מיקרו כלכלה 1

צחי גלבוע

סיכום שיעור 1 ובו יסופר: מה בערך אפשר לצפות מהמקצוע ולמה (אולי) כדאי ללמוד אותו

נפתח בהתאמת ציפיות: למה אנחנו לומדים כלכלה ומה אנו מצפים מהמקצוע? ניתן לזהות שלוש ביקורות מרכזיות על הכלכלה:

א. הכלכלה, למרות שאיפותיה להיות מדע, ולמרות השימוש הנרחב שהיא עושה בכלים מתמטיים ובנתונים כמותיים, אינה מצליחה לחזות תופעות כפי שהיינו רוצים לראות אותה חוזה. איננו יודעים מה יהיה שער הרבית עוד שנה, או מה תהיה רמתו של מדד מניות נתון. ואם אנחנו זקוקים לתזכורת, הרי שהמשבר שהתחיל ב- 2008 מוכיח את מגבלות החיזוי. נכון, היו כלכלנים בודדים שחזו את המשבר, אך רוב הכלכלנים לא צפו אותו. יתרה מזו, אין לנו היום דרך לדעת האם החוזים נכונה אכן השתמשו בשיטות טובות שיספקו תחזיות טובות גם בעתיד, או שהיו ברי מזל. והעובדה היא שלכלכלנים שונים יש דעות שונות למדי לגבי אופן התפתחות המשבר – האם הוא מאחורינו אם לאו, האם ההתאוששות תהיה בצורת V או W או...

ב. הכלכלה מניחה הנחות לא סבירות. בפרט, בכל הנוגע להתנהגות פרטים, המקצוע מבוסס על הנחות רציונליות שאינן נשמעות סבירות על פניהן, וחמור מכך, הן מופרכות חדשות לבקרים בניסויים פסיכולוגיים. פרויקט המחקר שייסדו דניאל כהנמן ועמוס טברסקי (שעליו קיבל כהנמן פרס נובל[1]), ואשר רבים המשיכו בו, הוכיח שההנחות המקובלות בכלכלה בנוגע להתנהגות רציונלית אינן תקפות.

ג. לא זו בלבד שאין הכלכלה מדע מדויק או מדע מוצלח, היא אפילו לא עושה את מלאכתה ביושר. אין זאת שהכלכלנים מאמינים ברציונליות הפרטים וביתרונות השוק החופשי רק מתוך אמונה אקדמית כנה, אלא שהם בוחרים בתיאוריות שלהם מתוך אינטרסים אישיים וקבוצתיים. יש להם הרבה מה להרוויח מהאמונה בשוק החופשי – צאו וראו כמה מהפרופסורים לכלכלה גם נהנים ממשכורות כיועצים וחברי דירקטוריונים. ולכן, הם בסך

---

[1] עמוס טברסקי הלך לעולמו כשש שנים קודם לכן.

הכל קבוצה חברתית המנצלת את כוחה כדי לקדם את האינטרסים שלה, כמו הרבה קבוצות אחרות, והתנהלותם ה"מדעית" רחוקה מאוד מהאידאל של "מדע אובייקטיבי".

בכל שלוש הביקורות יש גרעין של אמת או אף יותר מכך. אקדים ואומר שבמהלך כל הקורס העלאת השאלות הללו תהיה לא רק לגיטימית אלא גם מתבקשת, והייתי רוצה לקוות שלא נשכח אותן גם כשנטבע בים של עקומות. זה יהיה תרגיל טוב להעלות את השאלות – לאו דוקא באמצע משפט או טיעון, אך לפחות אחת לשבוע, ואם לא בפורום כל הכיתה, אזי לפחות לעצמנו. וכנשאל את השאלות הללו, כדאי לזכור כמה דברים שיש לומר להגנת הכלכלה. למרות שיש חפיפה מסוימת בטיעונים, ננסה ללכת לפי הסדר:

א. ראשית יש להכיר במגבלות הנובעות מעצם העיסוק. מכיון שאנו דנים במדעי החברה, ומושא המחקר הם אנשים שקוראים את המחקר ויכולים להגיב לו, יש רמת דיוק של תחזיות שלא סביר לצפות לה. למשל, אם נחזה שתהיה התמוטטות בשוק המניות מחרתיים, ותחזיותינו תהיינה מדעיות ומדויקות בדרך-כלל, סביר ששוק המניות יתמוטט כבר מחר. אם אנחנו רוצים להגביל את עצמנו לתחזיות שלא תגרומנה להפרכת-עצמן, מראש אנו מוגבלים במידת הדיוק.

שנית, אנו דנים במערכות מסובכות להפליא. חיזוי התפתחויות במשק בכללותו דומה מבחינה זו לחיזוי מזג אויר או רעידות אדמה: גם שם מדובר במערכות גדולות מאוד, שתתי-המערכות שלהן מקושרות באופן הדוק. כדי לתת חיזויים מקורבים לטווח הקצר, ניתן לבודד תת-מערכת ולחזות את התפתחותה בדיוק מסוים, וכך, למשל, יש לנו תחזיות מזג-אויר למספר הימים הקרובים. אך הקשרים בין תתי-המערכות במוקדם או במאוחר ייכנסו למשחק ויטרפו את הקלפים. ואכן, אין לנו חיזוי מדויק של מזג האויר לטווח של עשרה ימים או יותר.

חיזויים מטאורולוגיים וסיסמולוגיים הם דוגמה לתורת ה"כאוס", על-פיה מערכות דטרמיניסטיות ופשוטות ביותר (אך לא לינאריות) יכולות ליצור התנהגות שנראית אקראית ולא ניתנת לחיזוי בטווח הארוך. ליתר דיוק: כדי לנצל את הדטרמיניסטיות של המערכת לביצוע חיזוי מדויק של התפתחותה, יש צורך למדוד את כל הפרמטרים המאפיינים אותה ברגע נתון. אם אנו מודדים רק חלק מהם (עובדה הנובעת כמובן

ממגבלות מציאותיות על המדידה), נוכל לחזות את התהליך רק לטווח זמן לא גדול, שאחריו אותם פרמטרים שלא מדדנו יתחילו להשפיע על התחזית באופן לא זניח.

חשוב לזכור שהדבר נכון לגבי מערכות מטאורולוגיות וסיסמולוגיות, שלגביהן אנו מאמינים שיש לנו הבנה מושלמת של התהליכים הבסיסיים המניעים אותן. הפיזיקאים מאמינים שפיזיקה ניוטונית – פשוטה, דטרמיניסטית ומובנת – היתה מספיקה לצורך חיזוי אמין אילו רק כל הפרמטרים היו ניתנים למדידה. לעומת זאת, בכלכלה אין לנו ידע מקביל של התהליכים הבסיסיים. יש לנו קירובים מסוימים, אך אנחנו לא מאמינים בהם באותה רצינות שבה מאמינים פיזיקאים בפיזיקה ניוטונית. כך שאין לקוות שנוכל לספק חיזויים אפילו ברמה של המטאורולוגיה והסיסמולוגיה, ומכיון שאפילו אלה מוגבלים (בגלל סיבוך המערכות), מה לנו כי נלין?

ואם נשמע את ההן מבין שטי הלאו, נראה כמה נקודות אור:

i) כמו במערכות פיזיקאליות, אם ניתן לבודד תת-מערכת שאיננה גדולה או מסובכת מדי, יש לקוות שניתן יהיה לחזות את התנהגותה. שני נימוקים יש לאופטימיות זו: ראשית, במערכת קטנה ופשוטה ניתן אולי להבין את התהליכים ברמה שמאפשרת חיזוי ע"י גירוד נמרץ של פדחתנו, או, במלים אחרות, בזכות חשיבה אנליטית ופיתוח תיאוריות. שנית, מערכות מבודדות מאפשרות איסוף נתונים ולמידה זו על זו. באופן אידאלי, ניתן אולי לערוך ניסויים. אך גם אם ניסוי מעבדתי לא תמיד אפשרי, היכולת לבודד תת-מערכות מאפשרת לנו לעבוד עם מסדי נתונים גדולים שבהם יש אי-תלות סיבתית בין תצפיות שונות, ומשם צומחת התקווה לידע מדעי. דוגמאות להבנה שכזו בכלכלה יכולות להיות הבנת התנהגות שוק בודד (שיווי משקל חלקי), חיזוי התנהגות של מערכות כמו מכרזים (למכירת מוצרים), או של שיטות הצבעה ועוד.

ii) מערכות גדולות ומסובכות עדיין מאפשרות חיזויים בטווח הקצר ולעתים הבינוני (ומכיון שלא הגדרתי מהם קבועי הזמן של "קצר" או "בינוני", אני בטח צודק).

iii) מערכות גדולות ומסובכות מאפשרות חיזוי גלובלי גם לטווח ארוך. למשל, גם אם איננו יכולים לחזות את הטמפרטורה בעוד עשרה ימים, אנחנו די בטוחים שהטמפרטורה הממוצעת בחודש יוני (בארץ) תהיה גבוהה מאשר בדצמבר, גם אם

מדובר בטווח של 5 או 10 שנים מהיום. באופן דומה, ניתן אולי לחזות התפתחויות כלכליות גלובליות, כגון עליה במידת אי-השוויון במערכת כלכלית מסוימת, גם אם לא נוכל לחזות בדיוק איזה פרט יתעשר ואיזה לא.

ב. כאן אולי המקום להצהיר, אחת ולתמיד, קבל עם ועדה, ובאופן שאינו משתמע לשתי פנים: שום תיאוריה כלכלית אינה נכונה. הנה, אמרנו את זה וכבר אנחנו מרגישים יותר טוב. המהדרין יטענו שהדבר נכון גם לגבי תיאוריות במדעי הטבע: גם שם התיאוריות הן רק קירובים, מותנות בהנחות שונות, ולעולם אינן מדויקות לחלוטין. אך איני אוהב את ההשוואה הזו – איפה אנחנו ואיפה הם. אז נעזוב אותם בשקט, או שנודה שאפילו לרמת הנכונות המותנית המקובלת במדעי הטבע אין לנו סיכוי להגיע בעתיד הנראה לעין. התיאוריות שלנו הן במקרה הטוב קירובים, ולאו דווקא במובן הנומרי. המודלים שלנו לפעמים קרובים למציאות רק באיזשהו מרחב אמורפי-משהו של משלים ואסוציאציות. לעתים קרובות המודלים מספקים הבנה טובה יותר של המציאות בלי שיתנו חיזויים נומריים כלל, ובודאי שלא חיזויים נומריים טובים.

לאור זאת, השאלה שעלינו לשאול את עצמנו איננה האם תיאוריה מסוימת היא נכונה או לא, אלא האם היא לא-נכונה באופן מעניין ומשמעותי, באופן שמשנה את המסקנות הנלמדות ממנה. אם התיאוריה שוגה פה גם שם, אך מעבירה מסר נכון, מאוד ייתכן שנרצה לשמור אותה עמנו.

מהו "נכון"? שאלה קשה. לאנשים שונים יהיו מדדים שונים, תלויים בסוג היישומים שהם מתעניינים בהם, ולעתים גם בתחושות בטן לא ממש מדידות. וכך ייתכן שתיאוריה מסוימת תיחשב בעיני אחד כמועילה ופוקחת עיניים ובעיני אחר כמיותרת ואולי אף מזיקה. מה שחשוב בשלב זה הוא לזכור שאין לנו אמיתות אבסולוטיות וגם לא דרכים אובייקטיביות למדוד נכונות. אבל אם ברור לכולנו שהשאלות שצריך לשאול היא "מתי תיאוריה זו היא קירוב סביר?" או "אלו מצבים כלכליים אנו מבינים טוב יותר בעזרת תיאוריה זו?" – כבר התקדמנו.

כשאנו מתבוננים במגוון הניסויים הפסיכולוגיים שמפריכים הנחות בכלכלה, צריך, ראשית כל, להודות שאף הנחה שלנו אינה יכולה להיות נכונה ממש. עמוס טברסקי עליו השלום נהג לומר "תנו לי אקסיומה ואני אתכנן את הניסוי שמפריך אותה", ואכן, דבריו לא היו

רהב ריק – הפרויקט שלו ושל כהנמן מהווה הוכחה ליכולתם זו. ועם זאת, צריך לזכור שהשאלה אינה האם אקסיומה זו או אחרת נכונה. מובן שאיננה נכונה. השאלה היא, האם היא שגויה בצורה מהותית, שמשנה באופן משמעותי את מסקנותינו. וכאן התשובה תהיה לעתים חיובית ולעתים שלילית, בתלות באקסיומה, ביישום המסוים, וכו'.

לדוגמה: במשחק האולטימאטום שחקן 1 מציע לשחקנית 2 חלוקה של סכום מסוים. נאמר 100 ₪. שחקנית 2 יכולה לקבל או לסרב. אם תקבל, החלוקה המוצעת תתבצע. אם תסרב, שני השחקנים לא יקבלו דבר. מה יקרה במשחק?

אם אנו מניחים שהתועלות של השחקנים נקבעות אך ורק ע"י סכומי הכסף שבידיהם, ואם שחקן 1 יודע זאת לגבי שחקנית 2, הוא יודע שהיא תעדיף כל סכום חיובי על פני אפס. (זו למעשה המשמעות של ה"תועלת": לפי גישת **ההעדפה הנגלית**, שעוד נדון בה בהרחבה, התועלת היא אותה פונקציה שאותה לכאורה ממקסמים מקבלי ההחלטות, אם קבלת ההחלטות שלהם מספיק שיטתית כדי שכזו פונקציה תהיה קיימת.) ואז שחקן 1 יכול להציע לשחקנית 2 שקל בודד ולצפות שהיא תסכים והוא יקבל 99 ₪.

בפועל, זו לא תמיד תוצאת הניסוי. לעתים קרובות שחקנית 2 מסרבת לקבל סכום שנראה לה לא הוגן. לעתים קרובות שחקן 1, ייתכן מתוך חיזוי נכון של תגובת 2, מציע חלוקות שוויוניות בהרבה מאשר 99:1. למעשה, ניסוי זה בוצע באינספור וואריאציות, בתרבויות שונות ובתנאים שונים. גרסה שונה שלו, המכונה "משחק הדיקטטור", כלל לא מערבת את שחקנית 2 כמקבלת החלטות: שחקן 1 פשוט מחלק את הכסף כראות עיניו והמשחק תם. מסתבר שאפילו בגרסה זו קורה ששחקן 1 לא לוקח לעצמו את מלוא מאת השקלים. (אם כי בממוצע הוא לוקח יותר כאשר אין איום של סירוב...)

מה אנו למדים מכך? המסקנה המתבקשת והבלתי-נמנעת היא שכסף אינו הכל בחיים. אם נרצה להבין התנהגות אנושית, נצטרך לקחת בחשבון גם מניעים אחרים, פסיכולוגיים וסוציולוגיים. אנשים מוכנים לוותר על רווחה גשמית (שקלים במקרה זה) תמורת גאווה או כבוד עצמי, או תמורת תחושת שוויון ואולי אף מתוך אלטרואיזם טהור.

עד הנה – סיפור פשוט. אך מה מעבר לכך? האם יש להסיק שתמיד נקבל תוצאות מסוג זה? למשל, אם נחלק 100 מיליון ₪, כמה מאיתנו ידחו מיליון אחד (בתפקיד

שחקנית 2) מכיון שהחלוקה לא הוגנת? או, במלים אחרות: נכון שרובנו נוותר בקלות על שקל בודד כדי לא להרגיש מרומים או מנוצלים או, רחמנא ליצלן, פראיירים. אך אם במיליון שקל עסקינן המצב כבר פחות ברור. כמאמר המשורר, try me. או, במלים יותר גסות, לגאווה יש מחיר.

אנו למדים, אם כך, שההנחה המקובלת בכלכלה, שהפרטים מחליטים על התנהגותם בשוק אך ורק על-פי סל המוצרים העומד לרשותם-שלהם היא מוטעית. אך יכול להיות שהיא לא כל כך מוטעית כשמדובר בסכומים גדולים. למען הסר ספק: איננו טוען שהכסף הוא בכל שאת הכל בחיים. ובהחלטה ייתכן שגם תהליכים כבדי משקל כמו מהפכות יכולים לנבוע מרגשות כגון תחושת קיפוח. כל שאני אומר הוא שלא תמיד ניתן ללמוד מניסוי עם שקלים בודדים על התנהגות בשוק באופן כללי. גם לאחר תוצאות הניסוי, כשברור לעין כל שההנחה של כסף-כסף-תרדוף אינה נכונה, עדיין לא ברור אם היא אינה נכונה באופן חשוב ומעניין, או רק באופן שולי.

מעבר לכך: נניח כי ראינו, בניסוי הדיקטטור, ששחקן 1 מחלק כסף לשחקנית 2 למרות שלזו האחרונה אין כל איום עליו. נאמר שהוא משאיר לה 10 ₪. האם נכון יהיה להכליל ולטעון שאלטרואיזם קיים תמיד, ושפרטים יהיו מוכנים להפריש מעשר מרכושם לטובת העניים? ואם זה המצב – אולי לא צריך שירותי רווחה ומס הכנסה, ואפשר להשאיר את כל זאת לרצונם הטוב של הפרטים, הקיים כפי שהוכח בניסוי? אולי. אך רובנו מרגישים שזו כנראה מסקנה מוטעית וביטול שירותי הרווחה כתוצאה מניסוי הדיקטטור יהיה צעד נמהר. עצם הגדרת הסיטואציה הניסויית כ"ניסוי" יכולה לשנות את התנהגות הפרטים. המודעות העצמית שגוררת הסיטואציה המלאכותית של הניסוי יכולה לגרום אנשים להתנהג בצורה יפה ונאצלת יותר מאשר הם מתנהגים בחיי היומיום, משל היה הניסוי עצמו מציב מראה אתית בפני המשתתפים בו. אך אין להסיק מתוצאת הניסוי לגבי התנהגות מחוץ למעבדה. למשל, פרט שבחר להשאיר למשנהו 10 ₪ מתוך ה- 100 שקיבל בניסוי לא בהכרח יבחר בצאתו מהמעבדה, סתם כך מתוך אלטרואיזם, לחלק 10% מרכושו באין אונס. חמור מכך – מסקנה כזו תהיה מסוכנת מאוד, כפי שמוכיחה ההיסטוריה לפני היות מדינת הרווחה.

ולסיכום הדוגמה: יש להיזהר בהקשת מסקנות מניסויים, ויש להיזהר מפסילת הנחות כמוטעות בגלל שהופרכו בניסוי. אין זה אומר שהניסויים חסרי ערך, או תמיד מטעים. אך השאלה החשובה היא מתי הנחה מסוימת היא קירוב טוב, ולא האם היא תמיד נכונה.

הערה נוספת: בהקשר של פסיכולוגיה וכלכלה יש לשים לב גם שלשני התחומים יש דגשים שונים. פסיכולוגיה מתעניינת בתהליכים שונים המתרחשים במוח, למשל תהליכי קבלת החלטות, ולכן הפסיכולוגיה שמה דגש על תופעות מוזרות ומעניינות היכולות להאיר באור חדש תהליכים אלה. מטבע הדברים, הניסויים בפסיכולוגיה מדגישים תופעות מוזרות וקיצוניות. הכלכלה, לעומת זאת, מתעניינת בפעילות שווקים ואינטראקציות חברתיות, ותהליכים קוגניטיביים ומנטליים אינם מטרה בפני עצמה עבור הכלכלה. לכן, המחקרים המתפרסמים בפסיכולוגיה הם בבחינת מדגם מוטה מנקודת ראות הכלכלה: הם מייצגים את התופעות החריגות מבחינת התיאוריה הקיימת, את התופעות הפחות-מובנות, ולאו דווקא את התופעות השכיחות בפעילות כלכלית.

נשוב ונאמר: אין הכוונה לפטור את כל הניסויים בתירוצים הנ"ל ולהתעלם מכשלונות התיאוריה במעבדה. כלל וכלל לא. אך יש לנקוט משנה זהירות בהיקשים מהמעבדה הפסיכולוגית למציאות הכלכלית.

ג. נפתח בהודאה: לרוב כלכלנים אינם ערים לאמירותיהם שבין השיטין. פעם לימדתי קורס בסיסי, ובו הזכרתי לא אחת את המושג "יעילות פארטו" (Pareto), מושג שנגדיר בפרק הבא. בעיקרו של דבר, יעילות זו דורשת שלא ניתן יהיה לשפר את מצבם של חלק מהפרטים בחברה מבלי לפגוע באחרים, אך אין "יעילות" זו מתייחסת לשוויוניות או צדק. ואני מוכן להישבע שלא הזכרתי את מושג יעילות פארטו בלי להזכיר לתלמידים שמושג זה אינו אומר דבר וחצי דבר על שוויוניות, וכן שחלוקת משאבים לפיה אני מקבל הכל ותלמידי היקרים גוועים ברעב עדיין יכולה להיות יעילה פארטו. בסוף הסמסטר שאל אותי אחד התלמידים למה אני תומך כל כך נלהב ביעילות פארטו. התקשיתי להאמין למשמע אוזניי – אני?! אחרי כל הזהירות שנקטתי וההדגשים ששמתי? אני?! אבל אין מה לעשות, כנראה שזה היה אני. שנאמר, If they didn’t get it, you blew it. נאלצתי להודות שכנראה התלמידים הבינו משהו קצת אחר מאשר מה שאני חשבתי שאמרתי. ובפרט, עצם העובדה שמקדישים זמן לנושא מסוים מעבירה מסר לתלמידים.

מעטים הם המורים לכלכלה שיאמרו משהו מוטעה או מוגזם על מושגים כמו יעילות פארטו, שוק חופשי וכו'. עם זאת, רבים לא ישימו לב למסר הבלתי-מפורש העובר בין שורותיה של תוכנית הלימודים.

ועכשיו שהודינו בזאת, יש לומר שחלק גדול מהבקורת המטא-מדעית/תרבותית/פוסט-מודרניסטית על מקצוע הכלכלה הוא מוגזם. גם אם יש פרופסורים לכלכלה שנהנים מקיומו של שוק חופשי, ויתרה מזו: גם אם נניח שעבורם זוהי הסיבה היחידה ללמד מה שהם מלמדים, אין בכך משום הוכחה שתוכן דבריהם מוטעה הוא. נניח רגע למניעיהם, ונשאל מה בעצם הם אמרו ומה מתוך זה משכנע. משל למה הדבר דומה? לפלוני שהגיש תלונה במשטרה כנגד אלמוני מתוך קנאה גרידא. גם אם המניע מובן ונהיר לנו, שומה על המשטרה לבדוק את תוכן התלונה לגופה. כך גם אנו: יכול להיות שתיאוריה מסוימת מוצעת רק מפני שמאן דהוא מנסה להתעשר או להקניט את רעהו או לסגור חשבון ארוך שנים עם אביו. תהא הסיבה אשר תהא – הבה נבחן את התיאוריה לגופה.

חלק גדול מהביקורת על הכלכלה שנובע מחוצה לה אינו מבוסס על הבנה מספקת של התיאוריה הכלכלית. למשל, ההנחה שפרטים "ממקסמים תועלת" נשמעת רע. לא מציאותית, לא אנושית, פשוט לא. אך – כמו שנראה בפרק הבא – הנחה זו הרבה יותר סבירה מאשר היא נשמעת בצורתה זו. תרומה חשובה של המקצוע שלנו היא הבהרת מושגים. לא אכביר על כך מלים כעת, מכיון שהדיון יהיה מובן יותר אחרי הדוגמה בשיעור הבא.

הבה נדון בדילמת האסיר, שיכולה להמחיש כמה מהנקודות לעיל. הסיפור המקורי הוא מדהים ביופיו אך מטעה מאוד. הוא דן בשני פושעים המואשמים בפשע, כאשר ידוע לכל שאין המשטרה יכולה להפליל איש מהם ללא עזרתו או עזרת רעהו (בהודאה). לכן, מצהירים ביושר חוקרי המשטרה, אם שני החשודים אינם מודים, הם ישוחררו לחופשי. אך אם האחד יודה ורעהו לא, יהפוך המודה לעד מדינה ויקבל פרס כלשהוא. (טיול לחו"ל, הרחק מידידיו של החבר בו בגד.) הנאשם שלא הודה יקבל את מלוא חומרת העונש. לבסוף, אם שניהם יודו, לא יהיה צורך בעד מדינה, ושניהם ייענשו, אך, בשל שיתוף הפעולה שלהם עם המשטרה, כל אחד מהם יקבל עונש

מופחת (מאשר אם לא היה מודה ובכל זאת מורשע בגלל הודאת חברו). כל זאת נאמר לשניהם בגלוי, ועתה כל אחד הולך לתאו לקבל החלטה בנפרד. מה יעשו?

