח.

17. הוכח שחוג הפולינומים $A[X]$ מעל חוג A הנו מודול־A שטוח.

18. תהי S קבוצה כפלית של חוג A ויהי M מודול־A נוצר סופית. הוכח ש $S^{-1}M = 0$ אם ורק אם קיָם $s \in S$ כך ש $sM = 0$.

19. יהי $\mathfrak{a}$ אידאל של חוג A ונתבונן בקבוצה הכפלית $S = 1 + \mathfrak{a}$.

(א) הוכח ש $S^{-1}\mathfrak{a}$ מוכל בשרשון יעקבסון של $S^{-1}A$.

(ב) השתמש ב (א), בלמה של נקימה בתרגיל 19 כדי להוכיח שאם M הוא מודול־A נוצר סופית ו $M = \mathfrak{a}M$, אזי קיָם $x \equiv 1 \mod \mathfrak{a}$ כך ש $xM = 0$.

20.

(א) הוכח שאם $A_\mathfrak{p}$ אפיסי לכל אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ של חוג A, אזי A אפיסי.

(ב) תן דֻגמה לחוג A שבו $A_\mathfrak{p}$ הנו תחום שלמות עבור כל אידאל ראשוני $\mathfrak{p}$ למרות ש A עצמו אינו תחום שלמות.

21. הומומורפיזם $\alpha\colon A \to B$ יכֻנֶה **שלם** אם B הנו הרחבה שלמה של $\alpha(A)$. הוכח שבמקרה זה ההעתקה המושרית $\alpha^*\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ סגורה. במִלים אחרות, α^* מעתיק קבוצות סגורות לקבוצות סגורות.

22. יהי A חוג ראשי. נסמן ב K את שדה המנות של A. הוכח ש $A_{\mathfrak{p}}$ הנו חוג הערכה של K לכל אידאל ראשוני $\mathfrak{p} \neq 0$ של A.

23. תן דֻגמה להרחבה שלמה $A \subseteq B$ של תחומי שלמות, לאידאל מרבי $\mathfrak{m}$ של A ולאידאל מרבי $\mathfrak{n}$ של B המונח מעל $\mathfrak{m}$ כך ש $B_{\mathfrak{n}}$ אינו שלם מעל $A_{\mathfrak{m}}$.

24. יהי d מספר שלם שאינו מתחלק בִרבוע. ויהי B הסגוֹר השלם של $\mathbb{Z}$ ב $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. הוכח ש $B = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$ אם $d \equiv 3 \mod 4$ ו $B = \frac{1}{2}(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d})$ אם $d \equiv 1 \mod 4$.

25. יהיו $A \subseteq B$ חוגים כך ש B שלם מעל A.

(א) הוכח שאם $x \in A$ הפיך ב B, הוא הפיך גם ב A.

(ב) הוכח ש $J(B) \cap A = J(A)$.

26. יהיו $A \subseteq B$ תחומי שלמות. נסמן ב A' את הסגוֹר השלם של A ב B. יהיו $f, g \in B[X]$ פולינומים מתֻקנים (כלומר שהמקדמים העליונים שלהם שוים ל 1) כך ש $fg \in A'[X]$. הוכח ש $f, g \in A'[X]$.

27. יהי K שדה, $A = K[X, Y]$ ו $\mathfrak{q} = AX + AY^2$. הוכח שהאידאל $\mathfrak{q}$ מקדים, ש $\mathfrak{p} = AX + AY = \sqrt{\mathfrak{q}}$, ש $\mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ וש $\mathfrak{q}$ אינו חזקה של שום אידאל ראשוני של A.

28. יהי M מודול מעל חוג A ו M_1, M_2 תת מודולים. הוכח שאם M/M_1 ו M/M_2 נטריים, אזי גם $M/(M_1 \cap M_2)$ נטרי.

29. יהי M מודול נטר מעל חוג A. יהי $\mathfrak{a} = \{a \in A \mid aM = 0\}$. הוכח ש $A/\mathfrak{a}$ הנו חוג נטר.

30. יהי A חוג נטר ונסמן $X = \mathrm{Spec}(A)$. הוכח:

(א) כל סדרה יורדת של קבוצות סגורות עֻמידה.

(ב) כל תת קבוצה של X דחוסה.

31. הוכח שאידאל נוצר סופית $\mathfrak{a}$ של חוג A הנו **אפיסי** (כלומר קים n כך ש $\mathfrak{a}^n = 0$) אם ורק אם כל יוצר שלו אפיסי.

32. יהי A חוג נטר ו $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ טור חזקות פורמלי עם מקדמים ב A. הוכח ש f אפיסי אם ורק אם כל אחד מהמקדמים a_i אפיסי.