מקובל לנתח את המשחק ע"י מטריצה מהסגנון הבא:

	C	D
C	3 , 3	0 , 4
D	4 , 0	1 , 1

שחקן 1 בוחר שורה, ושחקן 2 – עמודה. שתי בחירות אלו קובעות תא במטריצה, כאשר המספר הראשון בו הוא התועלת של שחקן 1 והשני – התועלת של שחקן 2. התועלת, כאמור, אמורה לתאר את בחירת השחקנים: כל פרט שמקבל החלטות באופן מספיק עקבי כדי להיות מתואר ע"י מקסימיזציה של פונקצית תועלת כלשהיא, מתואר על-ידי מקסימיזציה של פונקצית תועלת כזו במודל. ייתכן שחלק מהפרטים אינם מספיקים עקביים לשם כך. אך אם הם מספיק עקביים (ובקרוב נלמד מהי "עקביות" זו), מקסום התועלת הוא פחות או יותר טאוטולוגי[2]. אם בכל זאת מסתבר שפרט מסוים אינו ממקסם את התועלת שלו, משמע שאנו טעינו ברישום המודל, בכך שייחסנו לפרט פונקציה שאיננה מתאימה להעדפותיו (ואולי שאין כלל פונקציה שיכולה לתאר העדפות אלו).

האות C מציינת cooperate היינו – שיתוף פעולה. הכוונה אינה לשיתוף פעולה עם המשטרה, אלא להתנהגות "נחמדה" לחבר. באופן דומה, D (defect) משמעה חריגה מהנורמה החברתית של שיתוף פעולה, או התנהגות אנוכית. התוצאה (C,C) מניבה תועלת 3 לכל פרט, בשעה שהתוצאה (D,D) – רק 1 לכל פרט. מכאן ש- (C,C) עדיפה במובן פארטו על (D,D): שני הפרטים יהיו מאושרים יותר בתוצרה הראשונה מאשר בשניה.

[2] "טאוטולוגי" משמעו נובע מההגדרות. ליתר דיוק, "טאוטולוגיה" מתייחסת למשפט שהוא נכון תמיד, ושאין צורך להתבונן במציאות כדי לוודא שהוא נכון.

אך לרוע המזל, מבחינתו של כל שחקן לחוד, כאשר הוא מקבל החלטה באופן ריבוני ובלתי תלוי ברעהו, אין זה נבון לבחור C. עבור שחקן 1, למשל, הפעולה D **<u>שולטת</u>** על C: <u>לא משנה מה יעשה שחקן 2</u>, D מבטיחה תשלום גבוה יותר מ- C. וכנ"ל עבור שחקן 2. ל"שליטה" זו יש משמעות פשוטה: השחקנים אינם צריכים להטריד את עצמם בשאלה, מה עושה השחקן האחר? שאלה זו, שמופיעה במושג שיווי-המשקל, פשוט אינה רלוונטית כאן: כל אחד משני השחקנים אומר לעצמו: מה שלא יעשה האחר, עדיף לי לשחק D. התוצאה היא שהם בוחרים (D,D) ומקבלים 1 כל אחד, בשעה שיכלו לשחק (C,C) ולקבל 3 כל אחד. במלים אחרות: רציונליות של הפרטים אינה מביאה לתוצאה יעילה פארטו.

זוהי דוגמה יפה ואף מדהימה, המשנה את תפיסת העולם של רוב מי שלא נתקל בה בעבר. יתרה מזו, הדוגמה צצה כרעם ביום בהיר עבור כל מי שמאמין, אם בשל Adam Smith או מסיבות אחרות, שאם כל אחד ידאג לאינטרסים שלו-עצמו נקבל תוצאה רצויה חברתית. אפילו אם במושג ה"רציות החברתית" אנו מתעלמים משיקולי שוויוניות, אין זה נכון שקבלת החלטות מבוזרת ע"י הפרטים מולידה תוצאה שהחברה כולה לא יכולה לשפרה.

הרבה נכתב על דילמת האסיר, ובדין. עם זאת, חלק ממה שנכתב מקורו בחוסר הבנה. למשל, יש הטוענים שאסירים לא יבגדו זה בזה מכיון שהם חברים. לפי טענה זו, כלכלנים ואנשי תורת המשחקים טועים בניתוח הדוגמה כי אינם מבינים את טבע האדם. כך, למשל, נטען שהכלכלנים מניחים שכל שחקן ימקסם את תועלתו שלו מכיון שהם חושבים שכולם אנוכיים (אולי כמותם, כמו הכלכלנים עצמם), אך בפועל השחקנים יהיו יותר אלטרואיסטים.

במובן זה הדוגמה הנ"ל אינה מוצלחת. כשהיא פותחה, בראשית שנות ה-50, קהילת החוקרים בתורת המשחקים בעולם כולו היתה מזערית, וכל חבריה הבינו את משמעות התועלת כמתארת החלטות בפועל. דוגמת האסירים ניתנה כדי לסבר את האוזן בלבד. אך אם האסירים אכן נאמנים זה לזה – אם מתוך אלטרואיזם טהור, אם מחשש רגשי אשם או מנקמה – התועלת הרשומה במשחק פשוט אינה מתאימה להם. המושג של "דילמת האסיר" מתייחס לסיטואציות חברתיות עבורן המטריצה הנ"ל היא מודל טוב. אם סיפור האסירים אינו מתאים למטריצה, הרי שאת התנהגות האסירים נצטרך לנתח באמצעות מטריצה אחרת. כעת, מכל מקום, אנחנו מתעניינים דוקא בסיטואציות שעבורן המטריצה הנ"ל היא מודל טוב. הבה נבחר, אפוא, סיפור אחר כדי לראות את הנקודה העיקרית.

סיפור מתאים יותר למטריצת התועלות לעיל יהיה הבא: שתי שחקניות שאינן מכירות זו את זו ניגשות למכונות בנק אוטומטיות, כל אחת בנפרד. כל אחת יכולה ללחוץ על כפתור שיעביר לה, מהבנק, 1,000 ₪, או על כפתור אחר שיעביר לשניה, גם מהבנק, 3,000 ₪. (כל אחת קובעת אם הבנק יתן לה מתנה או לרעותה.) ההחלטות נעשות בנפרד, ואחר-כך הן הולכות אישה לדרכה ולא תיפגשנה עוד. מה תעשינה? ובכן, איננו יודעים. עם זאת, בהנחה שהשחקניות אכן לא נפגשו ולא תיפגשנה בעתיד, זה נשמע די סביר שכל אחת תיקח 1,000 ₪ לעצמה.

מטריצה המשחק זהה למטריצה לעיל. אכן, אם כל אחת מהשחקניות מנסה להיות נחמדה לרעותה ומשחקת C, הרי שכל אחת מעניקה לשניה, על חשבון הבנק, 3,000 ₪. ואם כל אחת משחקת D ומזדרזת לקחת לעצמה 1,000 ₪, לכל אחת יהיו אכן רק 1,000 ₪. ובניסוח זה העובדה ש- D שולטת על C היא די ברורה: כששחקנית מסוימת שואלת את עצמה האם D עדיפה על C, מובן לה שמה שלא תהיה בחירתה של השניה (המתבצעת במקביל ובאופן בלתי תלוי במכונה השניה), היא, השחקנית שלנו, תצא עשירה ב- 1,000 ₪ אם תבחר D מאשר אם תבחר C.

מה הלקח מ"דילמת האסיר"? הלקח העיקרי הוא שלעתים יש אינטראקציות כלכליות שאינן בנויות לשיתוף פעולה, ושעלינו לעשות משהו בנידון: עלינו לשנות את חוקי המשחק כך ש-D כבר לא תשלוט על C, וש- (C,C) תוכל להיות תוצאה סבירה (מה שייקרא "שיווי משקל" בהמשך חיינו). למשל, תרומה לקופת המדינה ע"י תשלום מסים דומה להתנהגות ה"נחמדה" C: אם כולנו נתרום, מצבו של כל אחד יהיה טוב יותר מאשר אם כולנו לא נתרום. ובכל זאת, לכל אחד עדיף לא לתרום (לא משנה מה עושים האחרים). ובדומה לכך, אם כולנו נשמור על הסביבה לכולנו יהיה יותר נעים (מאשר אם כולנו לא נשמור עליה), אך כשכל אחד ואחת עושים את החשבון האישי שלהם, ולוקחים את התנהגות האחרים כנתונה, לכל אחד יש פיתוי לא לטרוח לשמור על הסביבה. וכן הלאה, דוגמאות יש לרוב.

החברה האנושית פיתחה מספר טכניקות כדי לשנות תשלומים מפתים, ולהפוך התנהגויות רצויות (כמו (C,C) כאן) לסבירות מבחינת כל פרט בנפרד. דרך אחת היא חקיקה: נקבע בחוק שכולנו משלמים מסים, ומי שלא עושה כן נענש. כך, אם במקום לשחק (C,C) שחקן 1 בוחר D, נדאג שבנקודה (D,C) התשלום של שחקן 1 לא יהיה 4 אלא, למשל, 1-, כגון ע"י עונש מאסר על העלמת מס. במשחק החדש D כבר לא שולטת על C, ו- (C,C) יכול להיות שווי משקל: אין לאיש פיתוי לסטות מהאמנה החברתית (לפיה כולם שומרי חוק ומשלמים מסים). נכון, עדיין

ייתכן שכולם ישחקו (D,D), ואכן, אם אף אחד לא משלם מסים ייתכן שגם זהו שיווי משקל. אל לפחות התוצאה הרצויה חברתית – (C,C) – איננה סותרת בחירה רציונלית של הפרטים הבודדים. דרך אחרת לשנות תשלומים היא ע"י נורמות חברתיות. במקום להשתמש במנגנון כבד ויקר של ענישה ע"י מערכת המשפט, אפשר להיעזר בחברה הסובבת אותנו. החברה יכולה להעניש התנהגות א-סוציאלית ע"י מגוון תגובות, החל במבטים כעוסים וכלה בנידוי, וזה פשוט ויעיל יותר מאשר להתחיל עם משטרה וחקירות ובתי משפט. ויש גם דרך טובה יותר: להפנים את החברה, או השוטר, החוקר, התובע והשופט באדם עצמו: עם חינוך אפקטיבי לרגשי אשם, אין צורך במישהו חיצוני – האדם עצמו כבר דואג להעניש את עצמו על התנהגות לא נחמדה. כך או כך, המסר החשוב הוא שלפעמים צריך לעשות משהו, זאת אומרת לשנות את חוקי המשחק הנתון לנו, כדי שלכולם יהיה יותר טוב. מסקנה חשובה זו עלולה לאבד לנצח אם נפטור את דילמת האסיר כבעיה שיצרו כלכלנים שמאמינים שכולם אנוכיים כמותם.

ואם נחזור לענייננו: דילמת האסיר נידונה כאן לא בגלל הלקח שלה לגבי מוסדות חברתיים – לקח חשוב זה יחכה לקורס הבא. בשלב זה נשים לב רק לעובדות הבאות: הסיפור המקורי של דילמת האסיר, ואולי גם ניסויים מסוימים, יכולים לרמז שאין תחזית המודל מוצלחת במיוחד. אך יש מגוון בעיות (למשל, סיפור הכסף והבנק) שעבורן המודל מתאים, ותחזיותיו לא נשמעות מופרכות כלל ועיקר. יתרה מזו, נראה שלגבי בעיות מרכזיות בכלכלה, כגון תשלום מסים, ההתנהגות שחוזה המודל יכולה להיות קירוב טוב יותר למציאות מאשר תוצאת ניסוי במעבדה. כמו-כן, רצוי להבין היטב למה מתכוונים כלכלנים ב"פונקצית התועלת" לפני שאנו מבקרים את הצלחת התיאוריה.

לסיכום, אין לנו כוונה לשווק את הכלכלה כמדע מוצלח יותר ממה שהיא. יכולת החיזוי שלנו מוגבלת. הנחותינו כולן אינן נכונות. ולעתים העיסוק המדעי-לכאורה משמש כלי שרת בידי קבוצות כוח שונות. עם זאת, עדיף שננסה להבין את המציאות שסביבנו מאשר לוותר על כל תקווה לשפר מציאות זו; עדיף לנסות למצוא עקרונות בסיסיים לחיזוי מאשר להותיר מטלה זו למנחשים בקלפים; ועדיף לחפש ידע עד כמה שאפשר אובייקטיבי מאשר לוותר על אובייקטיביות אפילו בתפקידה ככיוון מנחה.

סיכום שיעור 2 ובו יסופר: למה מתכוונים ב"יעילות" כלכלית ולמה חשוב להבין מהי הנחת המקסימיזציה בכלכלה

בתחילת השיעור העלנו את שאלת הגלובליזציה ומה אנחנו חושבים עליה. למותר לציין שאין לכם מה ללמוד ממני בענין זה, ואין לי שום יומרות לדעת משהו ענייני על הגלובליזציה. העניין שלנו כאן הוא באופי הטיעונים המועלים בנושא, וכדי לנתח אותם כראוי יש להבין את יסודות המיקרו-כלכלה.

כשדנים בשאלה כמו הגלובליזציה, או השוק החופשי באופן כללי, לא אורך זמן רב עד שמישהו מעלה את טיעון היעילות הכלכלית: שווקים חופשיים הם יעילים יותר. אך באיזה מובן? מהי "יעילות" כלכלית?

מדובר ביעילות פארטו – מושג שנתקלתם בו בקורס "יסודות הכלכלה", אך שלא יזיק שנרענן קצת את הגדרתו ומשמעותו. עקרונית, חומר זה שייך לקורסי מיקרו 2 ו-3, אך מן הראוי להבהיר מיני אי הבנות הקשורות במושג זה מוקדם ככל האפשר. הדיון יהווה גם הקדמה לא רעה לדיון בהעדפות הצרכן שיבוא אח"כ, ושיהווה את הפתיחה האמיתית של הקורס, במהרה בימינו. ובכן:

<u>מסגרת:</u>

נניח שיש קבוצת של אלטרנטיבות לחברה, שנסמנן באותיות כגון $x,y,\ldots$. בחברה מספר פרטים, נניח $i=1,2,\ldots,n$. לכל אחד מהפרטים יש העדפות על האלטרנטיבות. נניח כי פרט i מעדיף אלטרנטיבה x על פני אלטרנטיבה y אם (ורק אם) התועלת של הפרט, u_i, גבוהה יותר עבור x מאשר עבור y. או, במונחים של העדפה "חלשה" (המאפשרת גם אדישות):

x טוב לפחות כמו y בעיני פרט i אם ורק אם $\qquad u_i(x) \geq u_i(y)$

אם הדבר מתקיים **לכל** זוג אלטרנטיביות x,y, נאמר שהפונקציה u_i **<u>מייצגת</u>** את העדפות הפרט ה- i.

(מתי קיימת כזו פונקציה עבור פרט מסוים היא השאלה המרכזית של השיעור הזה וגם הבא. כרגע, הבה נניח שזה אכן המצב ולכל פרט יש העדפות הניתנות לייצוג ע"י פונקציה מספרית.)

האלטרנטיבות הנדונות יכולות להיות שונות ומגוונות. בחלק ניכר מהדיון במיקרו-כלכלה, אלטרנטיבה כזו היא מטריצה, המתארת **הקצאה**, היינו מהו **הסל** של כל פרט: מה הכמות ממוצר j שעומדת לרשותו של פרט i , לכל i ו- j. כך, מטריצה כזו תפרט כמה מלפפונים וכמה עגבניות יש לכל אחד, כמו גם כמה דירות ומכוניות. יתרה מזו, לעתים קרובות נניח שההעדפות הפרטים על פני הקצאות שונות נקבעות אך ורק ע"י חלקם-שלהם בהקצאה. ז.א. שכאשר רותי שואלת את עצמה מה העדפותיה בין x ל- y, היא מתעלמת מכמויות המוצרים העומדים לרשות משה וחיים. אולם לעתים נתעניין בבעיות שאינן כאלו. למשל, כאשר יש **השפעות חיצוניות**, תצרוכתו של משה (למשל, של סיגריות) יכולה להשפיע על רווחתה של רותי, וזו האחרונה עלולה לגלות שיש לה העדפות לא רק על תצרוכתה שלה. כמו-כן, אם מדובר ב**מוצרים ציבוריים**, כגון בתי חולים ובתי ספר, כבישים וצבא, אין לכל אחד מהפרטים כמות "פרטית" שלו או שלה – האלטרנטיבה החברתית (כגון x,y) מציינת כמות אחת של המוצר הציבורי, וכמות זו "נצרכת" בו זמנית ע"י כל הפרטים. ולבסוף, ייתכן שכלל איננו עוסקים במוצרים הנמדדים בכמויות, אלא שהאלטרנטיבות החברתיות אינן ניתנות לתיאור ע"י סלי מוצרים, כגון אופציות שונות של מדיניות החוץ או הבטחון. תהיינה האלטרנטיבות אשר תהיינה – הדיון במושג השליטה על-פי פארטו ויעילות פארטו יעמוד בעינו.

<u>שליטה עפ"י פארטו:</u>

במסגרת הנ"ל, אלטרנטיבה **x שולטת עפ"י פארטו על אלטרנטיבה y** אם לכל פרט i מתקיים

$$u_i(x) \geq u_i(y)$$

ולפחות עבור פרט אחד אי השוויון הנ"ל הוא חזק (ז.א. $u_i(x) > u_i(y)$ ל- i מסוים).

הווה אומר: x שולטת פארטו על y אם כל הפרטים חושבים ש-x טובה לפחות כמו y, וחלקם חושבים ש-x עדיפה ממש על פני y. שליטה עפ"י פארטו מקבילה, פחות או יותר, להצבעה פה-אחד: אם נדמיין שנעמיד את הבחירה בין x ל-y להצבעה, וכל פרט יצביע לפי העדפותיו/ה שלו/ה, ניתן יהיה לומר ש-x נבחרה "פה אחד": ייתכן שחלק מהפרטים יימנעו מההצבעה, אך חלק יעדיפו את x ולא יהיה אף אחד שיעדיף את y.

<u>יעילות/אופטימליות פארטו:</u>

באותה מסגרת, אלטרנטיבה x היא **יעילה פארטו** או **אופטימלית פארטו** אם לא קיימת אלטרנטיבה אחרת y השולטת עליה (במובן פארטו כלעיל).

חשוב לשים לב שההגדרה יחסית הן לקבוצת האלטרנטיבות הנחשבות לאפשריות, והן לקבוצת הפרטים שבהעדפותיהם אנו מתחשבים. (במודל יותר מדויק שתי הקבוצות הללו היו מקבלות סימון פורמלי, אך נראה לי שעוד אותיות, בין אם לטיניות ובין אם יווניות, לא יוסיפו כאן הרבה.) אם אנו מגדילים את קבוצת האלטרנטיבות (למשל, ע"י הוספה של אפשרויות ייצור), אלטרנטיבה שהיתה יעילה פארטו יכולה להפסיק להיות כזו. והוא המצב אם נגדיל את קבוצת הפרטים הנלקחים בחשבון (כמו, למשל, אם נעבור מדיון במשק מסוים לכל הפרטים על פני כדור הארץ). מובן שההגדרה גם תלויה בהעדפות הפרטים, אם כי תלות זו ברורה מההגדרה ולרוב אין סכנה שנתעלם ממנה.

המושגים "יעילות פארטו" ו"אופטימליות פארטו" שקולים לחלוטין. שניהם מבלבלים, כפי שנסביר מיד. למרות שיש לי העדפה קלה למינוח "יעילות", נשתמש בשני המושגים לחליפין כי זהו גם המצב במקצוע: בספרים שונים תמצאו את אחד המושגים או את שניהם ולא נוכל למחוק אף אחד מהם מהספרות.

דרך אחרת להגדיר יעילות פארטו היא: אלטרנטיבה x יעילה פארטו אם לא ניתן לשפר את מצבם של חלק מהפרטים בלי לפגוע באחרים. שיפור שכזה יהיה אלטרנטיבה אחרת y שהיא אפשרית, ושחלק מהפרטים מעדיפים אותה (ממש) על פני x ("לשפר את מצבם של חלק מהפרטים") בעוד שאין פרטים שמעדיפים את x על פני y ("בלי לפגוע באחרים").

רעיון היעילות/אופטימליות הוא פשוט: אם אלטרנטיבה אינה יעילה פארטו, למה שתיבחר? הרי אם x אינה יעילה, קיימת אלטרנטיבה (אפשרית!) y שהיא טובה מ-x בעיני כולם. אם נציע לעבור מ- x ל- y, איש לא יתנגד, ויהיו שיתמכו ברעיון בהתלהבות. אשר על כן, יש לקוות שנבחר רק אלטרנטיבות יעילות פארטו. או: מנגנון חברתי-כלכלי שיכול לבחור (למשל, כשיווי משקל כלשהו) אלטרנטיבות שאינן יעילות פארטו לא ייחשב למושלם. עקרונית, יהיה נחמד יותר להאמין שהמנגנונים שאנו משתמשים בהם מבטיחים בחירת אלטרנטיבות יעילות פארטו.

<u>על בלבולי מושגים:</u>

כפי שציינו, שני המונחים, "יעילות" ו-"אופטימליות", מטעים. לרוב אנשים מבינים פחות מדי מהראשון ויותר מדי מהשני. להלן מספר הבהרות.

<u>"יעילות" אומרת יותר ממה שהיינו יכולים לחשוב</u>

"יעילות" לרוב מעלה אסוציאציות של יעילות בייצור: הימנעות מבזבוז משאבים, ביטול זמן וכיו"ב. ואכן, יעילות פארטו מחייבת שהייצור שלנו לא יבזבז משאבים יקרים. לדוגמה, אם אני מכין עוגה ושופך קילו קמח על רצפת המטבח, ואתם מראים לי שאני יכול להכין אותה עוגה באותם משאבים (כולל זמן), בלי לבזבז את הקמח, הרי אתם מצביעים על שיפור פארטו אפשרי: אני יכול להשתמש בשיטת הייצור היעילה יותר, שאינה מבזבזת קמח, ולהשתמש בקילו הקמח להאכיל ילדים רעבים. כך, אני לא אפגע מהמעבר לשיטה החדשה, אבל יהיו ילדים שיהנו ממעבר זה. כל עוד יש שימוש למשאבים הנחסכים, ובמקרה שלנו, כל עוד יש ילדים רעבים שיכולים להנות מהקמח, יעילות פארטו מחייבת יעילות בניצול המשאבים.

יעילות בייצור לעתים מערבת צמצום בכוח העבודה הנדרש, למשל, עם הכנסת מכשור חדש. לעתים, יעילות בייצור גוררת פיטורי עובדים, אם ניתן לשכור עובדים בשכר נמוך יותר במקומות אחרים, או שניתן להשתמש בעובדים זמניים, ללא זכויות סוציאליות וכו'. בגלל כל אלה, המילה "יעילות" מתקשרת לרבים עם "צמצומים", "פיטורים" וכיוצא בזאת. אך חשוב להבין שלא זו יעילות פארטו שבה אנו דנים. ראשית, יעילות פארטו דנה בקבוצת אנשים שלרוב היא לפחות משק כלכלי אחד (אם לא המשק הגלובלי). כך שחסכון כסף עבור המעסיקים אינו "יעיל" יותר (במובן פארטו) אם הוא מערב הרעת מצבם של מועסקים. שנית, מושג ה"יעילות" אינו דן רק בכמה משאבים מוקדשים לייצור, אלא גם בהחלטה מה מייצרים, ובידי מי נמצא התוצר. נבהיר שתי נקודות אלו:

<u>מה מייצרים?</u> נניח שאנו מייצרים ברוקולי בכמויות היסטריות. ייצור הברוקולי מאוד יעיל, ואין שום דרך לייצר עוד ברוקולי עם אותם משאבים (אדמה, מים, רוח ואש). דא עקא, מסתבר שאף אחד לא אוהב ברוקולי. מה זה לא אוהב, אף אחד לא יכול לראות ברוקולי בקרבתו. וכך הררי הברוקולי מרקיבים להם בנחת בשעה שהמוני העם רעבים ללחם. האם בחרנו באלטרנטיבה יעילה פארטו? מובן שלא. עדיף לייצר משהו שאנשים אוהבים או לפחות מוכנים לאכול. אם נעשה זאת, נשפר את מצבם של כולם, או לפחות של חלק מהפרטים בלי לפגוע באחרים. לכן,

ייצור של מוצרים לא מתאימים לא יהיה יעיל פארטו גם אם הייצור עצמו יעיל מבחינת ניצול המשאבים. הלקח עיקרי הוא ש"יעילות" פארטו אומרת יותר מאשר יעילות בניצול המשאבים להשגת יעדי ייצור נתונים: גם בחירת יעדי הייצור כלולה בדרישת ה"יעילות" פארטו. ואם לקחת דוגמה אחרת, ייתכן שכל הפרטים במשק מעדיפים לנוח יותר ולצרוך פחות (למשל, לקחת חופשות של ששה שבועות כל קיץ ולשכב על החוף, למרות שמשמעות ההחלטה היא שיהיו לכולם פחות מוצרים חומריים). רוצה לומר: ייתכן שהפרטים מעדיפים פחות מוצרים חומריים ויותר פנאי. במצב זה יעילות פארטו מחייבת שנייצר פחות ונצא כולנו לחופשה בקיץ. "יעילות כלכלית", שבה אנו מתכוונים ליעילות פארטו, איננה אומרת שכולנו צריכים לעבוד מסביב לשעון.

<u>איך מחלקים את התוצר?</u> נניח שמחצית האוכלוסיה מייצרת מנגו בהצלחה רבה, והמחצית השניה מתמחה בגידול בננות. אלא מאי, מגדלי המנגו בעצם אוהבים לאכול רק בננות ולהפך. האלטרנטיבה שבה לכל אחד יש רק את המוצרים שהוא מייצר אינה יעילה פארטו, גם אם לא ניתן לייעל את תהליך הייצור. כמובן, יש אלטרנטיבה עדיפה פארטו, שבה מתבצע סחר וכל אחד מקבל וצורך את מה שהוא או היא אוהבים. כך, יעילות פארטו מחייבת גם שאם קיים מסחר המשפר את מצב כולם (או משפר את מצבם של חלק ולא פוגע באחרים), מסחר זה יתקיים. שוב: אין להבין ב"יעילות פארטו" או ב"יעילות כלכלית" אך ורק ייצור יעיל. חלוקת משאבים שלא ניתן לשפרה (עפ"י פארטו) אף היא מתחייבת ממושג היעילות.

<u>"אופטימליות" אומרת פחות ממה שהיינו יכולים לחשוב</u>

בשפת יומיום, בין אם בלשון עבר או בלשון לועז, "אופטימלי" נשמע כמו "הכי טוב", משהו כמו "אופטימום". אך המשמעות המתמטית המדויקת של המושגים שונה. זה לא כך נורא – מותר ואף סביר שיהיה ז'רגון מקצועי בתחומים שונים, ושיהיה שונה משפת יומיום. אלא שבמקרה דנן אנו משתמשים במילה "אופטימלי", והרבה משומעינו חושבים שאמרנו "אופטימום", ולא היא. אז מה ההבדל?

"אופטימום" הוא, אכן, "הכי טוב", במובן החלש: אלטרנטיבה היא אופטימום אם היא טובה לפחות כמו כל אלטרנטיבה אחרת. (ה"מובן החזק" יהיה "... ממש יותר טובה מכל אלטרנטיבה אחרת", אך הענין איננו בדקויות של ממש-יותר-טוב לעומת טוב-לפחות-כמו.)

"אופטימלי" הוא "אין טוב הימנו". זאת אומרת שאלטרנטיבה היא אופטימלית אם אין אלטרנטיבה שהיא (ממש) טובה יותר ממנה.

אלטרנטיבה שהיא אופטימום היא גם אופטימלית: שהרי לו היתה אחרת טובה יותר ממנה, לא היתה אופטימום. או: אם x היא אופטימום, אזי x טובה לפחות כמו y, לכל y. ולכן אין y שהיא טובה מ-x, ולכן x גם אופטימלית.

אך ההפך אינו נכון: אלטרנטיבה x יכולה להיות אופטימלית בלי להיות אופטימום. הא כיצד? מכיון שייתכן שאין בידינו להשוות בין אלטרנטיבות מסוימות. זאת אומרת: אם x אופטימלית, מובטח לנו, לכל y, ש- y אינה טובה מ-x. אך ייתכן שהשתיים אינן בנות-השוואה, ולכן אין זה נובע מהאופטימליות של x שהיא טובה לפחות כמו y, או ש- x היא גם אופטימום.

אלטרנטיבה אופטימלית חייבת להיות גם אופטימום אם הדירוג שלנו הוא **שלם**, הווה אומר: אם כל שתי אלטרנטיבות הן בנות-השוואה. למשל, אם אנו משווים גובה של אנשים. הגובה מציע לנו סקאלה מספרית פשוטה, שעליה כל שני אנשים ניתנים להשוואה: או שהראשון גבוה לפחות כמו השני, או שהשני גבוה לפחות כמו הראשון (או שגם זה וגם זה נכון, במקרה שגובהם שווה). (הערה: ככלל, "או" מאפשר "גם", אלא אם כן צוין במפורש אחרת.) במצב זה, אם x "אופטימלי" במובן שאין גבוה ממנו, הרי ש-x הוא גם "אופטימום": חזקה עליו שיהא גבוה לפחות כמו כל אחד אחר.

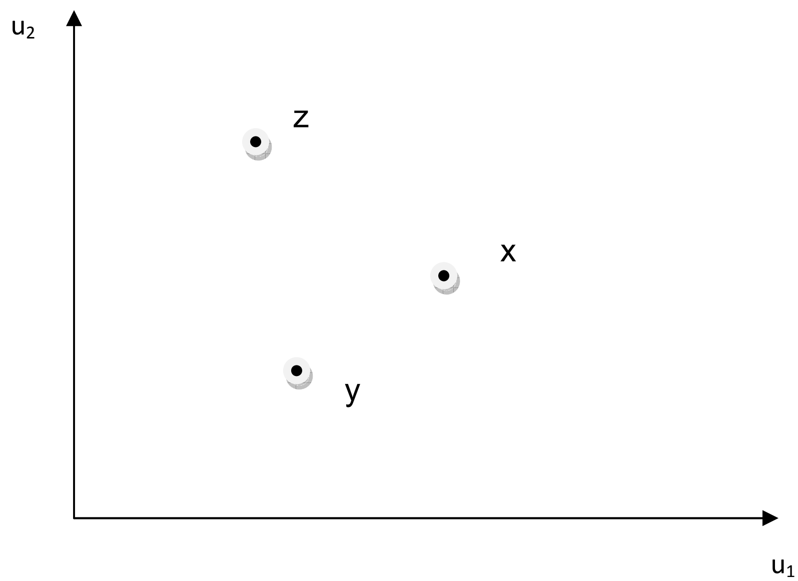
אך אם נתבונן ביחס שאינו שלם נראה את ההבדל. נניח שסטודנטית א' טובה מסטודנטית ב' אם קבלה ציון יותר טוב הן בכלכלה והן במתמטיקה. יחס זה אינו שלם: ייתכן שרונה קיבלה ציון יותר גבוה מהילה בכלכלה, אך הילה קיבלה ציון גבוה יותר מרונה במתמטיקה. לפי הגדרת היחס, לא ניתן לומר שרונה סטודנטית טובה מהילה וגם לא ההפך. רונה והילה אינן ניתנות להשוואה לפי יחס זה, ולכן היחס אינו שלם.

עתה: לפי יחס זה, אם רונה תאמר שהיא "סטודנטית אופטימלית", כל כוונתה תהיה שאין אחרת שקיבלה ציונים יותר גבוהים ממנה בשני המקצועות. אך זה לא אומר שהיא טובה יותר מכל אחת אחרת – למשל, הילה אינה טובה ממנה, והיא אינה טובה מהילה. כך סטודנטית "אופטימלית" איננה בהכרח גם "אופטימום".

אם נחליף ציונים בבחינות בתועלות של פרטים בחברה, נראה שזהו בדיוק המצב עם ההעדפה על פי פארטו: אפשר לחשוב על כל פרט בחברה כאילו היה נותן ציון לאלטרנטיבות, כאשר פונקצית התועלת" שלו מודדת כמה טובה האלטרנטיבה הנדונה <u>מבחינתו</u>. אלטרנטיבה שולטת פארטו על אחרת אם כל הפרטים מעדיפים אותה (לפחות במובן החלש), ז.א., אם כל ציוניה

טובים יותר (או לפחות לא פחות טובים, עם כמה אי-שוויונות חזקים). אך בהחלט ייתכן שאלטרנטיבה אחת אינה שולטת על רעותה וגם ההפך נכון. לכן, "x אלטרנטיבה אופטימלית פארטו" אומרת הרבה פחות מאשר "x היא האלטרנטיבה הכי טובה".

והנה עוד עובדה מבלבלת: ייתכן שאלטרנטיבה שהיא אופטימלית פארטו לא תשלוט (פארטו) על אלטרנטיבה שהיא אינה אופטימלית פארטו. הנה דוגמה:

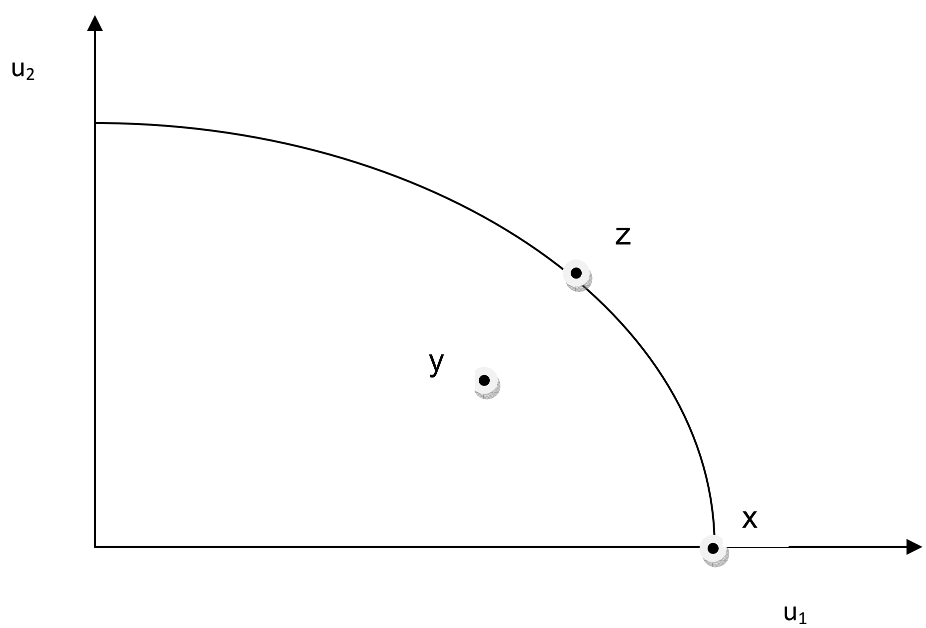


בגרף זה הציר המאוזן מודד את תועלתו של פרט 1 ואילו המאונך – את תועלתו של פרט 2. קל לראות מהציור ש-x שולטת פארטו על y אך אין שליטה פארטו בין x ל- z או בין z ל-y.

ניתן לסכם את יחס "שליטה פארטו" בין שלוש האלטרנטיבות הללו בטבלה הבאה:

האם השורה שולטת פארטו על העמודה?	x	y	z
x		v	
y			
z			

נקודה זו רלוונטית במיוחד לשאלת חלוקת משאבים בכלכלה. נניח כי יש בכלכלה שני פרטים וככר לחם אחת. פרט 1 מחזיק את כל הככר, ויש לו תאבון בריא, כך שכל ויתור על פרור לחם מפחית את תועלתו. פרט 2 גווע ברעב. ניתן לחלק את הככר בין השניים ולקבל זוגות תועלות שונות. למשל, אפשר להניח שקו אפשרויות התועלת,במישור (u_1,u_2) נראה כך:



אנו מתחילים בנקודה x, שבה כל הככר בידי פרט 1. מועלית ההצעה למסות את העשירים כדי לממן קצבאות לעניים, ולתת משהו גם לפרט 2. פרט 1 טוען שמן המפורסמות היא שמיסוי פוגע ביעילות כלכלית, ושבעקבות המיסוי נמצא את עצמנו בנקודה שאיננה פארטו אופטימלית, כגון y. לעומת זאת, הוא ממשיך ואומר, כרגע, ללא מיסוי, אנחנו בנקודה שהיא פארטו אופטימלית (x). פרט 1 צודק בכך ש- y איננה אופטימלית, ואכן נקודה אחרת, z, שולטת פארטו על y. אך אין זה נכון שהנקודה הנוכחית, x, שולטת פארטו על y. למעשה, x ו- y אינן ניתנות להשוואה על-פי פארטו ולכן אין העדר היעילות של y נימוק משכנע כנגד מדיניות המיסוי המוצעת.

<u>מי ממקסם תועלת?</u>

כל הסיפור הנ"ל נועד רק להבהיר מהי יעילות פארטו, מה היא אומרת ומה אינה אומרת. אך הוא אמור להעלות את השאלה הבאה: אם מושג פארטו דן בפרטים הממקסמים פונקצית תועלת, האם הוא רלוונטי לחיינו? מי מאיתנו ממקסם תועלת? מי יכול להעיד שהשכנה שגרה בקומה למעלה ממקסמת תועלת? ואם התשובה היא שבדרך כלל גם אנחנו וגם גברת לוי מלמעלה לא מחשבים נגזרות במשעולי הספר, ובעצם רובנו לא ממקסמים כלום, על מי אנחנו מדברים בעצם? מה התוקף של טיעון – על גלובליזציה או על כל נושא אחר – שנשען על הנחת המקסימיזציה הזו?

כאן אנו כבר מתקרבים, בשעה טובה ומוצלחת, לקורס שלנו. השאלה הראשונה שנדון בה היא מי ממקסם תועלת. התשובה תהיה, בקוים כלליים מאוד, שמי שהעדפותיו שלמות וטרנזיטיביות (מושגים שנגדיר להלן) יכול להיות מתואר **כאילו** שהוא ממקסם תועלת. בפרק זה נפצח בהגדרות אינטואיטיביות של המושגים הללו, ובפרק הבא נגדיר אותם במדויק וגם ננסח את השלכותיהם.

<u>שלמות וטרנזיטיביות</u>

יחס הוא **שלם** אם כל שתי אלטרנטיבות ניתנות להשוואה על-ידיו. ראינו שההעדפה על-פי פארטו אינה מגדירה יחס שלם. לעומת זאת, לרוב נניח שהעדפות הצרכן הן שלמות, היינו, שבהשוואה בין כל שני סלי תצרוכת, הצרכן מוצא את הראשון טוב לפחות כמו השני או להיפך. ההצדקה העיקרית להנחה זו היא שבסופו של דבר משהו צריך להיעשות, ואיזושהי אלטרנטיבה צריכה להיבחר. על פי גישת ההעדפה הנגלית, אותה אלטרנטיבה שנבחרה בפועל היא המועדפת, בהגדרה.

ההנחה המרכזית הבאה תהיה שהעדפות הצרכן הן גם טרנזיטיביות. יחס העדפה הוא **טרנזיטיבי** אם, כאשר x טובה לפחות כמו y ו- y טובה לפחות כמו z, אזי זה גם נכון ש- x טובה לפחות כמו z. חשוב שהתכונה נדרשת לגבי כל שלשה של אלטרנטיבות x,y,z ואין זה מספיק שתתקיים לגבי שלשות מסוימות.

הדוגמה המשכנעת ביותר ליחס שאינו טרנזיטיבי, וגם המדהימה ביותר, היא החלטת רוב: בין כל שתי אלטרנטיבות נקיים הצבעה, והאלטרנטיבה המנצחת ברוב קולות תקרא המועדפת (אם אפשרות לשקילות במקרה של תיקו). במאה ה-18 הראה המרקיז de Condorcet שקריטריון פשוט ורווח זה אינו טרנזיטיבי: ייתכן שהעדפות הפרטים הן כאלה שהצבעת רוב תיצור "מעגל". המעניין הוא שזה יכול לקרות גם אם לכל אחד מהפרטים יש העדפות שלמות וטרנזיטיביות. לשם הדוגמה, נניח שיש שלושה פרטים ושלוש אלטרנטיבות.

פרט 1 מעדיף x על פני y ואת y על פני z (ולכן גם את x על פני z)

פרט 2 מעדיף y על פני z ואת z על פני x (ולכן גם את y על פני x)

פרט 3 מעדיף z על פני x ואת x על פני y (ולכן גם את z על פני y)

קל לראות שבהצבעת רוב ייווצר "מעגל" x > y > z > x כאשר ">" מציין העדפה חברתית (אפילו ברוב מיוחס של 2/3).

יחס פארטו איננו שלם, אך הוא טרנזיטיבי (ודאו זאת!). יחס רוב הוא שלם, אך אינו טרנזיטיבי. לעומת אלה, ההנחות שלנו על העדפותיו של פרט בודד תהיינה, לרוב, שהן גם שלמות וגם טרנזיטיביות.

סיכום שיעורים 3-4 ובהם יסופר: מתי ניתן לייחס למקבל החלטות פונקצית תועלת

הגיעה העת להגדיר באופן יותר מדויק את ההנחות הנחוצות לצורך המסקנה שמאן דהוא ממקסם פונקציה כלשהיא (לנו אנו קוראים בשם החיבה "פונקצית תועלת"). אנו כבר יודעים שמדובר בעיקר בשלמות וטרנזיטיביות, ויש לנו מושג כללי מה כל אחת מהן אומרת, אך קצת יותר דיוק לא יזיק לנו. נפתח בהגדרות כלליות של יחסים ותכונותיהם, נסביר מהו ייצוג יחס ע"י פונקציה, ולבסוף נצטט משפטים מתמטיים שמסבירים את הקשר בין ההנחות על המציאות למושגים התיאורטיים. חלק חשוב מהתרגיל הוא לראות שתיאורים שונים של אותה תיאוריה יכולים להישמע סבירים במידה שונה. בפרט, ההנחות שמקבלי החלטות מקיימים שלמות וטרנזיטיביות נשמעות הרבה יותר סבירות מהטענה שהם ממקסמים פונקציה מתמטית מסוימת, למרות שבתנאים המתאימים יש שקילות בין הטענות. אך בל נקדים את המאוחר.

יחסים

אנו נדון ביחסים בינאריים. לענייננו, **יחס** הוא משהו שיכול לקרות בין זוגות. כן, זה נשמע רומנטי ואכן נדון גם באהבה וגם בשנאה. כמקובל במקרים שבהם לא ברור לנו איך להגדיר משהו (למשל, אהבה), אנו "נגדיר" את היחס פשוט ע"י רשימה ממצה של כל הזוגות שביניהם הוא מתקיים. זה נשמע טרחני, אבל זו הדרך הבטוחה. לפעמים יש הגדרות קצרות וקולעות יותר. למשל, קל להגדיר "גבוה יותר מ...". אך מכיון שלא תמיד כך הוא הדבר (ע"ע אהבה), אנחנו מסתמכים על הגישה הפרטנית (הנקראת "האקסטנציונלית"). פועל יוצא מגישה זו הוא שאנו חייבים להגדיר על מי אנחנו מדברים. זאת אומרת, היחס תמיד יהיה מוגדר במסגרת הדיון בקבוצה מסוימת.

לדוגמה: נתבונן ביחס "הורה של". אילו היינו בשיעור ביולוגיה, סביר שהיינו מגדירים את היחס לפי מהותו העמוקה, משהו כמו "א' הורה של ב' אם א' השתתף באקט שהצנעה יפה לו, ומקץ תשעה חודשים נולד ב' כשמחצית ממטענו הגנטי זהה לזה של א' ". אך אנחנו פשוט נרשום, לכל ערך אפשרי של א' ושל ב', האם א' אכן הורה של ב' אם לאו. וכדי שהמשימה תהיה מוגדרת היטב, עלינו לפרט באילו א'-ים וב'-ים עסקינן.

נניח שאנו דנים בארבע הדמויות התנכיות { אברהם, יצחק, יעקב, עשיו }. (הסוגריים המסולסלים מציינים קבוצה, ומה שחשוב לענייננו הוא שבקבוצה סדר האיברים אינו משנה.) כדי לבחון את כל הזוגות האפשריים של א' ו-ב', נתבונן בטבלה כמו שעשינו בשיעור שעבר:

האמנם א' (השורה) הורה של ב' (העמודה)?	אברהם	יצחק	יעקב	עשיו
אברהם		v		
יצחק			v	v
יעקב				
עשיו				

הטבלה מתארת את היחס "הורה של": לכל זוג איברים בקבוצה שלנו (שורה ועמודה), מסומן v במשבצת המתאימה אם ורק אם היחס ביניהם מתקיים (הווה אומר, אם הדמות הרשומה בשורה היא הורה של הדמות הרשומה בעמודה).

<u>תכונות יחסים</u>

ליחסים בינאריים כדלעיל יש מספר תכונות שתעניינה אותנו, לרבות השלמות והטרנזיטיביות שאותן כבר הזכרנו באופן כמעט-פורמלי. בהגדרות הבאות, נניח כי יש לנו איברים מקבוצה כלשהיא A, שיסומנו באותיות משתנים כגון x,y,z…, ויש לנו יחס R. כשאנחנו רושמים **xRy** כוונתנו ש-x מתייחס ל-y ביחס R, זאת אומרת, שבטבלה של היחס R מסומן v במשבצת המוגדרת ע"י השורה של x והעמודה של y.

<u>רפלקסיביות</u>: היחס R הוא **רפלקסיבי** אם [לכל x, xRx].

זאת אומרת: יחס רפלקסיבי הוא יחס כזה שבו כל איבר בקבוצה A מתייחס לעצמו. חשוב להדגיש ש:

- בהגדרה כתבנו "לכל x" והתכוונו "לכל x בקבוצה A". לעתים הקבוצה תהיה חשובה מאוד, כי תכונה מסוימת יכולה להתקיים בקבוצה קטנה אך לא בקבוצה גדולה יותר. כדי לא להרבות בלבול, אשתדל להשמיט את שם הקבוצה ממנה לקוחים האיברים, אך עקרונית היא חלק מההגדרה.
- כאן וגם בהמשך, כשנאמר "לכל" הכוונה היא, בשיא הרצינות ל"לכל". מספיק איבר אחד שאינו מקיים את התנאי כדי לקבוע שהיחס אינו רפלקסיבי. זו תהיה באופן כללי הגישה שלנו למילה זו. "לכל" צריך להתקיים בלי יוצאים מן הכלל ובלי תירוצים.
- בהגדרה זו, כמו גם בבאות אחריה, אנו אומרים "אם": היחס נקרא ... אם... . הכוונה היא "אם ורק אם". הווה אומר: אם התנאי שאחרי ה"אם" אינו מתקיים, היחס איננו רפלקסיבי. מקובל לא לכתוב "אם ורק אם" בהגדרות דווקא משום שכולנו מבינים שזוהי הגדרה, ולכן משמעותו של ה"אם" היא "אם ורק אם".
- התנאי דורש שלכל x, xRx. לא נאמר מה בדבר x ו-y השונים זה מזה. ולכן, הקביעה האם היחס רפלקסיבי או לא איננה תלויה בזוגות איברים שונים זה מזה.

קיצורו של דבר: יחס הוא רפלקסיבי אם (ורק אם) ה- v-ים במטריצה שלו מכילים את כל האלכסון הראשי.