33. יהיו A חוג, $\mathfrak{a}$ אידאל ו b אבר של A. נניח שהאידאלים $\mathfrak{a} + Ab$ ו $(\mathfrak{a} : Ab) = \{a \in A \mid ab \in \mathfrak{a}\}$ נוצרים סופית. אזי גם $\mathfrak{a}$ נוצר סופית. רמז: השתמש באיזומורפיזם $\mathfrak{a}/\mathfrak{a} \cap Ab \cong (\mathfrak{a} + Ab)/Ab$ ובזהות $\mathfrak{a} \cap Ab = (A : Ab)b$.

34. יהי A חוג שבו כל אידאל ראשוני נוצר סופית. הנח בשלילה ש A אינו חוג נטר. סמן ב $\mathcal{A}$ את אסף כל האידאלים של A שאינם נוצרים סופית. הוכח בעזרת הלמה של צורן שיש ב $\mathcal{A}$ אברים מרביים. הוכח שכל אבר מרבי של $\mathcal{A}$ הנו אידאל ראשוני של A. הסק מסתירה זו ש A הנו חוג נטר (זהו משפט של כהן, השותף של זריצקי לחבור הספר Commutative Algebra).

35. יהי K שדה סגור אלגברית. תהי V הקבוצה האלגברית המֻגדרת על ידי קבוצת פולינומים $f_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$, $i \in I$. הוכח שקיֶמת תת קבוצה סופית I_0 של I כך ש V מֻגדרת על ידי ה f_i־ים שעבורם $i \in I_0$.

36. יהי M מודול נטר מעל חוג A ויהי α אפימורפיזם של M על עצמו. הוכח ש α איזומורפיזם.

37. יהיו M מודול נוצר סופית מעל חוג A ו $\mathfrak{a}$ אידאל של A המקיֵם $\mathfrak{a}M = M$. השתמש באנדוקציה על מספר היוצרים של M כדי להוכיח שקיָם $u \in A$ כך ש $uM = 0$ ו $u \equiv 1 \mod M$ (ראה גם תרגיל 19).

38. תן דֻגמה למודול M הנוצר סופית מעל חוג A ולאפימורפיזם $\alpha\colon M \to M$ שאינו איזומורפיזם.

39. יהי $\mathfrak{a}$ אידאל נוצר סופית של חוג A. נניח ש $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$. אזי קיָם אבר $a \in \mathfrak{a}$ כך ש $a^2 = a$ (אבר כזה מכֻנה **אידֶמְפוטנטי** (idempotent)) ו $\mathfrak{a} = Aa$.

40. יהי A חוג ו m, n מספרים טבעיים כך ש $A^n \cong A^m$. הוכח ש $m = n$.

41. יהי $\mathfrak{m}$ האידאל מרבי של חוג מקומי A. נניח ש $\mathfrak{m}$ ראשי ו $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$. הוכח ש שכל אידאל שונה מאפס של A הנו חזקה של $\mathfrak{m}$. בפרט, A הנו חוג ראשי.

42. יהי K שדה סגור אלגברית ו $\mathfrak{m}$ אידאל מרבי של $A = K[X_1, \ldots, X_n]$. אזי קימים $a_1, \ldots, a_m \in K$ כך ש $\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^{n} A(X - a_i)$.

43. יהי K שדה בעל אפיון שונה מ 2. נסמן $A = K[[X, Y]]$ ו $\mathfrak{p} = A(X^2 - Y^3)$. הוכח ש $\mathfrak{p}$ הנו אידאל ראשוני של A.

44. יהי M מודול מעל חוג A ויהיו $f_1, \ldots, f_r$ אברים שונים מאפס של A כך ש $A = \sum_{i=1}^{r} Af_i$. לכל i נסמן ב $\alpha_i\colon M \to M_{f_i}$ את ההומומורפיזם הטבעי המֻגדר על ידי $\alpha_i(x) = \frac{x}{1}$.

(א) הוכח שכל תת מודול N של M מקיֵם $N = \bigcap_{i=1}^{r} \alpha_i^{-1}(A_{f_i} \cdot \alpha_i(N))$.

(ב) הוכח שאם כל אחד מהמודולים M_{f_i} נטרי, אזי גם M נטרי. רמז: השתמש ב (א) כדי להוכיח שכל סדרה עולה של תת מודולים של M עֲמידה.

מפתח העִנְיָנים

Bibliography

[AtM] M.F. Atiyah and I.G. Mackdonald, *Introduction to Commutative Algebra,* Addison–Wesley, Reading, 1969.

[Bou] N. Bourbaki, *Commutative Algebra, Chapters 1–7,* Springer, Berlin, 1989.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Lan] S. Lang, *Algebra, Third Edition,* Eddison-Wesely, Reading, 1993.

[Mat] H. Matsumura, *Commutative ring theory,* Cambridge studies in advanced mathematics **8**, Cambridge University Press, Cambridge 1994.

[Sal] *Su un problema post da P. Samuel,* Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sc. Fis. Mathem **40** (1966), 801-803.

[ZaS1] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra I,* Springer, New York, 1975.

[ZaS2] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra II,* Springer, New York, 1975.

29 March, 2011