<u>שלמות</u>: : היחס R הוא **שלם** אם [לכל x,y, xRy או yRx].

השלמות דורשת, אפוא, שבין כל שני איברים יקרה משהו: או יחס בכיוון האחד, או השני, או שניהם. הערה חשובה:

- "או" מאפשר גם "וגם" אלא אם כן צוין אחרת במפורש. זאת אומרת שיחס שלם מרשה את האפשרות שעבור זוגות מסוימים, x,y יתקיים גם xRy וגם yRx. ככלל, בהמשך לא נחזור ונזכיר ש"או" יכול להיות גם "וגם" (אלא אם כן נאמר במפורש "... או ... <u>אך לא שניהם</u>").

שימו לב: יחס שהוא שלם הוא גם רפלקסיבי. (כדי להשתכנע שזה אכן המצב, בחרו x מסוים, והשתמשו בו גם בתפקיד x וגם בתפקיד y בהגדרת השלמות, ומכאן תקבלו שכל x מתייחס לעצמו.)

<u>סימטריה</u>: : היחס R הוא **סימטרי** אם [לכל x,y, <u>אם</u> xRy <u>אז</u> yRx].

סימטריה היא, באופן לא מפתיע, הדרישה שלא ייתכן שאיבר אחד יתייחס למשנהו בלי שהשני יחזור ויתייחס לראשון. כך, "אח של" הוא יחס סימטרי, אך "הורה של" איננו סימטרי. שימו לב:

- במשמעות הביולוגית של "הורה של", הוא לא רק יחס שאיננו סימטרי באופן כללי. הוא אפילו לא-סימטרי באופן בסיסי: אף פעם לא ייתכן ש-x הורה של y וגם y הורה של x. בשביל לומר שהיחס איננו סימטרי מספיק זוג אחד של איברים x,y כך ש- xRy אך לא yRx. ובמקרה של יחס ההורות הביולוגית נכונה תכונה יותר תובענית: <u>כל אימת</u> ש- xRy לא ייתכן ש- yRx.

- עם זאת, עדיין ייתכן שיחס ההורות יהיה סימטרי אם נגדיר אותו על קבוצה קטנה מספיק, למשל, הקבוצה {יעקב, עשיו}. מכיון שאיש מהם אינו הורה של אחיו, נקבל שהיחס הוא <u>ריק</u>. בתת-המטריצה המוגדרת רק ע"י השורות והעמודות של יעקב ועשיו אין כלל סימוני v. ואז מסתבר שהיחס סימטרי: הדרישה ש" לכל x,y, <u>אם</u> xRy <u>אז</u> yRx" מתקיימת, פשוט מכיון שאין x,y המקיימים את התנאי.

- וזו נקודה חשובה: במתמטיקה ובלוגיקה, משפט תנאי פשוט מטיפוס "אם... אז..." נחשב לנכון באופן אוטומטי של אימת שהתנאי שלו אינו מתקיים.[3] זה לא לחלוטין אינטואיטיבי, ובשפה טבעית יכול להישמע מוזר או אפילו מטעה, אבל בעזרת מוסכמה זו הרבה הגדרות וטענות יוצאות יותר אלגנטיות. למשל, נניח שאב שואל את בנו "ואת השיעורים הכנת, יא בן-בליעל?" והבן משיב, "כן, אבי מולידי, הכנתי הכל." ונניח כי מסתבר שלא היו שיעורים כלל. מבחינתנו, הבן אמר אמת. הוא אמר, "לכל תרגיל x, אם x ניתן כשיעורי בית, הרי שהכנתי את x." אמת, המשפט "נכון על ריק", מכיון שאין שום x המקיים את התנאי "x ניתן כשיעורי בית". אך המשפט עדיין נכון. אולי יכול היה הבן

[3] יש משפטי תנאי שונים. למשל, משפט מטיפוס "אילו הכוס היתה נופלת היא היתה מרחפת באויר" אינו נחשב לנכון רק משום שהכוס לא נפלה. אך בהגדרות המתמטיות אנו משתמשים במשפטי תנאי פשוטים.

להשיב בצורה יותר אינפורמטיבית ("לא היו שיעורי בית"), ואולי אתם אפילו מרגישים שהוא מטעה את אביו במזיד. אך תוכן דבריו אמת הוא.

ולבסוף, תכונה שכבר דנו בה:

<u>טרנזיטיביות</u>: היחס R הוא **טרנזיטיבי** אם [לכל x,y,z, <u>אם</u> (xRy <u>**וגם**</u> yRz) <u>אז</u> xRz].

וכמו סימטריה, גם טרנזיטיביות יכולה להתקיים "על ריק" או "באופן טריויאלי": אם אין שלשה x,y,z, שעבורה גם xRy וגם yRz, דרישת הטרנזיטיביות היא ריקה.

אם נחזור ליחס "הורה של" על קבוצת { אברהם, יצחק, יעקב, עשיו } נמצא שאינו מקיים אף אחת מהתכונות שהדגרנו:

- <u>רפלקסיביות</u> אינה מתקיימת כי יש x, למשל אברהם, שאינו הורה של עצמו. נכון שבמקרה זה <u>כל</u> x הוא כזה: איש אינו הורה של עצמו. ואכן היחס הוא אפילו <u>א-רפלקסיבי</u>: שום x אינו מקיים xRx. אך לצורך הפרכת טענת ה"לכל" מספיק "קיים" אחד: דוגמה נגדית אחת מספיקה כדי לשלול טענה מטיפוס "לכל".

- למעשה, כדי לפסול <u>שלמות</u> מספיק להצביע על אברהם עצמו (בתפקיד x וגם בתפקיד y): מכיון שאברהם אינו הורה של עצמו, השלמות אינה מתקיימת. ואכן, כבר טענו שיחס שלם הוא רפלקסיבי, ומכאן שאם היחס שלנו אינו רפלקסיבי, הוא גם אינו שלם. ובכל זאת ניתן דוגמה נוספת: שלמות אינה מתקיימת כי אין יחסי הורות בין יעקב לעשיו (באף אחד משני הכיוונים).

- <u>סימטריה</u> אינה מתקיימת כי אברהם הוא הורה של יצחק אך ההפך אינו נכון.

- <u>טרנזיטיביות</u> אינה מתקיימת כי אברהם הוא הורה של יצחק, ויצחק – של יעקב, אך אברהם אינו הורה של יעקב.

זה אולי מפתה להחליף את מושג ה"הורה של" ב"הורה מוכלל" – שיכול להיות הורה, הורה של הורה, הורה של הורה של הורה, וכו'. אזי נסתכל על היחס:

האמנם א' (השורה) הורה מוכלל של ב' (העמודה)?	אברהם	יצחק	יעקב	עשיו
אברהם		v	v	v
יצחק			v	v
יעקב				
עשיו				

וזהו כבר יחס טרנזיטיבי. למעשה, יחס זה הוא ה"סגור הטרנזיטיבי" (עם שווא בסמ"ך) של היחס המקורי, "הורה של": זהו היחס הקטן ביותר שמכיל את היחס ממנו התחלנו וגם מקיים טרנזיטיביות. אם היינו מציירים גרף, שבו הדמויות הן צמתים ויש קשתות בין הורה לילדו, הרי שהיחס המקורי עונה על שאלה "האם יש קשת המוליכה מצומת x לצומת y?" ואילו הסגור הטרנזיטיבי הנ"ל עונה על השאלה "האם יש מסלול המוליך מ- x ל-y (דרך קשת אחת או יותר)?"

ועוד דוגמאות מהחיים: נתבונן ביחס האהבה, שהרי הבטחנו דוגמאות פיקנטיות. בהרבה מקרים ניתן להניח שהאהבה רפלקסיבית, כי זה סביר שאנשים אוהבים את עצמם (למרות שהיינו נמנעים מהנחה זו אילו היינו בשיעור על התנהגות אובדנית או אפילו על דכאון קליני). לעומת זאת, לצערנו הרב אהבה איננה יחס סימטרי. (או לשמחתנו: איפה היו הספרות והשירה ללא אהבות נכזבות?) וכמובן שאיננה יחס טרנזיטיבי, שנאמר, "אני אוהב את אשתי, ואשתי אוהבת את המאהב שלה, אך אני איני אוהב את המאהב שלה". ולבסוף, האהבה איננה שלמה (למרות האמרה, "אין דבר שלם יותר מלב שבור") – מכיון שרוב זוגות בני האדם פשוט לא מכירים זה את ואף לא שמעו זה את שמעה של זו, אין לצפות שבין כל שני אנשים שנבחר תתקיים אהבה לפחות באחד משני הכיוונים. והשנאה? זו ודאי אינה רפלקסיבית (מספיק למצוא אדם אחד

שאינו שונא את עצמו). השנאה כנראה קרובה לקיים את תנאי הסימטריה יותר מאשר האהבה (כי לצערנו שנאה מולידה שנאה ביתר קלות מאשר אהבה מולידה אהבה), אך ודאי אינה תמיד סימטרית. **ולבסוף, היא גם לא יחס טרנזיטיבי: אם א' שונא את ב' ו-ב' שונא את ג', אין זה אומר ש-א' שונא את ג': אולי א' ו-ג' כלל אינם מכירים זה את זה, ואולי הם מכירים ומחבבים זה את זה** בזכות האויב המשותף, הלא הוא ב'. מסתבר, אם כך, שהתנאים שלנו לא מתקיימים ביחסים בין-אישיים, אז נחזור לכלכלה.

<u>יחסי העדפה</u>

היחסים שבראש מעינינו הם יחסי העדפה – הדרך שלנו לתפוס במודל מתמטי את העובדה שמישהו (צרכן, פירמה, חברה, מדינה...) מעדיף אפשרות אחת על פני אחרת. יחס העדפה כזה יוסמן לעתים קרובות ב- ≥. הערה טיפוגרפית: דמיינו בנפשכם שהציור הנ"ל מסולסל. (יכולותיי ב- Word מוגבלות.) חשוב להבין שלא מדובר ביחס "גדול שווה" המוגדר על מספרים, וחמור מזה – לפעמים גם על וקטורים. מדובר ביחס חדש, שאינו מוגדר מתמטית אלא מציין עובדה אמפירית. כשנכתוב, לגבי זוג אלטרנטיבות, $x \geq y$, נתכוון לומר ש"בהינתן הבחירה בין x ל- y, מקבל ההחלטה מוכן לבחור x" (הווה אומר, מקבל ההחלטה חושב ש- x ממש יותר מלהיב מ- y, או לפחות אדיש בין השניים).

ההנחות המקובלות על יחס העדפה, כפי שכבר נרמז בשיעור הקודם, הן שלמות וטרנזיטיביות. יחס המקיים שתי תכונות אלו נקרא **<u>יחס סדר חלש.</u>**

מעט על ההצדקה להנחות אלו:

באינטרפרטציה תיאורית, היינו, כתיאור של המציאות:

<u>שלמות</u> – כמעט שאינה הנחה. גישת ההעדפה הנגלית אומרת שהבחירה שבפועל בחרה המחליטה היא-היא הבחירה המועדפת על-ידיה. ואכן, אם מקבלת החלטות תוכיח לנו באותות ובמופתים שהיא מעדיפה y על פני x, ותישבע בכל היקר והקדוש לה שאכן כך העדפותיה, אך לבסוף תבחר x ולא y, סביר שאנחנו, ככלכלנים, נבחר בהחלטה המתבצעת בפועל על פני העדות המילולית. ומרגע שזיהינו "העדפה" עם "בחירה בפועל", השלמות נראית כמעט טאוטולוגית (הווה אומר, כמעט אינה ניתנת להפרכה): מכיון שבסופו של דבר אלטרנטיבה מסוימת נבחרת, הרי שהיא האלטרנטיבה המועדפת על-פי הגדרה.

בפועל הדברים מסובכים יותר. ראשית, כשאנו רושמים $x \geq y$, אנחנו מתיימרים לומר משהו מעבר לבחירה מסוימת. בפרט, אנחנו מאמינים שהבחירה שצפינו בה אתמול תאמר משהו על הבחירה מחר. כך שמובלעת בדברינו הנחה של עקביות, משהו בסגנון "תמיד x יוכל להיבחר בהינתן y". ומרגע שאמרנו "תמיד", הפקענו את ההנחה מרשות הטאוטולוגיות ויצקנו בה תוכן אמפירי.[4] ההנחה ניתנת להפרכה, ואכן יש לצפות שתופרך בניסוי זה או אחר. זכרו: כל הנחה בעלת תוכן תתגלה כלא מדויקת. כאשר הנחה מופרכת, יש בראש ובראשונה לשמוח שהרי הסתבר שהיתה בעלת תוכן מלכתחילה.[5] ואחר-כך יש לשאול את עצמנו עד כמה ההפרכה מהותית וקריטית.

שנית, בעצם ניסוח היחס הזוגי בין אלטרנטיבות אנחנו מבליעים מספר הנחות נוספות, למשל, שבשתי האלטרנטיבות לבדן יש מספיק מידע בשביל לקבוע העדפה. בפועל, מסתבר שלעתים נוכחותה של אלטרנטיבה שלישית יכולה לשנות את ההעדפה בין שתי אלטרנטיבות נתונות. למשל, בניסוי של כהנמן וטברסקי משתתפים נתבקשו לציין העדפות בין אלטרנטיבות א' ו-ב', כשהיו לשתיהן יתרונות וחסרונות. לחליפין, הם התבקשו לבחור אלטרנטיבה מהקבוצה {א,ב,ג} כאשר ג' נשלטה ע"י (=היתה פחות טובה מכל בחינה שהיא מאשר) א' אך לא ע"י ב'. מסתבר שבנוכחות ג', שלא נבחרה ממילא, א' היתה יותר פופולרית מאשר בהיעדר ג'. אינטואיטיבית, נוכחותה של ג' גרמה ל-א' להיראות טוב יותר, סיפקה סיבה מסוימת לבחור את א' ולא את ב'. תופעה זו היא הפרה של אקסיומה הנקראת "אי-תלות באלטרנטיבות לא רלוונטיות". בניסוח שלנו, המתחיל עם יחסי העדפה בין זוגות, אנו מניחים שמקרים כאלה לא ייתכנו. רוצה לומר: אנו מניחים, באופן לא מפורש, שאי-התלות באלטרנטיבות לא רלוונטיות מתקיימת, ובזכותה ניתן להסתפק ביחסי העדפה בין זוגות.

<u>טרנזיטיביות</u> – זו כבר הנחה מובנת יותר, ולו רק מכיון שברור לנו מתי תתגלה כלא-נכונה. בפרט, אם מקבל ההחלטות מעדיף אלטרנטיבה א' על ב' כל אימת ש-א' עדיפה על ב' "מרוב הבחינות", הרי זה כאילו שהוא מקיים הצבעה על כל החלטה בין זוג אלטרנטיבות. ומכיון שהיחס "מנצח בהצבעת רוב" איננו טרנזיטיבי באופן כללי, גם הפרט הנ"ל עלול למצוא עצמו נע ב"מעגלי" העדפה.

---

[4] ניתן להכניס לתיאור האלטרנטיבות מספיק פרטים, כגון זמן ומקום, כדי שהשלמות תהיה ריקה מתוכן, אך אז היא גם לא שימושית לחיזוי.
[5] זו היתה בדיחה.

כמו שניתן לנחש, יש בספרות דוגמאות מספר להפרה של הטרנזיטיביות. הייתי מציין מתוכן שתיים: האחת היא תופעה כמעט אוניברסאלית שהשלכותיה הכלכליות הן מזעריות, והשניה היא מוגבלת יותר, אך בעלת השלכות כלכליות חשובות. אך את הדיון הזה עדיף לנהל בהמשך, אחרי שנבהיר לעצמנו עוד מספר תכונות של יחסים.

באינטרפרטציה נורמטיבית, היינו, כהמלצה למקבלי החלטות:

<u>שלמות</u> – זו אומרת, בסך הכל, שבסופו של דבר איזושהי החלטה תתקבל. הימנעות מהחלטה אף היא החלטה, ואנו מצפים ממקבלת החלטות רציונלית שתשאל את עצמה מה בעצם יקרה אם "לא תחליט כלום". וכך, השלמות מוצדקת פשוט ע"י הצורך לפעול בעולם מחד גיסא, והרצון לתאר את פעולתנו במודל מאידך גיסא.

כמובן, יש גם צורך להצדיק את ההנחות הסמויות: העובדה שהבחירה תהיה מספיק עקבית או קבועה בזמן מוצדקת לרוב ע"י הציפייה מאיתנו, הכלכלנים שממדלים את הסיטואציה, לשלב במודל את כל הגורמים הרלוונטיים. למשל, אם אומר לכם שמאן דהוא אינו רציונלי מכיון שבבוקר הוא העדיף לקום ממיטתו ובערב, בניגוד מוחלט להעדפותיו-שלו, בחר לשכב לישון, סביר שתסבירו לי שהבחירה תלויה בשעה של היום, במספר השעות מאז התנומה האחרונה וכו'. כך, ייתכן שההנחה תהיה בלתי סבירה במודל מצומצם, אך תתגלה במלוא זוהרה במודל רחב ומפורט יותר. (הדברים אמורים גם באינטרפרטציה התיאורית.)

כמו-כן, יש צורך להצדיק את אי-התלות באלטרנטיבות לא רלוונטיות, היינו את ההנחה שהבחירה בין א' ל- ב' אינה תלויה באלטרנטיבה ג' שממילא אינה נבחרת. ההצדקה הטובה ביותר, לדעתי, פונה להעדפותינו בנוגע לסוג מקבלי ההחלטות שהיינו רוצים להיות. זאת אומרת: לא הייתם רוצים לקיים אקסיומה זו? האם באמת הייתם מרגישים נוח אילו הוכחתי לכם שאתם מפרים את האקסיומה חדשות לבקרים?

<u>טרנזיטיביות</u> – גם כאן ההצדקה היא בעיקר על-ידי פניה להעדפות "מסדר שני", היינו, ההעדפות על פני אילו העדפות היינו רוצים לחשוף בבחירותינו. רוב האנשים מרגישים לא נוח עם המחשבה שבחירותיהם נעות במעגלי העדפה.

לאקסיומות כמו הטרנזיטיביות יש הצדקות – הן באינטרפרטציה תיאורית והן בנורמטיבית – על-בסיס "משחקים" שבהם יכולים מקבלי ההחלטות להשתתף. למשל, נניח שלמשה יש העדפות

מעגליות, והוא מעדיף את א' על-פני ב', את ב' על-פני ג', ואילו את ג' על-פני א', ושכל ההעדפות הללו הן "חזקות", היינו, ללא אדישות. אזי, יש שיטענו שאפשר להציע לו Dutch Book[6] או לייצר "משאבת כסף" (Money Pump) באופן הבא: נניח שהוא מחזיק באלטרנטיבה א'. נציע לו לעבור ל-ב' עבור סכום כסף קטן. בהינתן העדפותיו, סביר שיסכים אם הסכום יהיה קטן דיו (זו תהיה הנחות רציפות שעוד נגיע אליה). עתה נוכל להציע לו להחליף את ב' ב-ג' תמורת תשלום קטן נוסף, ולבסוף נחזור ל-א', כשהאומלל סיים במקום שבו התחיל ואילו אנו התעשרנו על חשבונו. לאור רעיונות כאלה, יש המאמינים שכוחות השוק ינצלו מקרים של חוסר-טרנזיטיביות באופן כזה שהתופעה תיעלם מהשוק.

יש לי חיבה רבה לטיעונים אבולוציוניים ככלל, אבל לדעתי הטיעון הזה לא ממש משכנע. ראשית, כשבוחנים ברצינות מודלים אבולוציוניים עם התנהגות "רציונלית" ו"פחות רציונלית", זה לא כל כך קל להשתכנע שהראשונה תדחק את רגלי האחרונה. הדבר תלוי, למשל, בקצב התרבות צורות ההתנהגות הללו, בקצב הפגישות בין סוגי הפרטים השונים וכיו"ב. שנית, סביר להניח שאפילו משה דלעיל יבחין, אחרי סיבוב אחד או שניים במעגל א'-ב'-ג'-א'-ב'-ג' שמשהו פה לא בסדר. דווקא מהניסויים של כהנמן וטברסקי למדנו את חשיבות ה- framing, היינו, האופן שבו אלטרנטיבות מיוצגות. העדפות התקפות בסיטואציות שוק "נורמליות" יכולות להשתנות בסיטואציות מלאכותיות כגון ה- Dutch Books. לאור זאת, אני מעדיף את ההצדקות האינטואיטיביות של אקסיומות כמו טרנזיטיביות (וגם אי-תלות באלטרנטיבות לא רלוונטיות) על פני הנסיונות לגזור אותן משיקולי משחק או הישרדות.

אוקיי, עת להתקדם. נפתח בשתי הגדרות של יחסים הנגזרים מיחס העדפה $\succsim$, והן הבאות:

הגדרה: לכל x ו- y:

א. **$x \sim y$** אם ($x \succsim y$ <u>וגם</u> $y \succsim x$).

ב. **$x \succ y$** אם ($x \succsim y$ <u>אך לא</u> $y \succsim x$).

כך, $\succ$ ו- $\sim$ נקראים "החלק הלא-סימטרי של $\succsim$" ו"החלק הסימטרי של $\succsim$", בהתאמה. $\succ$ מציין העדפה חזקה, ואילו $\sim$ מציין אדישות בין האלטרנטיבות.

[6] חבר שלי סיפר לי שמקור הביטוי בתקופות שבה אנגליה והולנד היו במלחמה, וכל מיני התנהגויות פסולות זכו באנגלית לתואר Dutch. החבר, אגב, הולנדי.

נציין עתה מספר עובדות שקל יחסית לוודא את נכונותן. נדייק: זה אפילו קל מאוד לוודא את נכונותן ברגע שברור מה רוצים מחיינו. אלו טענות מתמטיות פשוטות אך טיפה מופשטות. כדי להוכיח כל אחת מהן, מה שבעצם צריך לעשות זה לרשום בדיוק מה ידוע ומה צריך להוכיח. כשנסיים לבאר את ההגדרות, לא יישאר הרבה מה להוכיח. ובכל זאת, זה תרגיל טוב להתמודד עם הוכחת טענות אלו. (הניחו שקבוצת האלטרנטיבות אינה ריקה.)

טענה 1: לכל יחס $\succeq$

א. $\sim$ סימטרי;

ב. $\succ$ איננו סימטרי, אלא אם כן הוא ריק (למעשה, אין x,y שעבורם $x\succ y$ וגם $y\succ x$)

ג. $\succ$ איננו רפלקסיבי (למעשה, אין x שעבורו $x\succ x$).

טענה 2: נניח כי $\succeq$ יחס סדר חלש (שלם וטרנזיטיבי), אזי:

ד. $\sim$ רפלקסיבי;

ה. $\sim$ טרנזיטיבי;

ו. $\succ$ טרנזיטיבי.

כך, אם $\succeq$ הוא יחס סדר חלש, אז חלקו הסימטרי, יחס האדישות $\sim$, הוא <u>רפלקסיבי, סימטרי, וטרנזיטיבי</u>. יחס כזה נקרא <u>יחס שקילות</u> והוא מציין ששני איברים הם "אותו הדבר" מבחינה מסוימת. יחס השקילות הפשוט ביותר הוא השוויון, אך לפיו כל איבר שקול אך ורק לעצמו. אם נבחן קבוצת אנשים ונגדיר עליהם את היחסים "בעלי אותו גובה" או "בעלי אותו שם פרטי" (בהנחה שיש שם פרטי מוגדר היטב, למשל, השם הראשון בתעודת הזהות) – נקבל עוד יחסי שקילות, קצת יותר מעניינים מיחס השוויון. למעשה, לכל פונקציה f ניתן להגדיר יחס שקילות ע"י שוויון ערך הפונקציה: אם [$x\sim y$ אם (ורק אם) $f(x)=f(y)$], אזי $\sim$ הוא יחס שקילות.

(תרגיל מתקדם: הוכיחו, או השתכנעו שאלה הם כל יחסי השקילות, הווה אומר שיחס שקילות $\sim$ תמיד ניתן ל"ייצוג" ע"י איזושהי פונקציה f, כך שהפונקציה מקבלת ערכים זהים לשני איברים אם ורק אם האיברים מתייחסים זה לזה ביחס $\sim$.)

במקרה שלנו, יחס השקילות של "אדישות" בין אלטרנטיבות יהיה "מיוצג" ע"י פונקציה שנכנה אותה פונקצית תועלת, כך ששתי אלטרנטיבות תהיינה שקולות בעיני המחליט אם ורק אם יש להן ערך תועלת זהה. אך זה יהיה פועל יוצא של דרישה יותר מחמירה שיש לנו מפונקצית התועלת: אנחנו רוצים שהיא גם תתאר בדיוק העדפות חזקות, לא רק אדישויות. נעבור, אם כך, להגדרות מדויקות.

תרגילים: בשלב זה אתם אמורים להיות מסוגלים לפתור:

בעיות 1,2 בבחינה לדוגמה מס' 1

בעיות 1,2 בבחינה לדוגמה מס' 2

בעיות 1,2,3 בבחינה לדוגמה מס' 3

ייצוג יחס העדפה ע"י פונקציה תועלת

נניח כי יש לנו יחס ≥ על קבוצת אלטרנטיבות A. נניח כי u היא פונקציה על A, המייחסת ערך ממשי לכל איבר ב- A. אזי נאמר כי **u מייצגת את היחס ≥** אם (ורק אם – בהגדרה עסקינן!) **לכל** זוג אלטרנטיבות x,y (ב-A),

$x \geq y$ אם ורק אם $u(x) \geq u(y)$

(זהירות: הסימן ≥ מימין מייצג את יחס ההעדפה בין האלטרנטיבות, בשעה שאותו הסימן משמאל הוא אי-השוויון הרגיל בין מספרים ממשיים. אני מצטער על הבלבול ותודה שכבר סלחתם לי![7])

הווה אומר: פונקצית התועלת מתארת לנו את בחירות המחליט. לכל זוג אלטרנטיבות העשויות (או עלולות) לעמוד על הפרק, אם נבדוק לאיזו אלטרנטיבה יש ערך תועלת גבוה יותר, נדע איזו תיבחר. אמנם לעיל רשום אי-שוויון חלש ("גדול או שווה") וכן יחס העדפה חלש, אך למעשה הדבר נכון גם להעדפה חזקה. למען הדיוק:

[7] מכיון שלרובכם עדיין אין ילדים, אולי אתם לא מכירים את הציטוט מ"ספר השיאים של פוז" של דוד גרוסמן. חובה לכל גיל.

טענה 3: נניח כי ≥ יחס סדר חלש (שלם וטרנזיטיבי), אזי:

u מייצגת את ≥ **אם ורק אם** נכונה הטענה הבאה:

[לכל זוג אלטרנטיבות x,y (ב-A),

x>y אם ורק אם u(x) > u(y) **]**

טענה 4: נניח כי ≥ יחס סדר חלש (שלם וטרנזיטיבי), אזי:

אם u מייצגת את ≥ **אזי** נכונה הטענה הבאה:

[לכל זוג אלטרנטיבות x,y (ב-A),

x~y אם ורק אם u(x) = u(y) **]**

ובמלים אחרות: כשנאמר שפונקצית תועלת מייצגת את העדפות מקבלת ההחלטות, אפשר לחשוב על אי-שוויון חלש שקול להעדפה חלשה, או על אי-שוויון חזק שקול להעדפה חזקה. שניהם גוררים את העובדה ששוויון (של התועלת) יהיה שקול לאדישות. עם זאת, ההפך של טענה 4 אינו נכון: אין זה מספיק שפונקצית התועלת תייצג שקילות כדי שהיא תייצג גם העדפה.

ועתה, סוף סוף, משפט:

משפט: אם קבוצת האלטרנטיבות A היא סופית, היחס ≥ ניתן לייצוג ע"י פונקציה ממשית אם ורק אם הוא יחס סדר חלש.

משמעויות המשפט

למשפט הנ"ל יש מספר משמעויות חשובות:

מבחינה נורמטיבית הוא יכול לשכנע אותנו שאנו רוצים לקבל החלטות ע"י מקסימיזציה של פונקצית תועלת. המשפט לא אומר איזו פונקציה, אך הוא יכול לשמש נימוק לכך שכל אחד מאיתנו (וכנ"ל כל ארגון, פירמה, מדינה וכו') ימצא לעצמו איזושהי פונקציה, כראות עיניו או עיניה, ויקבל החלטות כך שהפונקציה תמוקסם. לצורך זאת מספיק שהמחליטה תשתכנע שהיא רוצה לקבל החלטות ומוכנה להתעמת איתן (שלמות), ושהיא רוצה שהעדפותיה תהיינה

טרנזיטיביות. מי שהסכימה עם עקרונות אלה בעצם כבר התחייבה להתנהג כאילו שיש לה פונקצית תועלת שהיא מנסה למקסם. אין שום הכרח שהיא אכן תנסה לברר מהי הפונקציה שלה ותהפוך את התהליך למפורש. אך ההתנהגות תהיה כאילו זהו אכן תהליך קבלת ההחלטות. מעבר לכך, מקסום פונקצית תועלת הוא בערך התהליך המפורש היחיד שאנחנו יודעים שיבטיח שלמות וטרנזיטיביות, ולכן המחליטה יכולה להשתכנע שאכן זה מה שהיא רוצה לעשות.

מבחינה תיאורית נחזור לדיון על גלובליזציה ויתרונות השוק החופשי. עלה בו קריטריון אופטימליות פארטו, והגענו לנקודה שבה שמנו לב שהקריטריון תלוי בהנחה שהפרטים ממקסמים פונקצית תועלת. ואם אומר לכם שאני לא ממקסם תועלת, ואשתי לא ממקסמת תועלת, ומר כהן מקומה ג' בכלל לא יודע מה זו פונקציה, הרי שלא ברור על מי מדובר כשאנחנו מדברים על אופטימליות (או יעילות) פארטו. וכאן נכנס המשפט הנ"ל ומתגלה במלוא הדרו הרטורי: מכיון שכולנו מקבלים החלטות, הרי שלא נחוץ הרבה בשביל להניח שאני, ואשתי, ואפילו מר כהן מקומה ג' מקיימים את הנחת השלמות. ואולי זה גם די סביר שאנחנו, לרוב, לפחות בהחלטות גדולות, נוטים להיות טרנזיטיביים. כמובן שיש יוצאים מן הכלל (ובחלקם נדון מיד). אבל בגדול, אפשר לחיות עם ההנחה הזו. ואז יכול לבוא מי, לשלוף שיקופית PowerPoint עם המשפט הנ"ל ולומר "אהה! אם הסכמתם שהזוג הנכבד וכן שכנם מר כהן מקיימים שלמות וטרנזיטיביות, הרי שהסכמתם שהם כאילו ממקסמים פונקצית תועלת – כל אחד את שלו או שלה. ולכן כל הדיון ביעילות פארטו אכן תקף לגבי אנשים אלה!"

צריך טיפה להיזהר כאן, כי המונח "תועלת" לעתים קרובות גורם לנו לחשוב על "רווחה" או אפילו "אושר", דהיינו, אותם דברים שמן הראוי למקסם בכלכלה ובחברה. ואין זה ברור שזוהי פרשנות נכונה. פונקציה התועלת שלנו תהיה בסך הכל יצור מתמטי, המשמש את הכלכלן לנבא בחירות של מקבל ההחלטות על-סמך בחירות במצבים דומים בעבר. ההצלחה לנבא כיצד יבחר פרט מסוים אינה בהכרח עדות לכך שאנו יודעים מה טוב לו, מה גורם לו אושר, רווחה, או כל דבר אחר.

נושא הרווחה (ובודאי נושא האושר) הוא חשוב ורציני. יש במדעי החברה נסיונות למדוד רווחה (well-being), למשל, ע"י שאלונים, שבהם אנשים מתבקשים לדרג את רווחתם על סקאלה מ-1 עד 10, או להשוות את רווחתם בהווה לרווחתם לפני מספר שנים וכו'. מדידות אלו מראות, לרוב, שיש קשר בין הרווחה המדווחת לרמת הכנסה, אך הקשר יחסית חלש (מקדם מתאם שנע

סביב 0.2: עליה בסטיית תקן אחת בהכנסה מוסיפה בממוצע רק 0.2 סטיות תקן לרווחה המדווחת). קשר זה חזק יותר אם אנו מגבילים את תשומת לבנו לאנשים משכבת גיל מסוימת מאשר אם אנחנו מערבים אנשים מגילאים שונים. ההסבר המקובל לתופעות אלו הוא "רמת הציפיות" (aspiration level) שיש לכל פרט, ואשר משמשת כ"נקודת ייחוס" (reference point) להערכה כאשר אדם נשאל לגבי רווחתו. מכיון שרמת הציפיות משתנה עם הזמן, ובפרט עולה כאשר האדם מתרגל להיות עשיר יותר, הרי שהרווחה הנמדדת על-ידי "דיווח עצמי" אינה תלויה רק במוצרים שהאדם צורך, אלא גם בתצרוכת אליה הורגל, בתצרוכת של האנשים סביבו וכו'. כך, למשל, אם נעקוב אחרי אותו אדם לאורך השנים, סביר שהכנסתו עולה ועימה תצרוכתו, אך מכיון שזה נכון גם לכל הסובבים אותו לא נראה אפקט גדול של הכנסתו על רווחתו. לעומת זאת, בשכבת גיל מסוימת ייתכן שכל האנשים משווים את עצמם פחות או יותר לקבוצה דומה של פרטים, ולכן יש להם רמות ציפיות דומות ולהכנסה תהיה השפעה גדולה יותר על הרווחה.

שינוי רמת הציפיות מסביר גם תופעות מרשימות של הסתגלות: בניסוי מפורסם נבדקה רווחתם (המדווחת) של אנשים שעברו חוויות ששינו את חייהם, לטוב ולרע. חלקם זכו בהגרלת לוטו שהפכה אותם למיליונרים והאחרים עברו תאונה שבה אבדו את רגליהם. האנשים נשאלו לרווחתם מיד אחרי האירוע וגם שנה מאוחר יותר. ואכן, מיד אחרי האירוע הרווחה התנהגה כמצופה: זוכי ההגרלה היו בשמים והנכים היו בדכאון. אך, ראו זה פלא, כאשר אותם אנשים נשאלו שנה מאוחר יותר, לא נמצא הבדל משמעותי בתשובותיהם. ההשערה היתה שרמת הציפיות היא דבר נזיל למדי, ואנשים מתרגלים גם לטוב וגם לרע.

לממצאים אלה יכולות להיות מסקנות מרחיקות לכת לגבי מה שהכלכלה עושה או מנסה לעשות. אנחנו חושבים כאן על התועלת כדבר שפרטים מנסים למקסם, ושגם ראוי לה לחברה שתגדילו אם אפשר (כמו במושג יעילות פארטו – להגדיל לכמה בלי לפגוע באחרים). במאקרו כלכלה מסתכלים על גדלים מדידים יותר, כמו תוצר לאומי לנפש, ומשתמשים בו או בקצב הגידול שלו כמדד להצלחתה של כלכלה מסוימת. אך אם התועלת, כפי שהיא נמדדת מהחלטות הפרט, ומדדי התוצר אינם קשורים לשום דבר שמזכיר רווחה, שלא לדבר על עושר, אולי אנחנו חוקרים את הבעיות הלא נכונות? מה הטעם לוודא שמנגנון זה או אחר מבטיח תוצאה יעילה פארטו או שמדיניות כלכלית מסוימת מעודדת צמיחה, אם אף אחד לא נהנה מתועלת גבוהה או מרמה גבוהה של תוצר? והיו שאמרו שבעקבות הממצאים דלעיל, אין טעם להילחם בעוני, שהרי ממילא כולם מתרגלים למצבם, והעניים לא יהיו מאושרים יותר אם נפתור את מצוקתם הכלכלית.

מסקנות אלו אכן נשמעות קצת מוגזמות, וחמור מכך: הן אפילו נשמעות תירוצים. ואכן, לא ברור שמדידת הרווחה היא פשוטה כל כך. כלכלנים, האמונים על עקרון ההעדפה הנגלית, ושומעים על ממצאי הרווחה של זוכי ההגרלה וקרבנות התאונה שואלים לרוב "אם כך, האם זוכי ההגרלה יהיו מוכנים להתחלף?" ואכן, אם היינו מתייחסים ברצינות לממצא שהרווחה זהה, מדוע שאדם יעדיף גורל זה על פני זה? אבל משהו כאן לא נשמע לנו נכון, ועולה השאלה, האם מדד הרווחה אמין מספיק כדי להשתמש בו לקביעת מדיניות כלכלית או תפיסת עולם שלמה. ייתכן, למשל, שאנשים הנשאלים לרווחתם אכן מספקים תשובה שהיא יחסית לתחושותיהם בימים החולפים, אך שמדי פעם הם ערים לכך שיש נקודות ייחוס אחרות בעולם. אדם שאיבד את שתי רגליו יכול להיות בעל סיפוק בעבודתו, אך יכול להיות גם שפעם ביום הוא נאבק בגרם מדרגות ללא גישה לנכים ונזכר זכרו היטב שגורלו יכול היה להיות טוב יותר. יתרה מזו, יש ניסויים פסיכולוגיים שמראים שהתשובה לשאלה האמורפית "כמה את/ה מרוצה מחייך" ניתנת להשפעתם של גורמים שונים. בניסוי מסוים היא נשאלה בסמיכות לשאלה "כמה דייטים היו לך בחודש האחרון" – לפעמים לפניה ולפעמים אחריה. הסתבר, שכאשר שאלת הרווחה נשאלה קודם, היה בין התשובות לשאלות מתאם נמוך; אך כאשר שאלת הרווחה נשאלה מיד אחרי שאלת הדייטים, היה ביניהן מתאם גבוה. בהנחה שהתשובה לגבי הדייטים היא פחות או יותר עובדתית, ממצא זה מרמז שניתן להשפיע על התשובה לשאלת הרווחה ע"י הפניית תשומת לב הנשאל/ת להיבטים שונים בחייהם.

ולהלן דעה מאוד אישית (אם כי אינני היחיד המחזיק בה): אין לנו מושג ירוק אושר מהו. יש שימצאו את האושר בכוח וכסף, ויש – באהבה ובחברות; יש שעבורם האושר הוא הנירוונה או האמונה, ויש שעבורם הוא החיפוש והספק. אותו אדם יכול לשנות את דעתו פעמים הרבה במהלך חייו, וגם לו היתה לנו הגדרה מילולית עדיין אין זה ברור שנדע למדוד את האושר לפי הגדרה זו. לעומת זאת, הסבל דוקא די מובן לנו. אנשים אינם נהנים להיות רעבים וחולים, או לאבד ילדים במחלות ילדות. ולכן, אולי מטרה אפשרית לכלכלה איננה מקסום האושר אלא מזעור הסבל. ואת הסבל לעתים ניתן למדוד: מספר החולים והמתים, מספר חסרי הבית, אחוז הילדים החיים מתחת לקו העוני, אחוז המובטלים וכו'. הכנסה כספית ומוצרים חומריים רחוקים מלהבטיח לנו אושר, אך הם בהחלט מסייעים בהפחתת הסבל.

ואם נחזור לענייננו, נסכם שפונקצית התועלת אינה מתיימרת למדוד אושר או אפילו רווחה. ההגדרה היחידה של "תועלת יותר גבוהה" היא "בהינתן האפשרות, הפרט היה בוחר..." – יש כאן שמירה על ריבונות המחליט, שקובע בפעולותיו לאיזו אלטרנטיבה יש תועלת גבוהה יותר

(במודל של הכלכלן). בהשוואת תועלות אין שום יומרה לומר משהו על התהליך המנטלי המתבצע במוחו של המחליט, ולא על מושגי רווחה נפשית. עם זאת, בהחלט ייתכן ש"תועלת יותר גבוהה" כפי שהיא נמדדת במודלים שלנו לא תהיה רחוקה מהפחתת הסבל כשזה האחרון הוא סכנה ממשית.

חשוב לציין שבמודל שלנו אין פונקציות נפרדות למדידת אושר ולמדידת סבל. מקסום תועלת שקול למזעור האנטי-תועלת. ההעדפות שאנו דנים בהן לא מבחינות בין נסיון למקסם עונג או למזער כאב, למרות שבפסיכולוגיה התופעות הללו נחשבות לשונות. באופן אינטואיטיבי, לעתים יש הבדל גדול בין השתיים. למשל, אדם בולע כדור נגד כאב ראש כדי לצמצם כאב, וקונה כרטיסים לקונצרט כדי להרבות עונג. אך לא תמיד האבחנה כל כך פשוטה. כשאדם יורד על מנת חומוס בריאה ניתן לראותו כמצמצם את כאב הרעב, או כמגדיל את ההנאה מהחומוס והשמן הנלווה אליו. לעתים, בעוד אנו באמצעיתה של צלחת החומוס, אנחנו יכולים לשים לב שאנחנו כבר לא רעבים, ועברנו את הגבול שבין סיפוק צורך (והקטנת כאב) לבין זללנות (והגברת עונג). אך האבחנות לעתים בעייתיות. לענייננו, יש מגוון רב של תופעות שבהן אין צורך לבצע אבחנה זו. כל עוד המחליטה מקיימת שלמות וטרנזיטיביות (וכל עוד מתקיימות ההנחות הסמויות של המודל, שלמען האמת עלולות להיות בעייתיות כאן), ניתן לחשוב על המחליטה כממקסמת תועלת **או**, באופן שקול לחלוטין, כממזערת אנטי-תועלת – מדובר פשוט בשני ייצוגים מתמטיים שקולים של אותם דפוסי התנהגות.

חשוב לשים לב, כמו באינטרפרטציה הנורמטיבית, שאין משפט הייצוג (של יחס העדפה על-ידי פונקצית תועלת) אומר דבר על פונקצית התועלת עצמה, כגון, מהי פונקציה סבירה, הגיונית, או "רציונלית". מקסום תועלת הוא רק עניין של עקביות העדפות. לצורך העניין, אפשר לחשוב גם על אמא תרזה וגם על אדולף היטלר כממקסמי פונקציות תועלת מסוימות. אמא תרזה ניסתה להביא למינימום את מספר הילדים הרעבים בעולם, ואדולף היטלר – את מספר הילדים היהודים והצוענים. יש לנו תחושות שונות מאוד לגבי פונקציות התועלת הללו, האופי האנושי והערכים שהן משקפות. אך שתיהן פונקציות תועלת, וכל עוד התנהגויות הפרטים הנ"ל עקביות מספיק כדי שניתן יהיה לתארן כמיקסום (או מזעור) פונקציה כלשהי, הרי הן נופלות במסגרת המודל. חשוב לזכור: באמירה שאדם ממקסם תועלת אין שום שיפוט מוסרי, חיובי או שלילי.

מבחינה מטא-מדעית יש למשפט חשיבות רבה מכיון שהוא מגדיר עבורנו את מושג התועלת. מושג זה היה אינטואיטיבי בדיונים במאות ה-18 וה-19. עם תחילת המאה ה-20 התפתחה

בפילוסופיה של המדע גישה המכונה "הפוזיטיביזם הלוגי", שאחד מעקרונותיה היה קישור כל מושג תיאורטי לתצפיות, והגדרתו במדויק ע"י האופן שבו הוא נמדד. הכלכלה הושפעה מחשיבה זו, ופנתה אף היא להגדיר את מושג "פונקצית התועלת" באופן אמפירי. נשאלה, אפוא, השאלה, מה זאת אומרת "למקסם פונקצית תועלת"? מה לא ייחשב למיקסום?[8] האקסיומות המנוסחות במונחי התצפיות מספקות את התשובה: אם המחליטה משנה את דעתה (סותרת את השלמות) או מקבלת החלטות לא-טרנזיטיביות (למשל, נעה במעגלים), אזי הופרכה ההשערה שהיא ממקסמת פונקצית תועלת. אולם המשפט אומר גם את הכיוון ההפוך: כל עוד האקסיומות מתקיימות, התיאוריה איננה מופרכת.

כיוון חשיבה זה מעלה שאלה נוספת, והיא שאלת היחידות: באיזו מידה אכן מגדירות התצפיות פונקצית תועלת מסוימת? אם שני כלכלנים מתווכחים, איזו פונקציה תועלת יש לפרט מסוים, האם זהו וויכוח מדעי, בעל תוכן אמפירי, או שמא הם מבטלים את זמנם לריק מכיון שהתיאוריות שלהן למעשה שקולות לכל דבר וענין? זו נקודה חשובה ועוד נדון בה בהמשך. אך ראשית עלינו לסגור כמה פרטים מתמטיים.

<u>המקרה האינסופי</u>

כאמור, המשפט שהוצג לעיל תקף לקבוצת אלטרנטיבות סופית. אך בחיים יש לנו גם קבוצות אינסופיות. מה יהא עליהן?

רגע, אתם מזדעקים, או אמורים להזדעק: מה אינסופי בחיינו? חיינו, למרבה הצער, סופיים בעצמם. הרי מחירים נמדדים עד דיוק של אגורות, וכמויות – עד רמת דיוק של גרמים או משהו דומה. הזמן נמדד באופן בדיד, ובודאי שכך גם שערי חליפין בין מטבעות. מה אינסופי בחיים?

נכון, דבר איננו אינסופי באמת. אך לעתים קרובות קל יותר למדל דברים כאילו היו רציפים. למשל, עקומת ביקוש יורדת ועקומת היצע עולה לא חייבות להיפגש אם הן בדידות, בשעה ש"באמת" אנחנו מרגישים שהן נפגשות. כפי שראיתם בסטטיסטיקה, לעתים הרבה יותר פשוט לעבוד עם משתנים מקריים רציפים מאשר בדידים. והנחת משתנים רציפים מאפשרת לנו להשתמש בחשבון דיפרנציאלי, לגזור פונקציות וכו' – ובלי נגזרות, למה לנו חיים? קיצורו של

---

[8] כאן ניכרת גם השפעת חשיבתו של קארל פופר (Karl Popper), שנחשב למורד ב"פוזיטיביזם הלוגי", אם כי בראייה היסטורית הוא נראה כממשיך הזרם הרבה יותר מאשר הפילוסופים והסוציולוגים שבאו אחריו. פופר הדגיש את החשיבות של יכולת ההפרכה: תיאוריה מדעית, הוא טען, צריכה להיות כזו שנדע מראש מתי היא הופרכה ומתי צריך להחליפה.

דבר, הנוחות היא שמנחה אותנו לכיוון המשתנים הרציפים, ולכן יש לטפל גם במקרה של אינסוף אלטרנטיבות.

נניח שקבוצת האלטרנטיבות היא $A=\mathbf{R}^n_+$ -- הווקטורים האי-שליליים באורך n. על קבוצה זו, יחס סדר ≥ יקרא **רציף** אם מתקיים לגביו התנאי הבא:

אם $x_n \rightarrow x$ **אז** לכל y

אם $x_n \geq y$ לכל n, אזי גם $x \geq y$

וכן

אם $y \geq x_n$ לכל n, אזי גם $y \geq x$.

הווה אומר: יחס ההעדפה הוא רציף אם הוא משמר העדפה חלשה בגבול. שימו לב שהעדפה חזקה אינה חייבת להתקיים. אם, למשל, אני אוהב סוכר, יכול להיות שכל כמות חיובית של סוכר (x_n), ואפילו קטנטנה, ממש עדיפה בעיני על-פני 0 גרם סוכר (y). אך בגבול, כמות הסוכר מתכנסת לאפס ואין לי העדפה חזקה (x=y). אך העדפה חלשה (עדיף-על-פני-או-שקול-ל) אמורה להתקיים גם בגבול.

דרך אחרת להגדיר את הרציפות (שהיא שקולה, אך לא ניכנס לפרטים אלה) היא ש**אם** x ממש עדיף על פני y, אזי אם נתקרב מספיק ל- x בסופו של דבר כל האלטרנטיבות (ב"סביבה של" x) תהיינה עדיפות ממש על פני y ולהפך – קרוב מספיק ל- y כל האלטרנטיבות תהיינה ממש פחות טובות מ- x.

בעזרת תכונה זו ניתן לנסח משפט גם למקרה אינסופי.

משפט: אם קבוצת האלטרנטיבות היא $A=\mathbf{R}^n_+$ שתי הטענות הבאות שקולות:

א. היחס הוא יחס סדר חלש ורציף.

ב. היחס ≥ ניתן לייצוג ע"י פונקציה ממשית ורציפה.

משפט זה (שהוכח ע"י Gerard Debreu) מקביל מבחינה רעיונית למשפט הקודם, וכל הדיון הקודם תקף גם כאן. למעשה, הנחת הרציפות איננה בעלת תוכן אמפירי במובן המדויק: לא ניתן

לתאר תצפיות (שמספרן תמיד סופי) שיפריכו את הנחת הרציפות. ניתן לבצע "ניסוי מחשבתי" כדי לראות כמה ההנחה סבירה בעינינו, ולרוב ניתן לחיות איתה. אך צריך לזכור שהנחה זו אינה ניתנת לבדיקה אמפירית במובן הרגיל, והיא מעין תשלום שאנו משלמים עבור השימוש במודלים רציפים, שהם נוחים יותר מתמטית.

<u>על סבירות הטרנזיטיביות</u>

נתבונן בשתי דוגמאות:

1. רונה אוהבת קפה ללא סוכר. כשמיקי הכין לה ספל קפה, נפל בטעות גרגר אחד לספל. רונה מחתה וסרבה לשתות את הקפה. מיקי נפגע עמוקות והתערב איתה שכלל לא תרגיש בגרגר סוכר אחד. כמובן, בניסוי מבוקר היא באמת לא ידעה להבחין בין ספל קפה ללא סוכר לבין ספל קפה עם גרגר אחד. (ואם אתם לא משתכנעים, חלקו את הגרגר למיליון גרגרונים זעירים, וספרו את הסיפור עם גרגרון אחד.)

2. יורם מכוון את השעון המעורר ליום א' בבוקר. בתשע יש לו שיעור מיקרו 1, אחד מהתענוגות הגדולים של השבוע. עם זאת, יורם עייף, ובעודו מכוון את השעון לשעה 8:00, הוא תוהה אם לא כדאי לכוון ל- 8:01. הוא מכיר את עצמו היטב ויודע שלמחרת בבוקר עוד דקה מתחת לשמיכה החמה תיראה עונג גדול, והמיקרו – המיקרו לא יברח – מהי כבר דקה?

שתי הדוגמאות קשורות להפרה של טרנזיטיביות. נפתח בראשונה. אכן, רונה לא יכולה להבחין בין ספל עם 0 גרגרים וספל עם גרגר אחד, ובאותו אופן – גם לא בין ספל עם גרגר אחד וספל עם שני גרגרים וכו'. למעשה, לכל מספר טבעי n, ספל עם n גרגרים וספל עם $(n+1)$ גרגרים אינם ניתנים להבחנה, ולכן הם שקולים: רונה לא יכולה לטעון שיש לה העדפה חזקה בין אלטרנטיבות שכלל אינה יכולה להבחין ביניהן.

עתה: אילו היה יחס ההעדפה של רונה $\succeq$ טרנזיטיבי, הרי שהוכחנו שגם יחס השקילות $\sim$ היה צריך להיות טרנזיטיבי, ומהנ"ל היה נובע שרונה אדישה בין כל שני ספלי קפה, בלי קשר למספר הגרגרים בהם. זה, כמובן, לא המצב. מכאן, שיחס ההעדפה איננו באמת טרנזיטיבי.

שימו לב שאין מדובר כאן בשינוי דעתה של רונה או בחוסר רציונליות בולט (תהא הגדרת הרציונליות אשר תהא). כל אימת שאנו מעומתים עם כמויות שהן פחות או יותר רציפות – כמות

הסוכר בקפה או כמות האור בחדר, משכה כל חופשה בדקות או כמות הספגטי בצלחת, כמות היין בארוחה או כמות הכסף שעומדת לרשותנו כתקציב חודשי – אנו נתקלים באותה תופעה. ואכן, פסיכופיזיולוגים שמו לב לתופעה זו עוד במאה ה-19. בפרט, וובר (Ernst Heinrich Weber) מצא חוק שנחשב לקירוב טוב עד היום: לכל נתון פיזיקאלי רציף, יש "הפרש מינימלי הניתן להבחנה" (just noticeable difference, jnd) התלוי ברמת ההתחלה. "יכולת ההבחנה" מוגדרת באופן הסתברותי – לרוב, רמת הסף של 75% נחשבת לסטנדרט של "הבחנה". (אפשר לקבוע רמות שונות, כמובן.) לפי חוק וובר, הגודל המינימלי הניתן להבחנה הוא פרופורציונלי לרמה ההתחלית.

החוק המדויק אינו כל כך חשוב לענייננו. מה שחשוב הוא שלא ניתן לצפות מהעדפות אמיתיות להיות טרנזיטיביות. מה זה אומר, אם כך, על כל הסיפור של מקסום תועלת, מושג יעילות פארטו והגלובליזציה?

את התשובה אינני יודע, כמובן. אך אני חושב שרובכם תסכימו שזה לא ממש משנה. גם אם נודה שבפועל ההעדפות אינן בדיוק טרנזיטיביות, זו אינה סיבה לדחות או לקבל טיעון בעד או נגד הגלובליזציה והשוק החופשי בכלל. סביר שכל טיעון כלכלי שאפשר לנסח באופן מתמטי עם יחסי העדפה רגילים (טרנזיטיביים), אפשר גם לנסח בזהירות רבה יותר, עם יחסי העדפה יותר מציאותיים הלוקחים בחשבון את יכולת ההבחנה המוגבלת שלנו. שימו לב שאני מבצע כאן שיפוט סובייקטיבי ולא ממש מדעי: אני סוקר במוחי סוגי טיעונים ומחליט מה משכנע אותי ומה לא, ואני מזמין אתכם לבצע תרגיל דומה. ייתכן שתגיעו למסקנות שונות, וכך לא תשתכנעו על ידי מודלים שאני כן אשתכנע על-ידיהם. הנקודה החשובה היא שאיננו מצפים משום מודל שיהיה תיאור מדויק ב- 100% של המציאות. השאלה איננה האם המודל נכון, אלא האם הוא קירוב טוב, זאת אומרת, האם האופן שבן המודל שגוי הוא מהותי, האם המסקנות הנובעות מהמודל משכנעות אם לאו.

הבה נשווה את הדיון הנ"ל לדוגמה 2. יורם ממש מעדיף דקה נוספת במיטה. הוא מעדיף להתעורר ב- 8:01 מאשר ב- 8:00, ב- 8:02 מאשר ב- 8:01, וכן הלאה. אלא שהוא בכל זאת מעדיף להתעורר ב- 8:00 מאשר להתעורר ב- 12:00 ולגלות ששיעור המיקרו הסתיים. גם הוא, אפוא, סותר את הטרנזיטיביות. למעשה, הסתירה קשורה לתופעה הקודמת: יורם עומד בפני בעית החלטה עם שני קריטריונים – הקריטריון המיידי, הקשור לעונג של דקה נוספת במיטה, והקריטריון ארוך-הטווח, הקשור לסיכון שלא יגיע לשיעור בזמן, לא יבין מיקרו 1, ולבסוף יצטער

על כך כל ימיו. הקריטריון הראשון פחות חשוב, אך הוא מוחשי. השני נשמע חשוב יותר, אך ההשפעה של דקה נוספת במיטה על קריטריון זה אינה מוחשית – סביר שהיא מתחת לסף ההבחנה. כך או כך, יורם מוצא עצמו עם יחס העדפה חזקה מעגלי: לכל $n=0,\ldots,N-1$, הוא ממש מעדיף השכמה בדקה n על פני השכמה בדקה (n+1), אך הוא מעדיף השכמה בדקה 0 על פני השכמה בדקה N.

הבעיה של יורם מופיעה במגוון בעיות של שליטה עצמית. מי שניסה להפסיק לעשן או לרדת במשקל, ללמוד לבחינה או לחסוך כסף, נתקל בבעיה דומה: יש הרבה פיתויים קטנים ומיידיים, שכל אחד מהם משפיע על המטרה הגדולה באופן זניח, אך הצטברותם בעלת השפעה מספקת לחסל את הסיכוי להשיג את המטרה ארוכת-הטווח.

האם יש לסטייה זו מהטרנזיטיביות השלכות כלכליות? אני טוען שכן. כאשר אנו מגהצים כרטיסי אשראי, אנחנו נמצאים במצב דומה: יש לנו מטרה גדולה וארוכת-טווח, לא ללוות יותר מדי כסף (ולא לשלם רביות גבוהות למוסדות המלווים). ויש לנו מצד שני מגוון פיתויים קטנים שאף אחד מהם לא ממש משנה לענין המטרה הגדולה, אך ביחד השפעתם הרסנית. במצב זה, לא ברור שהמודל של הצרכן שממקסם פונקצית תועלת תקף. אך לא רק מכיון שאיננו נכון ב-100%. אלא שהמסקנה העקרונית אף היא משתנה: אם אתם מאמינים ביתרונות השוק החופשי בגלל שהוא מביא לתוצאות יעילות פארטו, אוכל לתקוף ולשאול מה משמעות יעילות פארטו כאשר שפרטים חסרי שליטה עצמית? איזו פונקצית תועלת הם ממקסמים? ואכן, ניתן לטעון במצבים כאלה כנגד השוק החופשי, ובעד הגבלת יכולתם של הפרטים "ללוות" כסף בלי ממש להתכוון לכך ואפילו בלי לשים לב לחובם המצטבר.

ראינו, אם כך, שני סוגי הפרות של הנחת הטרנזיטיביות. ההנחה שיחס האדישות הוא טרנזיטיבי אינה עומדת במבחן המציאות כמעט אף פעם: כל אימת שמדובר באלטרנטיבות שהן פחות או יותר רציפות, כולנו מפרים הנחה זו. ועם זאת, היא יכולה להיות קירוב סביר לצורך דיונים כלכליים. לעומתה, ההנחה שצרכנים הם בעלי שליטה עצמית מספקת לא ליצור מעגלי העדפה מופרת רק ע"י חלק מהצרכנים ורק בחלק ממצבי ההחלטה. ובכל זאת, להנחה זו יכולות להיות השלכות מטעות (מכיון שהמסקנה שאין צורך להגביל את שוק האשראי יכולה להשתנות כאשר הנחה זו אינה מתקיימת). המסקנה החשובה היא שהמידה שבה הנחה היא "טובה" או מוצלחת איננה פונקציה מונוטונית של הדיוק שלה בתיאור המציאות.

<u>יחידות פונקצית התועלת</u>

משפטי הייצוג לעיל – האומרים מתי ניתן להניח שמקבל ההחלטות ממקסם פונקצית תועלת כלשהי – מהווים גם הגדרת למושג "פונקצית תועלת". כאמור, ראייה זו מעלה את השאלה, האם מוגדרת פונקצית תועלת יחידה לכל פרט?

נו טוב, כמה יחידה היא כבר יכולה להיות? הרי גם כשאנו מודדים מסה או אורך אנחנו בוחרים לנו יחידת מידה – טונה או אונקייה, מטר או אינץ'. כך שפונקצית התועלת תמיד יכולה להיות מוכפלת במספר חיובי ובעצם למדוד אותו הדבר. במדויק יותר, אם u פונקציה המייצגת יחס העדפה ≥, הרי שגם פונקציה אחרת v, המוגדרת ע"י

$$v(x) = a * u(x)$$

(לכל x, עבור a>0) תייצג אותו יחס.

מעבר לכך: בשעה שלמסה ולאורך יש "אפס" טבעי (המסה או האורך של שום דבר), לא לכל גודל פיזיקלי יש כזה "אפס". למשל, לטמפרטורה אנחנו מודדים אפס שונה בצלזיוס ובפרנהייט. יש, אמנם, "אפס מוחלט" (של קלווין), אבל מי משתמש בו? בפועל אנחנו משתמשים ב"אפס" די שרירותי. וכנ"ל במדידת גבהים על-פני כדור הארץ (ביחס לגובה האוקיאנוסים ולא, למשל, למרכז כדור הארץ). כך שבמעבר מסקאלה אחת לשניה אנחנו גם "מזיזים" את האפס. דרך אחרת לומר אותו דבר היא: אם ניקח מספר a>0 ומספר כלשהו b, ונגדיר

$$v(x) = a * u(x) + b$$

(לכל x) הרי ששוב הפונקציה v תייצג אותו יחס כמו הפונקציה u. כאן, u ו- v הן **טרנספורמציות לינאריות עולות** זו של זו, ואנו נתייחס לשתי פונקציות כאלו כ"אותה פונקציה".

שימו לב שאם היינו מבחינים בין מניעת כאב לגרימת הנאה, יכול להיות שהיתה לנו מועמדת ל"אפס" על ציר ה"תועלת", מעין נקודה שהיא המעבר בין השניים. כמו-כן, אם היתה לנו נקודת-ייחוס, שמגדירה את ההבדל בין "רווח" ל"הפסד", כאשר הפרט מתנהג באופן שונה בתחום הרווח מאשר בתחום ההפסד (כפי שטוענים כהנמן וטברסקי) – אזי לא ניתן היה "להזיז" את הפונקציה בקבוע b בלי לשנות דבר בהשלכותיה. אך במודל שלנו אין שום השלכות להזזת ה"אפס".

אלא מאי, שלא תמו תלאותיה של הפונקציה u. מכיון שהמשמעות של "ייצוג" היא רק "אלטרנטיבה טובה יותר מקבלת ערך גבוה יותר", **כל טרנספורמציה מונוטונית עולה** של u תגדיר בדיוק אותו יחס, ולכן תהווה ייצוג של אותו יחס. כך, אם ידוע לנו שהילה מקבלת החלטות באופן שמקביל ל- (וניתן לחיזוי ע"י) מקסום הפונקציה u, הרי שניתן לחשוב על הילה גם כממקסמת את אחת מהפונקציות הבאות:

$$v(x) = [u(x)]^3$$

$$w(x) = [u(x)]^{1/3}$$

ואם u מקבלת רק ערכים חיוביים -- גם הפונקציות

$$f(x) = [u(x)]^2$$

$$g(x) = \log[u(x)]$$

הווה אומר: פונקצית התועלת הנמדדת מהעדפות המחליטה איננה יחידה כלל וכלל. כל טרנספורמציה מונוטונית עולה יכולה לשמש לתיאור ההחלטות באותה מידה. במצב זה אנו אומרים שהפונקציה היא **אורדינלית**: היא מתארת רק סדר. כשאנו אומרים שפונקציה היא אורדינלית איננו דנים בתכונה מתמטית של הפונקציה עצמה, אלא בקשר שבינה לבין התצפיות אותן היא מתארת: הכוונה היא שאין להתייחס ברצינות רבה מדי **לערכי** הפונקציה, אלא שיש לייחס משמעות רק **לסדר** ביניהם (מי גדול ממי). לעומת זאת, כשאנו אומרים שפונקציה היא **קרדינלית**, אנו מתכוונים לומר שיש משמעות גם לערכי הפונקציה, או להשוואה בין הפרשים בין ערכים אלה. כאשר פונקציה היא קרדינלית, הרי שהיא יחידה "עד כדי" טרנספורמציה לינארית עולה. לעומת זאת, כאשר פונקציה היא אורדינלית, היא יחידה רק "עד כדי" טרנספורמציה עולה כלשהי.

כשפונקצית התועלת היא אורדינלית, לא נוכל לומר יותר מדי על תכונותיה כגון התנהגות התועלת השולית. לדוגמה: נניח כי x היא כמות כסף, והפונקציות לעיל מודדות את התועלת מהכסף. אם

$$u(x) = [x]^2$$

ניתן לחשוב שהתועלת השולית מהכסף, הנמדדת ע"י הנגזרת,

$$u'(x) = 2x$$

עולה בכמות הכסף, x. אך אם נתבונן בפונקציה שקולה לחלוטין,

$$v(x) = [u(x)]^{1/4} = x^{1/2}$$

נוכל להגיע למסקנה ההפוכה, שהתועלת השולית, הלוא היא הנגזרת של פונקציה זו,

$$v'(x) = (1/2) * x^{-1/2}$$

דווקא יורדת בכמות הכסף הנתונה (x).

מה אנו למדים מכך? שגם אם נדמה לנו שאפשר להתווכח על השאלה, האם התועלת השולית מכסף עולה או יורדת עם כמות הכסף, וגם אם אכן דנו בנושא ברצינות במאות עברו, הרי שאין לשאלה זו תוכן מדעי. אין שום ממצא אמפירי שיכול לשכנע אותנו בדעה א' לעומת דעה ב', ולכן אין טעם להכביר מלים על הנושא. אפשר, כמובן, להתווכח עליו במסיבת רעים, תוך פיצוח גרעינים ודיון בנושאים אחרים שברומו של עולם. אך משמעות מדעית ותוכן אמפירי אין לשאלה זו.

ובכל זאת, זה נשמע מוזר. נראה כאילו יש איזושהי משמעות להשוואות הפרשי תועלות. למשל, אם יש לי 0 שקלים ואתם מציעים לי מיליון, יש תחושה שהמיליון הזה ישפר את חיי יותר מאשר המיליון השני, אם תהיו נדיבים מספיק להציע עוד אחד. ואם תמשיכו בנדיבותכם זו, אין ספק שהשיפור שחל בתועלת שלי כשאני עולה מ- 100,000,000 ₪ ל- 101,000,000 ₪ אינו גדול כמו מהמיליון הראשון. התיאוריה שלנו איננה טוענת, חו"ח, שהשיפור מהמיליון הראשון קטן מאשר מהמיליון השני או מהאלפי. התיאוריה פשוט אומרת שאין משמעות לתחושות המעורפלות שלנו. כל מה שיש לנו, בבחינת נתונים, הוא בחירה בין כמויות כסף, וכל פונקציה עולה בכסף, על-פיה אני מעדיף יותר על פני פחות, טובה באותה מידה לתיאור העדפותי. מכיון שאין מצב בחירה שמקביל להפרשים בין סכומי הכסף, אין משמעות להשוואת הפרשי התועלות המקבילים.

מסקנה מאירת עיניים זו היתה יכולה להיות תוצאת לוואי מרשימה של תרגיל ה"אקסיומטיזציה" שבצענו: שאלנו את עצמנו אילו אקסיומות שקולות למיקסום תועלת, והגענו למסקנה שההתנהגות הניתנת לצפייה אינה מגדירה את התועלת באופן יחיד. לצערי, איני מאמין

במסקנה זו. למעשה, היא תוצר לוואי של ההנחה הלא-מציאותית שלנו, שההעדפות הן טרנזיטיביות. והפרטים להלן.

כבר ציינו שעוד מהמאה ה-19 היה ידוע כי יש לאנשים יכולת הבחנה מוגבלת, ויש jnd – just noticeable difference. אם ננסה לקחת בחשבון עובדה פסיכולוגית זו (כפי שעשה הפסיכולוג המתמטי Duncan Luce), אפשר יהיה לחשוב על ייצוג ע"י פונקצית תועלת הלוקח בחשבון שרק החל מסף מסוים ניתן לזהות העדפה. באופן יותר מדויק, נניח שיש פונקציה u, אך גם קבוע $\delta>0$ כך שלכל שתי אלטרנטיבות x,y, x יהיה עדיף (ממש) על פני y אם ורק אם

$$u(x) - u(y) > \delta$$

ואילו כאשר ההפרש קטן מדי, זאת אומרת, כאשר

$$| u(x) - u(y) | \leq \delta$$

יש "אדישות" בין x ל-y. (כאשר גודלו של $\delta>0$ תלוי ברמת הדיוק שבה אנו מודדים, היינו, בהסתברות שהמחליטה תעדיף את x על פני y.) שימו לב ש"אדישות" זו אינה טרנזיטיבית בדרך-כלל, ורוב הזוגות הנחשבים ל"שקולים" אינם באמת שקולים בעיני המחליטה, אלא פשוט קרובים מדי, במונחי תועלת, כדי להיות ניתנים להבחנה.

טוב, זה מודל מסובך, וכמו שציינו לעיל, לא ברור מה אנחנו מרוויחים מהסיבוך שלו לעומת המודל הרגיל, לפחות כל עוד בגלובליזציה עסקינן. אך אם נפנה לשאלת היחידות, נגלה לפתע שפונקצית התועלת הרבה יותר יחידה מאשר חשבנו קודם. לא כל טרנספורמציה מונוטונית עולה תבטא אותו יחס: עתה יש לנו הפרשי תועלות הקטנים מ- δ ויש הפרשים הגדולים הימנו, ועל השוואות אלה יש לשמור, כי יש להן תוכן אמפירי: הן מבחינות בין הפרשים מספיק גדולים כדי לייצר העדפה חזקה לבין ההפרשים הקטנים מדי מכדי ליצור העדפה. יתרה מזו: המושג של ההבדל המינימלי, ה- jnd יכול לתת לנו דרך אינטואיטיבית למדוד הפרשי תועלות: הסיבה שאנו מרגישים שהמיליון הראשון "שווה" יותר מהשני, והנ"ל – יותר מהמיליון ה-1,001 קשורה לעובדה שהמיליון הראשון מאפשר לנו יותר "קפיצות" תועלת שניתן לחוש בהן, ואילו המיליונים הבאים משפיעים עלינו פחות.

הנקודה המרכזית כאן היא שבהעדפות אמיתיות יש יותר מידע מאשר שהעדפות האידיאליות שאנו אוהבים להניח במודלים שלנו. זה בהחלט תקין ונורמלי להניח העדפות טרנזיטיביות

בשביל ניתוח מודל כלכלי, תוך התעלמות מהפסיכופיזיולוגיה. אך זה פחות סביר לטעון שאין קרדינליות בתועלת, ושיש לנו רק פונקציה אורדינלית, כאשר אנו יודעים שתופעה זו היא תולדה של הנחה לא מציאותית שהנחנו רק כדי לפשט את חיינו.

__פתרון תרגיל: הוכחת טענות__

טענה 1: לכל יחס $\geq$

א. $\sim$ סימטרי;

ב. $>$ איננו סימטרי, אלא אם כן הוא ריק (למעשה, אין x,y שעבורם $x>y$ וגם $y>x$)

ג. $>$ איננו רפלקסיבי (למעשה, אין x שעבורו $x>x$).

הוכחה:

א. יש להוכיח (לכל x,y) שאם $x\sim y$ אז גם $y\sim x$. נניח שאכן $x\sim y$. לפי ההגדרה, משמעות הדבר היא ש- $x\geq y$ וגם $y\geq x$. אך זו גם בדיוק המשמעות של $y\sim x$.

ב. אם קיימים x,y כך ש- $x>y$ (ז.א. שהיחס $>$ איננו ריק), אזי עבור אותם x,y, $x\geq y$ אך לא $y\geq x$. זו סתירה לסימטריה.

ג. עבור כל x, $x>x$ משמעותו "$x\geq x$ אך לא $x\geq x$" ומובן שטענה זו אינה יכולה להתקיים לשום x. כך ש- $>$ יכול להיות רפלקסיבי רק אם הקבוצה שלנו, A, ריקה.

טענה 2: נניח כי $\geq$ יחס סדר חלש (שלם וטרנזיטיבי), אזי:

ד. $\sim$ רפלקסיבי;

ה. $\sim$ טרנזיטיבי;

ו. $>$ טרנזיטיבי.

הוכחה:

ד. כדי להראות ש- ~ רפלקסיבי, צריך להראות שלכל x, $x\sim x$. ניקח x מסוים. לפי השלמות, בין כל שני איברים, z ו-w, מתקיים $z\geq w$ או $w\geq z$. נציב $z=x$ וגם $w=x$ ונקבל ש- $x\geq x$.

ה. כדי להראות טרנזיטיביות, אנו צריכים להראות שלכל x,y,z, אם $x\sim y$ וגם $y\sim z$, אזי בהכרח $x\sim z$. נניח אפוא שנתונה שלשה x,y,z שעבורה מתקיים $x\sim y$ וגם $y\sim z$. ניזכר בהגדרת היחס ~ ונשים לב שנתון לנו בעצם ש-

a. $x\sim y$ ז.א. (1) $x\geq y$ וגם (2) $y\geq x$

b. $y\sim z$ ז.א.(3) $y\geq z$ וגם (4) $z\geq y$

(1) ו- (3), בהינתן הטרנזיטיביות של $\geq$, גוררים ש- $x\geq z$

(2) ו- (4), באותו אופן, גוררים $z\geq x$

ויחד זו בדיוק ההגדרה של $x\sim z$.

ו. כדי להראות ש- > טרנזיטיבי, אנו צריכים להראות שלכל x,y,z, אם $x>y$ וגם $y>z$, אזי בהכרח $x>z$. נניח אפוא שנתונה שלשה x,y,z שעבורה מתקיים $x>y$ וגם $y>z$. ניזכר בהגדרת היחס > ונשים לב שנתון לנו בעצם ש-

a. $x>y$ ז.א. ש (1) $x\geq y$ וגם (2) אין זה נכון ש- $y\geq x$

b. $y>z$ ז.א. ש- (3) $y\geq z$ וגם (4) אין זה נכון ש- $z\geq y$

ראשית נשים לב שמתוך (1) ו- (3), בגלל הטרנזיטיביות של $\geq$, נובע כי $x\geq z$. עלינו להראות גם שההיפך איננו נכון, זאת אומרת שלא ייתכן ש $z\geq x$. נניח על דרך השלילה שאכן זה היה המצב. אם $z\geq x$, יחד עם (1) והטרנזיטיביות של $\geq$, היינו מקבלים ש- $z\geq y$, בסתירה ל- (4). (או, יחד עם (3) מקבלים סתירה ל- (2).) לכן ההנחה אינה נכונה וקיבלנו שאין זה נכון ש- $z\geq x$.

טענה 3: נניח כי ≥ יחס סדר חלש (שלם וטרנזיטיבי), אזי:

u מייצגת את ≥ **אם ורק אם** נכונה הטענה הבאה:

[א] לכל זוג אלטרנטיבות x,y (ב-A),

x>y אם ורק אם u(x) > u(y) **]**

הוכחה:

נתחיל בהוכחה של ה"אם": נניח שמתקיים התנאי שבסוגריים המרובעים ונוכיח ש- u מייצגת את ≥. לצורך העניין, נחזור על ההגדרה של "u מייצגת את ≥" אך בשמות משתנים חדשים כדי למנוע בלבול:

[ב] [לכל זוג אלטרנטיבות z,w (ב-A),

z≥w אם ורק אם u(z) ≥ u(w) **]**

יהיו נתונים z,w. נניח ראשית ש- z≥w. צריך להוכיח ש- u(z) ≥ u(w) . נניח שלא. במצב זה, u(w)>u(z). לפי **[א]**, w>z, בסתירה להנחה ש- z≥w.

הכיוון השני: נניח כי u(z)≥u(w) ונוכיח כי z≥w. אם לא, אנו יודעים כי w>z (אנחנו משתמשים כאן בשלמות!). ואז, שוב על-פי **[א]** (הפעם בכיוון השני), u(w)>u(z), בסתירה לנתון.

בזאת הסתיימה ההוכחה ש- **[א]** גורר את **[ב]**. עתה יש להוכיח את ההפך. ההוכחה סימטרית לחלוטין: נניח את **[ב]**. ננסה להוכיח את **[א]**. יהיו נתונים x,y. ראשית נניח ש- x>y. אנו צריכים להוכיח ש- u(x)>u(y). אם לא, u(y)≥u(x), ואז, על-פי **[ב]**, y≥x, בסתירה לנתון (x>y). **ולהיפך:** אם נתון כי u(x)>u(y), אנחנו צריכים להראות ש x>y. נניח שלא. אם כך (שוב, בעזרת השלמות!), y≥x, אבל אז, בעזרת **[ב]**, u(y)≥u(x), וזו סתירה (כי היה נתון ש- u(x)>u(y)).

טענה 4: נניח כי ≥ יחס סדר חלש (שלם וטרנזיטיבי), אזי:

אם u מייצגת את ≥ **אזי** נכונה הטענה הבאה:

[לכל זוג אלטרנטיביות x,y (ב-A),

$x \sim y$ אם ורק אם $u(x) = u(y)$ **]**

הוכחה:

ההוכחה דומה למחצית מההוכחה של טענה 3. נניח כי u מייצגת את היחס ≥. יהיו נתונים x,y. נניח ראשית כי $x \sim y$. זאת אומרת ש- $x \geq y$ וגם $y \geq x$. היחס הראשון גורר ש- $u(x) \geq u(y)$ ואילו השני – ש- $u(y) \geq u(x)$, וביחד הוכחנו ש- $u(x)=u(y)$.

לצורך הכיוון השני, נניח כי $u(x)=u(y)$. אילו לא היה מתקיים $x \sim y$, הרי שהיינו מקבלים $x>y$ או $y>x$ (שוב – בזכות השלמות). במקרה הראשון היינו יודעים ש- $u(x)>u(y)$ ובשני – ש- $u(y)>u(x)$ – בשני המקרים המסקנה נובעת מכך ש- u מייצגת את ≥. מכיוון ששני המקרים אינם אפשריים, הוכחנו את הטענה.

תרגילים: בשלב זה אתם אמורים להיות מסוגלים לפתור:

בעיות 3,4,5 בבחינה לדוגמה מס' 1

בעיות 3,4,5 בבחינה לדוגמה מס' 2

בעיות 4,5,6,7 בבחינה לדוגמה מס' 3

סיכום שיעורים 5-6 ובהם נדבר על הרצוי והמצוי, וכן יסופר קמירות מהי ומדוע היא כל כך מרכזית בחיינו

<u>הרצוי והמצוי</u>

נושא שכבר עלה, אך עדיין לא קיבל תשומת לב רשמית, הוא ההפרדה המושגית בין הרצוי למצוי. הפרדה זו היא מאבני היסוד של מה שרוב הכלכלנים יחשבו עליו כ"חשיבה רציונלית": בשעה שהמחליטה שואלת את עצמה מה אפשרי מבחינתה (המצוי), היא אמורה לבחון אפשרויות ללא כל קשר להעדפותיה, ולהפך: כשהיא בוחנת את העדפותיה (הרצוי), היא אמורה להתעלם משאלת האפשריות. רק לאחר שהובהרו לנו שני אלה – הרצוי והמצוי – בנפרד, אנו משווים ביניהם ובודקים, מבין האפשרויות המצויות, מי הכי רצויה (או בין הכי רצויות, במצב שבו האופטימום אינו יחיד).

כמו הגדרות ותיאוריות רבות אחרות, כדאי לנסות להבין את האבחנה הנ"ל על דרך השלילה – נבחן מספר דוגמאות שבהן אינה מתקיימת, וכך נקבל מושג טוב יותר על מה היא פוסלת. להלן מספר דוגמאות:

1. במשל ידוע של איזופוס, שועל עובר ליד כרם ומתפתה לאכול מהענבים. לאחר שמסתבר לו שהגדר גבוהה מדי, הוא הולך לדרכו ואומר, "ממילא הענבים חמוצים". (זהו מקור הביטוי sour grapes – שמציין מצב שבו אדם "מחליט" שאינו רוצה משהו, או מעמיד פנים שאינו רוצה אותו, רק מפני שהוא יודע שלא יוכל להשיגו.) חשוב לציין שהעמדת פנים כלפי הסביבה איננה הפרה של קריטריון הרציונליות הנדון. אם ברור לי שלא אבחר לראשות הממשלה, ואני מעמיד פנים שתמיד רציתי להיות פרופסור באוניברסיטה, התנהגותי רציונלית לחלוטין כל עוד אני מעמיד פנים בפני חברי, או בפני תלמידי היקרים. צורת חשיבה זו נחשבת ללא-רציונלית כאשר אני מעמיד פנים גם (או בעיקר) בפני עצמי, כשאני משכנע את עצמי שהעדפותי שונות ממה שהן באמת.

2. גראוצ'ו מרקס, קומיקאי אמריקאי ידוע (אחד מ"האחים מרקס") מפורסם במשפט "אינני מוכן להתקבל למועדון המוכן לקבל אותי כחבר". במקרה זה הוא מעונין בחברות במועדון רק אם איננה אפשרית. הוא דומה לשועל האיזופי מבחינה זו שאפשריות חלופה מסוימת משפיעה על רציותה בעיניו. במובן מסוים מצבו חמור מזה של השועל: השועל מנסה להגיע להתאמה בין רצונותיו והישגיו. אם אינו יכול להשיג את מה שהוא

רוצה, הוא מנסה לרצות את מה שהוא יכול להשיג. (לפני שנולדתם היה שיר "If you can't be with the one you love, love the one you're with" – מוכר?) זה אולי לא רציונלי, אבל זה יכול להיות די בריא מבחינה נפשית. גראוצ'ו מרקס, לעומת זאת, מוודא שלא תהיה התאמה בין הרצונות להישגים: אם משהו יסתבר כאפשרי, הוא יודח ממשפחת הרצויים. זה נראה מרשם בטוח לתסכול ואומללות. אך מבחינה עקרונית שניהם נגועים באותו חטא לוגי: הם מבלבלים את שאלת ה"יכול" אם שאלת ה"רוצה".
<u>הערה</u>: "רציונליות" לפי הגדרותינו אינה בהכרח מבטיחה אושר. וגם בחיי יומיום אנו יודעים שלעתים האמת אינה נעימה, ו- "כִּי בְּרֹ֥ב חָכְמָה רָב כָּעַס וְיוֹסִיף דַּעַת יוֹסִיף מַכְאוֹב" (קהלת א' י"ח). ניתן להצדיק את העדפת האמת (והדעת) על פני שביעות הרצון ע"י הישגים בטווח הארוך, ולהסביר מדוע "כדאי" יותר להכיר באמת למרות חוסר הנעימות שהיא יכולה לגרום, אך זה ימתין להזדמנות אחרת.

3. מתמטיקאי ידוע אמר על קבוצה מסוימת שה"הגיון" שלה עובד כך: "אם p גורר q, ו- q רצוי, אז p נכון". זוהי כמובן פארודיה על כללי היסק לוגיים (מטיפוס, "אם p גורר q, ו- p נכון, אז q נכון"), ואפשר היה לומר פשוט "אם משהו רצוי, הרי שהוא נכון" – התופעה הידועה כ- wishful thinking. גם כאן מופרת אי-התלות שבין הרצוי למצוי, אלא שהפעם קביעת המציות (מה אפשרי) תלויה ברציות (מה מועדף).

גם המשל העתיק וגם שתי הבדיחות המאוחרות יותר פונים לקהל שומעים ומציגים את חוסר ההגיון שב"ערבוב" שבין הרצוי למצוי. וכך גם אנו, בבואנו לדון בבעית החלטה כלשהי, נפתח בהפרדה לוגית בין השניים. (כשנדון באי-ודאות, נצטרך להוסיף את האבחנה בין מה ש"אפשרי" מבחינת בחירתו של המחליט ומה ש"אפשרי" במובן שהוא יכול להתרחש אך אינו בשליטת המחליט. אך גם נקודה זו תמתין לשעת כושר טובה יותר.)

עד כה התעסקנו רבות בהעדפות, ובשאלה מה רוצה המחליטה, ובפרט, מתי ניתן לייצג את העדפותיה ע"י מקסימיזציה של פונקצית תועלת הגיע הזמן לפנות גם אל הקבוצה האפשרית.

הקבוצה האפשרית היא קבוצת התקציב בתורת הצרכן, קבוצת האפשרויות הטכנולוגיות בתורת היצרן, ואולי קבוצות אחרות במקרים אחרים. מציאתה וניתוחה פשוטים יותר מאשר הדיון ב"רצוי" שהיה לנו עד כה, וזאת משתי סיבות. ראשית, יש קבוצה אפשרית אחת, בשעה שלהעדפות יש רמות שונות, למשל, רמות שונות של תועלת אם יש לפרט פונקצית תועלת אותה

הוא ממקסם. אולי נראה לכם שגם "אפשרי" הוא מושג בעל דרגות שונות, אך אני חושד שלרוב הכוונה היא שיש רמות שונות של עלות – המאמץ הכרוך בביצוע החלטה מסוימת – או של הסתברות – ההסתברות שהנסיון לבצע החלטה מסוימת יעלה יפה. אם ניקח בחשבון באופן מפורש את עלות ההחלטה, וכן את ההסתברויות שתוביל לתוצאות שונות, נמצא ששאלת האפשריות היא בינארית: או שאנו יכולים לנסות לעשות משהו (ולהתמודד עם עלויות ההחלטה) או לא.

שנית, הקבוצה האפשרית אמורה להיות מוגדרת באופן פחות או יותר אובייקטיבי, ולכן היא איננה פתוחה לדיונים פסיכולוגיים עמוקים כמו שאלת ההעדפות. כמובן, לפסיכולוגיה תמיד יש מקום, וכמו שראינו לעיל, תופעה פסיכולוגית כגון wishful thinking יכולה לשנות את קבוצת התקציב כפי שהיא נתפסת ע"י המחליט. אך אם נתעלם מהיבטים אלה, השאלה "מה אפשרי" היא שאלה פחות או יותר עובדתית – בניגוד לשאלת "מה אני רוצה?" שמעלה שאלות על שלמות וטרנזיטיביות של ההעדפות, שלא לדבר על משמעות החיים.

קיצורו של דבר: בהשוואה לדיונים העמוקים ומאירי-העיניים בשאלה מהו הרצוי, על המצוי נאמר בפשטות: חלק מהחלופות אפשריות, והאחרות – לאו. ה"מצוי" יהיה במודלים שלנו פשוט קבוצת אפשריות מסוימת, תת-קבוצה של כל ההחלטות שניתן להעלות על הדעת. ובתורת הצרכן, אם יש לנו *n* מוצרים, קבוצת האפשריות שניתן להעלות על הדעת היא – ה"רביע" האי-שלילי במרחב האוקלידי ה- *n* מימדי. או, במלים פשוטות, הווקטורים באורך *n* שבהם כל רכיב הוא מספר ממשי אי-שלילי. ולכן בתורת הצרכן "קבוצת התקציב" תהיה פשוט תת-קבוצה של אותו "רביע".[9]

קמירות

עתה נפנה להבין תכונה גיאומטרית בסיסית ביותר, הנקראת "קמירות". ייתכן שנתקלתם בהגדרה של פונקציות קמורות וקעורות, והמושגים קשורים, אך כעת אנו דנים בקמירות של קבוצות. לגבי קבוצות אין מושג משמעותי של "קעירות"– לא תשמעו את המינוח "קבוצה קעורה".

ובכן, מהי קמירות?

---

[9] המילה "רביע" כמובן מזכירה את המילה "רבע", ואכן כאשר יש לנו 2 מוצרים, הצירים מחלקים את המרחב ל-4 חלקים, שבכל אחד מהם סימני המשתנים קבועים. אם יש לנו *n* מוצרים, יש 2^n "רביעים".

הגדרה: קבוצה A ב- $\mathbf{R}^n_+$ היא **קמורה** אם לכל שתי נקודות בתוכה, x,y, הקטע המחבר את x עם y נמצא כולו בתוך A.

אינטואיטיבית, אם נחשוב על הקבוצה A כעל חדר, הקבוצה קמורה אם (ורק אם) כל שני אנשים הנמצאים בחדר יכולים לראות זה את זה.

להלן דוגמאות לקבוצות קמורות (במרחב הדו-ממדי):

ולהלן קבוצות שאינן קמורות:

על משמעותה של הקמירות נעמוד בקרוב. לפני כן יהיה אולי מועיל לנסח את הקמירות גם באופן אלגברי. בעצם כל מה שחסר לנו הוא ניסוח אלגברי לקטע המחבר שתי נקודות, x ו- y.

ובכן: אם x ו- y הם שתי נקודות, או שני וקטורים, ניתן לרשום אותם כ-

$x = (x_1 , x_2, \dots , x_n)$

$y = (y_1 , y_2, \dots , y_n)$

אם ניקח מספר בקטע [0,1], a , ונסתכל בווקטור שהוא ממוצע משוקלל בין שני הווקטורים x ו- y, נקבל נקודה על הקטע שביניהם. למה הכוונה? הווקטור ה"ממוצע", המסומן ax+(1-a)y, הוא פשוט הווקטור המורכב מממוצע משוקלל בכל רכיב ורכיב:

$$ax+(1-a)y = (ax_1+(1-a)y_1 , ax_2+(1-a)y_2 , \ldots , ax_n+(1-a)y_n)$$

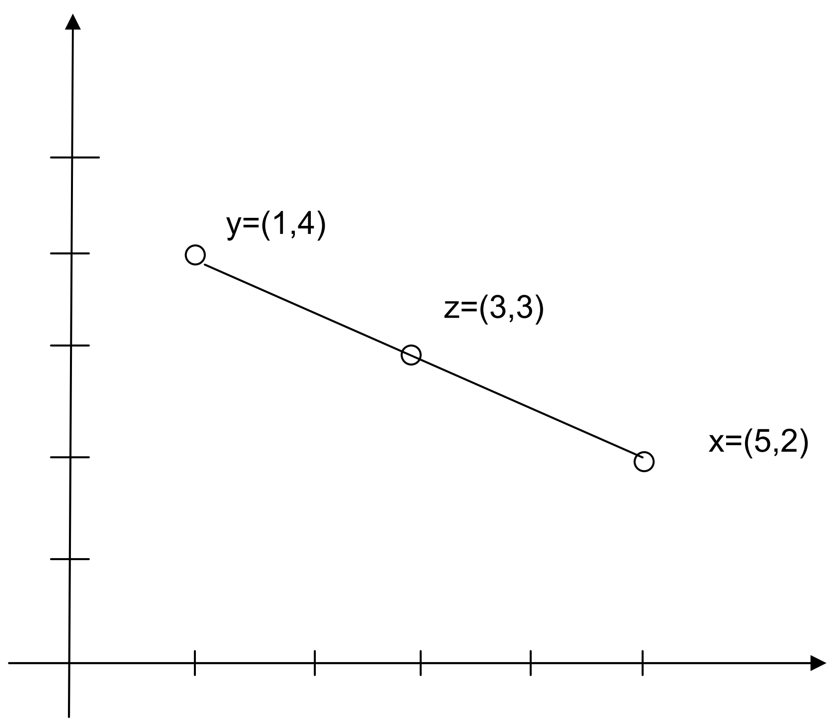
וגם ההפך נכון: אם ניקח את הווקטורים הללו לכל ערך אפשרי $0 \le a \le 1$, נקבל את כל הקטע המחבר את x ו- y.

לדוגמה: נניח שוב ש- n=2, ונסתכל על הנקודות

$x = (5 , 2)$ $\qquad$ $y = (1 , 4)$

נבחר ראשית a=0.5, ונחפש את הנקודה

$$z = 0.5 x + 0.5 y = (0.5*5 + 0.5*1 , 0.5*2 + 0.5*4) = (3 , 3)$$



בגלל דמיון משולשים שאולי מזכיר לכם נשכחות מהתיכון, הנקודה z, שרכיבה הראשון הוא בדיוק הממוצע בין רכיביהם הראשונים של x ושל y, וגם רכיבה השני הוא בדיוק הממוצע בין רכיביהם השניים של x ושל y, נמצאת בדיוק באמצע הקטע המחבר את x ואת y. ואם נבחר "משקל" a שונה מ- 0.5, נקבל נקודות שונות מ- z, אך תמיד על הקטע. עבור a=1 נקבל כמובן את x עצמה, ועבור a=0 – את y.

קבוצה היא **קמורה במובן החזק**, אם שפתה לא מכילה קטעים ישרים. באופן קצת יותר מדויק, קבוצה היא קמורה במובן החזק אם, לכל שתי נקודות בתוכה, הקטע המחבר אותן – למעט (אולי) שתי הנקודות עצמן – מוכל בפנים הקבוצה, ז.א. שסביב כל נקודה בקטע (למעט נקודות הקיצון) ניתן לצייר עיגול קטן שכולו יהיה מוכל בקבוצה.

קמירות של קבוצות, קמירות וקעירות של פונקציות

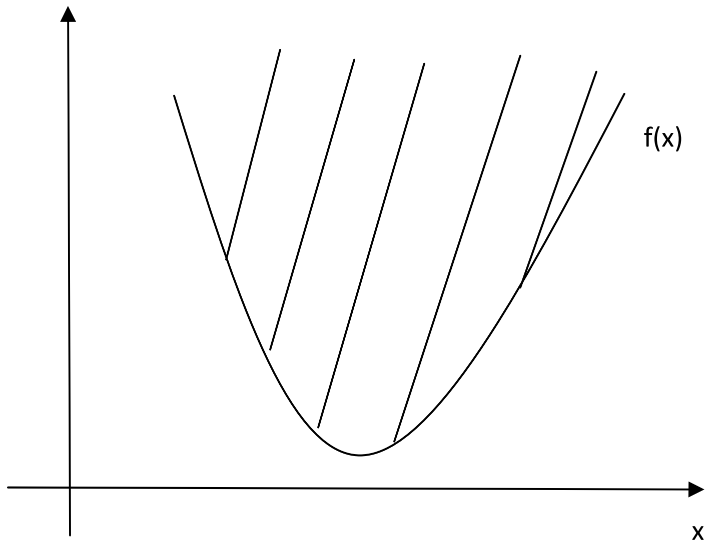
סביר להניח שבעברכם כבר שמעתם את המושג "פונקציה קמורה" או "פונקציה קעורה", ואתם תוהים במידה רבה של צדק ובסקרנות בריאה, מה הקשר בין קמירות קבוצות וקמירות פונקציות, וכו'. ובכן, להלן מספר נקודות מרכזיות שנפרטן מיד:

- לגבי פונקציות אנו מגדירים גם קמירות וגם קעירות, אך לגבי קבוצות המושג המשמעותי היחיד הוא קמירות (אין הגדרה של "קבוצה קעורה");
- קמירות וקעירות של פונקציות ניתנת להגדרה גם ע"י קמירות של קבוצה מסוימת;
- לפונקציות יש גם מושגים של קוואזי-קמירות וקוואזי-קעירות, אשר אף הם מוגדרים ע"י קמירות של קבוצה מסוימת (אך לא זאת של קמירות או קעירות הפונקציה);
- מטבע הדברים, פונקציה קמורה היא גם קוואזי-קעורה, אך ההפך איננו נכון. באופן דומה, כל פונקציה קעורה היא גם קוואזי-קעורה, אך ההיפך אינו נכון.

ועתה לפירוט. הגדרנו קבוצה קמורה. (וקבוצה קעורה איננו מגדירים פשוט מכיון שעוד לא עלתה על דעתו של איש הגדרה נחמדה ומשמעותית.) כעת נגדיר פונקציה קמורה וקעורה.

נניח ש- f פונקציה המוגדרת על וקטורים $x=(x_1,\ldots,x_n)$, כאשר x_i הוא מספר ממשי, וכך גם ערך הפונקציה f(x). הפונקציה נקראת **קמורה** אם הקבוצה הנמצאת **מעל** הגרף שלה היא קבוצה קמורה. היא נקראת **קעורה** אם הקבוצה הנמצאת **מתחת** לגרף שלה היא קבוצה קמורה.

למשל, הפונקציה f המתוארת להלן היא קמורה



מכיון שהקבוצה, המורכבת מגרף הפונקציה וכל הנקודות שמעליו, היא קבוצה קמורה. שימו לב שאם לפונקציה f יש n משתנים, אנחנו מתבוננים במרחב עם (n+1) מימדים: n מימדים עבור המשתנים ומימד נוסף עבור ערך הפונקציה. וכך, לפונקציה f אנחנו מתבוננים בקבוצה

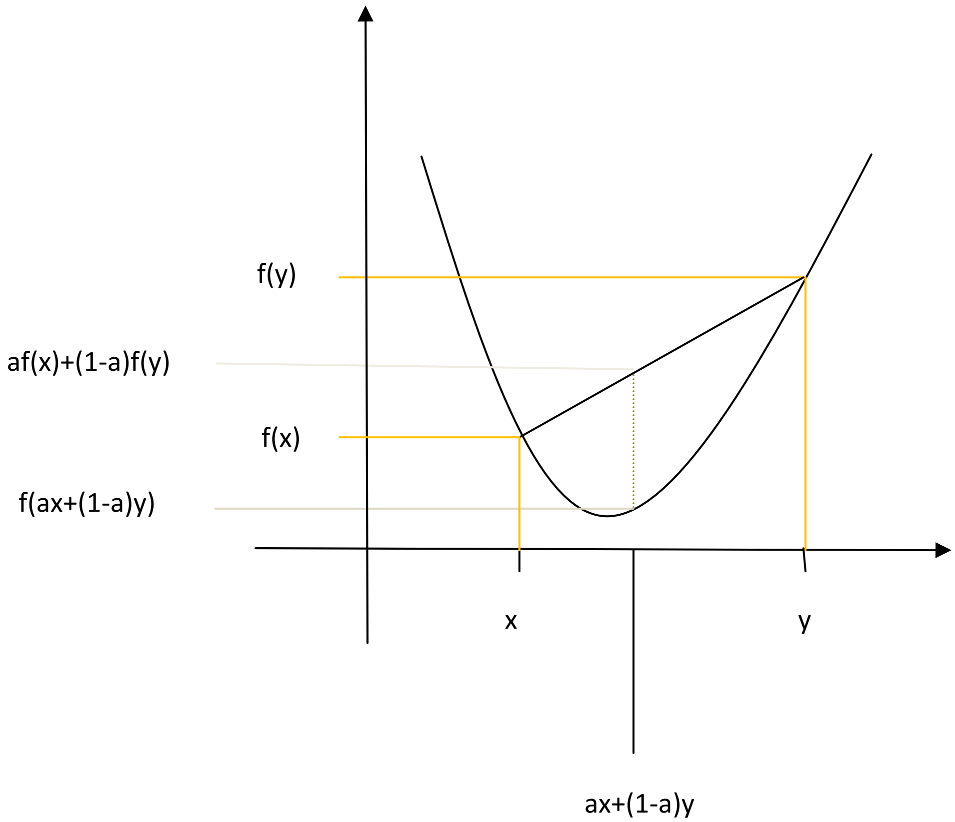
$$UP(f) = \{ (x_1,\dots,x_n,z) \mid z \geq f(x_1,\dots,x_n) \}$$

(וניתן להגדיר "קמירות חזקה" של הפונקציה אם הקבוצה קמורה במובן החזק).

אם קבוצה זו היא קמורה, הגרף של הפונקציה לעולם לא יעלה מעל מיתרי הפונקציה. הווה אומר: נבחר שתי נקודות במישור ה- x-ים, נניח x,y. נתבונן בנקודות המתאימות להן על גרף הפונקציה, (x,f(x)), (y,f(y)). עתה נחבר את הנקודות x ו- y בקו ישר ונבחר נקודה ביניהן,

$$a\,x + (1-a)\,y = (\,ax_1+(1-a)y_1\,,\,ax_2+(1-a)y_2\,,\,\dots\,,\,ax_n+(1-a)y_n\,)$$

ונתבונן בערך הפונקציה בנקודה זו, בהשוואה לגובה המיתר, המחבר את (x,f(x)), (y,f(y)) מעל אותה נקודה:



ובאופן אלגברי: הפונקציה f קמורה אם ורק אם לכל שתי נקודות בתחום, x,y, ולכל a בקטע [0,1], מתקיים

$$f\,(ax+(1-a)y) \le af(x) + (1-a)f(y)$$

הווה אומר, ערך הפונקציה אינו מעל לגובה המיתר בנקודה המתאימה. קמירות במובן החזק תתקיים אם אי השוויון הנ"ל יתקיים כאי-שוויון חזק כל אימת ש- $0<a<1$.

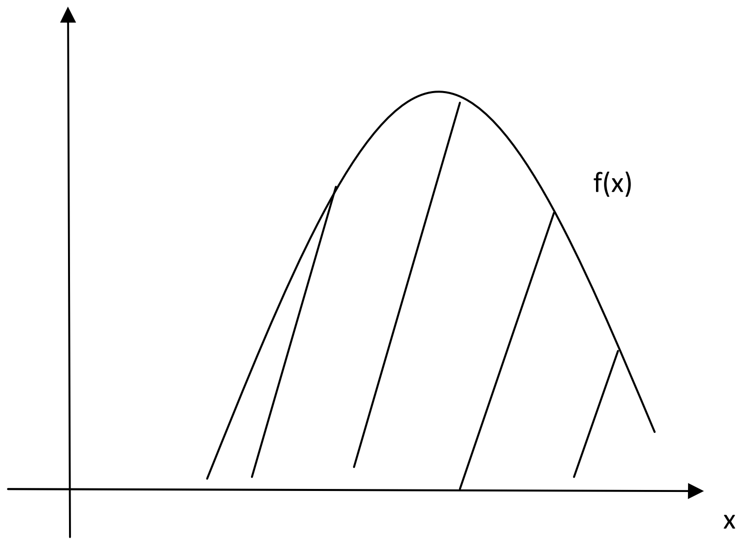
אם הפונקציה f גזירה, הקמירות מובטחת אם הנגזרת השניה חיובית ($f''>0$). אך תנאי הקמירות הגיאומטרי לעיל תקף גם לפונקציות שאינן בהכרח גזירות בכל נקודה (למשל $f(x)=|x|$ שאינה גזירה ב $x=0$) והוא ניתן להגדרה זהה גם למספר מימדים גדול מ-1. (תנאי מספיק לקמירות במונחי נגזרות שניות קיים גם למקרה הרב-מימדי, אך הוא קצת פחות אלגנטי.)

ובאופן סימטרי לחלוטין, פונקציה היא **קעורה** אם הקבוצה הכלואה מתחת לגרף שלה,

$$DOWN\,(f) = \{\, (x_1,\ldots,x_n,z) \mid z \le f(x_1,\ldots,x_n) \,\}$$

היא קמורה, והפונקציה קעורה במובן החזק אם הקבוצה הנ"ל קמורה במובן החזק.

למשל, הפונקציה f(x) המתוארת בגרף הבא היא קעורה:

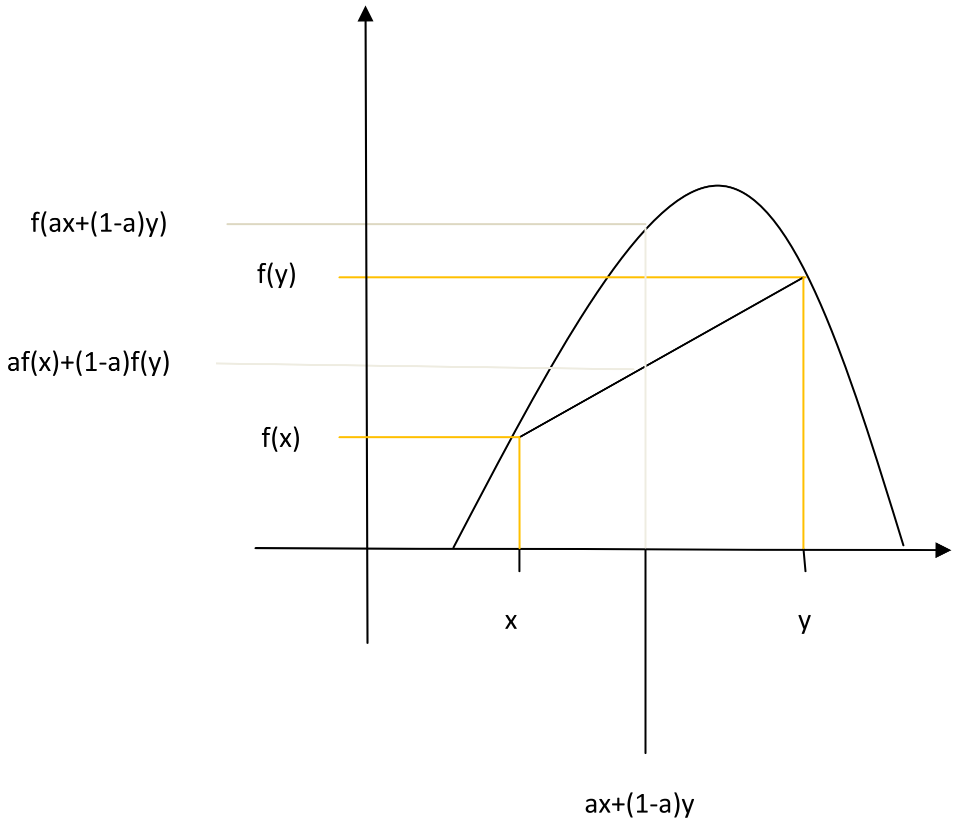


וכמו שאתם מנחשים, פונקציה f היא קעורה אם ורק אם היא לעולם אינה מעל המיתרים שלה: לכל שתי נקודות בתחום, x,y, ולכל a בקטע [0,1], מתקיים

$$f\,(ax+(1-a)y) \geq af(x) + (1-a)f(y)$$

וקעירות במובן החזק תתקיים אם אי השוויון הנ"ל יתקיים כאי-שוויון חזק לכל $0<a<1$.

ולהלן התיאור הגרפי של הפונקציה ומיתריה:



וכמו במקרה של פונקציה קמורה, גם כאן יש תנאי דיפרנציאלי שהוא מספיק לקעירות – נגזרת שניה שלילית – שניתן להכללה למקרה הרב-מימדי.

כזכור, פונקצית התועלת במודל שלנו נתונה רק עד כדי טרנספורמציה מונוטונית. אשר על כן, אין לייחס חשיבות רבה מדי לגובה הפונקציה עצמה, ובאופן כללי שאלת קעירותה או קמירותה עלולה להתגלות כריקה מתוכן מדעי. מאידך גיסא, יש תוכן אמפירי ברור יחסית לשאלת ההעדפות: אילו סלי תצרוכת עדיפים על פני סל נתון. ולכן יש לנו עניין בצורת הקבוצה של סלי התצרוכת המשיגים רמת תועלת נתונה. וחשיבה זו מובילה אותנו להגדרת קוואזי-קמירות וקוואזי-קעירות.

פונקציה f כדלעיל היא **קוואזי-קמורה** אם, לכל "רמת סף" c, הקבוצה

$$L_c = \{ (x_1,\ldots,x_n) \mid f(x_1,\ldots,x_n) \le c \}$$

היא קבוצה קמורה. שימו לב: הפעם מדובר בקבוצה במרחב ה- n מימדי, לא ה- (n+1) מימדי כמו בהגדרה הקודמת. הסיבה היא שאנחנו מסתכלים כעת רק על קבוצת הוקטורים שערך f שלהם אינו עולה על רמה נתונה, ואנחנו לא מייצגים את הערך של הפונקציה עצמה.

קל להשתכנע שכל פונקציה קמורה היא גם קוואזי-קמורה: נניח ש- f קמורה, ויהי נתון ערך c כלשהו. אנחנו רוצים להשתכנע שהקבוצה L_c קמורה, ז.א. שלכל שתי נקודות בה, הקטע המחברן מוכל כולו בקבוצה. תהיינה x,y שתי נקודות ב- L_c, כך ש-

$$f(x) \le c$$

$$f(y) \le c$$

ויהי a מספר בקטע [0,1]. עלינו להראות שגם הנקודה ax+(1-a)y בקבוצה L_c, זאת אומרת ש-

$$f(ax+(1-a)y) \le c$$

אך בזכות הקמירות ידוע לנו כי ערך הפונקציה אינו עולה על גובה המיתר:

$$f(ax+(1-a)y) \le af(x) + (1-a)f(y)$$

ומכיון ש- $f(x),f(y)\le c$, גם צד ימין לעיל, שהוא ממוצע משוקלל שלהם, אינו עולה על c.

לעומת זאת, אין זה נכון שכל פונקציה קוואזי-קמורה היא גם קמורה. למשל, נניח כי n=1, ונתבונן בפונקצית הלוגריתם (נניח הטבעי, לפי בסיס e – כל בסיס אחר b>1 יהווה רק מכפלה בקבוע חיובי ולא ישנה שום דבר מהותי). הפונקציה

$$f(x) = \log(x)$$

עבור x>0. פונקציה זו אינה קמורה כלל וכלל. למעשה היא קעורה: אם תציירו אותה תראו שהיא תמיד נמצאת מתחת למיתריה. ובכל זאת, היא קוואזי קמורה: כל הנקודות שעבורן f(x) אינה עולה על ערך מסוים c הן פשוט הקטע (0,e^c] שהוא קבוצה קמורה למהדרין (על פני הישר הממשי).

באופן דומה, אנו מגדירים פונקציה כ-**קוואזי-קעורה** אם, לכל "רמת סף" c, הקבוצה

$$L_c = \{ (x_1,\ldots,x_n) \mid f(x_1,\ldots,x_n) \geq c \}$$

היא קבוצה קמורה. שוב, מדובר בקבוצה במרחב ה- n מימדי, לא ה- (n+1) מימדי כמו בהגדרה הקודמת. באינטרפרטציה הכלכלית, זו תהיה קבוצת סלי תצרוכת המשיגים רמת תועלת מסוימת לפחות, אך רמת התועלת עצמה אינה מצוינת על-ידי אף אחד מרכיבי הוקטור.

וכצפוי, כל פונקציה קעורה היא גם קוואזי-קעורה, אך ההיפך אינו נכון.

<u>קבוצת התקציב</u>

בעית הצרכן הפשוטה (שבה נתעסק רוב הקורס) מוגדרת על-ידי אילוץ תקציב לינארי: אנו מניחים שלצרכן יש תקציב נתון של I שקלים. (I מלשון Income.) הוא עומד בפני מחירים קיימים בשוק, כך שהמוצר ה- i עולה p_i שקלים ליחידה. חשוב להדגיש שהמחירים וההכנסה אינם תלויים בצרכן. הצרכן הוא price taker – הוא מקבל את המחירים כנתונים ולא רואה בהם, ישירות או בעקיפין, משתני החלטה. הצרכן אינו יכול לקבוע את המחירים וגם לא את ההכנסה.

רגע, רגע, אומר מי שאומר – הצרכן לא יכול להגדיל את הכנסתו, למשל, אם יעבוד יותר? אכן, הוא יכול. בעיה זו תידון בהמשך הקורס, ואז נטען שה"הכנסה" של הצרכן נתונה בזמן (למשל, 24 שעות ביום), והוא יכול להחליט כמה מתוכה להמיר לשקלים (ודרכם למוצרים אחרים). אך גם אז נשמור על אותה מסגרת, ואז נניח שמגבלת 24 השעות אינה נתונה לבחירת הצרכן.

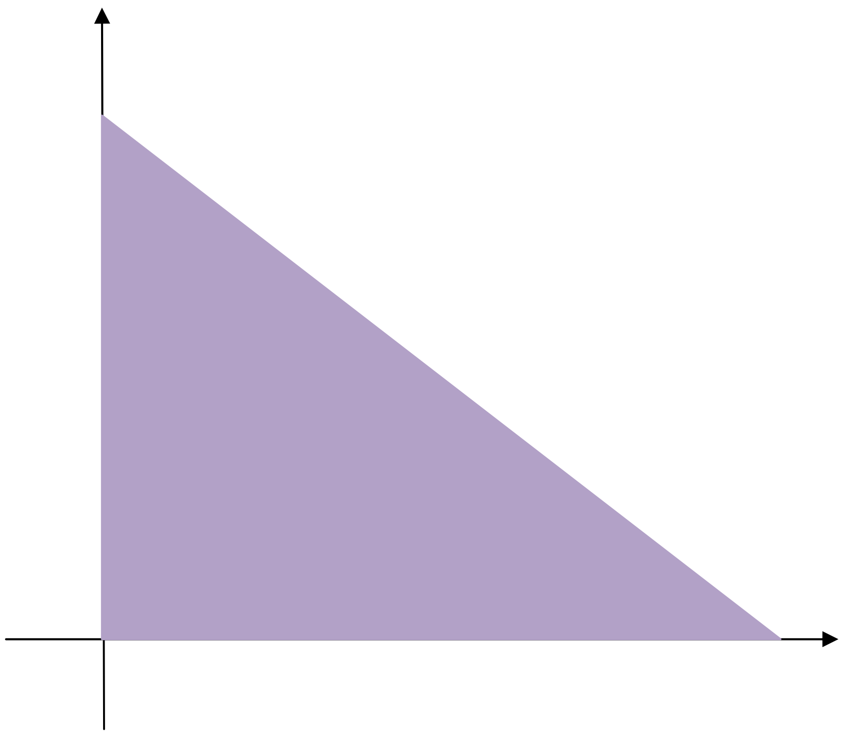
כמו-כן, ייתכן שאתם תוהים הא כיצד אין בחירת הצרכן משפיעה על המחירים. הרי המחירים נקבעים, בין השאר, על-ידי הביקוש. ומי נמצא בצד הביקוש, אם לא הצרכנים? לשון אחר, אם אף אחד מהצרכנים לא משפיע על המחירים כלל וכלל, אז מי כן? ובכן, ההנחה שלנו היא רק קירוב. או, אם תרצו, היא יכולה להיות מדויקת אם הקירוב נעשה ע"י הצרכנים עצמם: אם יש הרבה צרכנים בשוק וכל אחד מהם "קטן" יחסית לשאר, וכל צרכן מבין שהוא אחד מני רבים ושהשפעתו על המחירים לכן זניחה, זה יהיה נכון להניח שהצרכנים חושבים על עצמם כחסרי השפעה על המחירים, וכך התנהגות הצרכן במודל שלנו תהווה קירוב טוב להתנהגות הצרכנים במציאות. (או כך לפחות אנו מקווים.)

אם זה המצב, נוכל לרשום את מגבלת התקציב של הצרכן, בעל הכנסה I:

$$p_1 * x_1 + p_2 * x_2 + \ldots + p_n * x_n \le I$$

כאשר אנו זוכרים גם את מגבלות האי-שליליות: לכל i, $x_i \ge 0$.

ובתיאור גרפי, עבור n=2:



שימו לב שקבוצת התקציב המתקבלת היא קמורה. אכן, אם יש לנו שני ווקטורים

$$x = (x_1 , x_2, \ldots , x_n)$$

$$y = (y_1 , y_2, \ldots , y_n)$$

הנמצאים בקבוצת התקציב, כך תהיה גם כל נקודה ביניהם,

$$ax+(1-a)y = (ax_1+(1-a)y_1 , ax_2+(1-a)y_2 , \ldots , ax_n+(1-a)y_n)$$

עבור a בקטע [0,1]. כדי להשתכנע בכך, נתחיל ממגבלת התקציב, המתקיימת גם על-ידי x וגם על-ידי y:

$$p_1 * x_1 + \ldots + p_n * x_n \leq I$$

$$p_1 * y_1 + \ldots + p_n * y_n \leq I$$

אם נכפיל את האי-שוויון הראשון פי a (וזה מותר כי a אינו שלילי), נקבל

$$p_1 * a{*}x_1 + \ldots + p_n * a{*}x_n \leq a{*}I$$

ועתה נכפיל את האי-שוויון השני פי $(1-a)$ (שאף הוא אינו שלילי), ונקבל

$$p_1 * (1-a){*}y_1 + \ldots + p_n * (1-a){*}y_n \leq (1-a){*}I$$

וכאשר נסכום את שני האי-שוויונות (מה שמותר לעשות מכיון שהם באותו כיוון), נקבל

$$p_1 * a{*}x_1 + \ldots + p_n * a{*}x_n +$$
$$p_1 * (1-a){*}y_1 + \ldots + p_n * (1-a){*}y_n \leq a{*}I + (1-a){*}I$$

או

$$p_1 * [a{*}x_1+(1-a){*}y_1] + \ldots + p_n * [a{*}x_n+(1-a){*}y_n] \leq a{*}I + (1-a){*}I = I$$

ובמלים אחרות, גם הנקודה $ax+(1-a)y$, הנמצאת אי-שם על הקטע בין x ל- y, מקיימת את מגבלת התקציב.

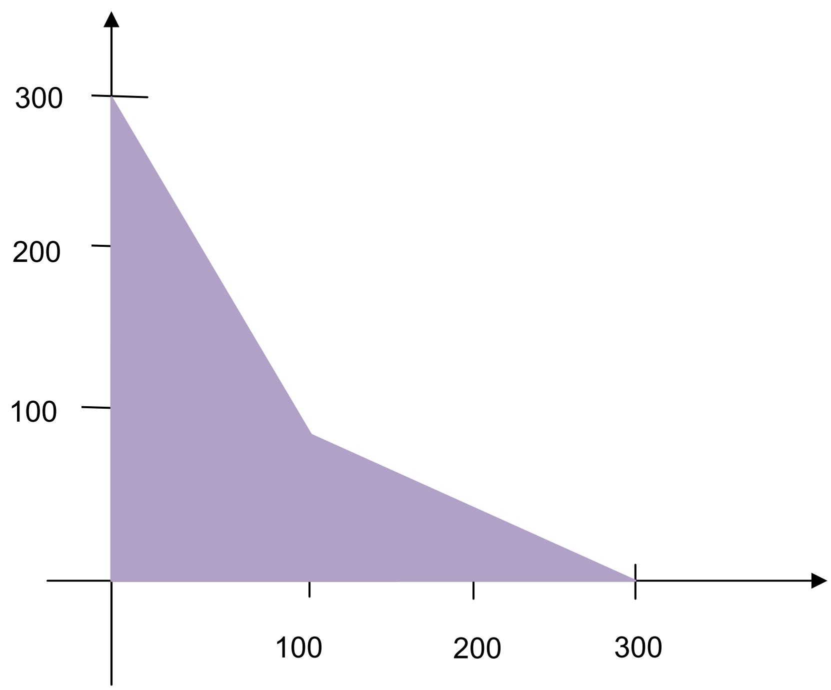
והוא הדבר במגבלות האי-שליליות אל כל הרכיבים. ולמעשה, זה יהיה המצב עם כל מגבלה לינארית: כל אימת שהתנאי הוא שפונקציה לינארית תהיה לפחות או לכל היותר ערך מסוים, קבוצת הנקודות המקיימת תנאי זה היא קמורה. וקבוצת הנקודות המקיימת מספר תנאים כאלה – את כולם בו-זמנית, היינו, החיתוך שלהן – תהיה קמורה אף היא. למעשה, אם מותר לנו לחשוב על מספר תנאים אינסופי, זוהי גם פחות או יותר שקילות: עד כדי דקויות של קבוצות פתוחות/סגורות, קבוצות המתקבלות מחיתוך של מגבלות לינאריות הן קמורות, וכל קבוצה קמורה היא חיתוך של מגבלות לינאריות.

לעומת זאת, קבוצת התקציב לעיל איננה קמורה במובן החזק, מכיון שהשפה שלה מכילה קטעים ישרים. (ואז אם ניקח שתי נקודות על השפה, נקודות שנמצאות ביניהן עדיין תהיינה על השפה ולא "בתוך" הקבוצה.)

לפעמים יש קבוצות תקציב שאינן קמורות. דוגמה קלאסית, ונפוצה בחיי יומיום היא המקרה של הנחות לגודל. נתבונן בדוגמה הבאה: יש שני מוצרים, n=2, ומחירם הוא 1 ₪ ליחידה,

$$p_1 = p_2 = 1$$

וההכנסה היא I=200. אך יש הפתעה: על כל אחד מהמוצרים, לאחר כמות של 100 יחידות, המחיר צונח ל- 0.50 ₪ ליחידה. כך, למשל, אם אחליט להוציא את כל 200 השקלים על מוצר 1, אצליח לקנות 300 יחידות, ולא 200 (100 היחידות הראשונות יעלו 100 ₪, אך 100 השקלים הנותרים יוכלו לקנות עוד 200 יחידות, כי כבר אהיה בטווח שההנחה תקפה בו).
אפשר (ורצוי) לוודא שקבוצת התקציב במקרה זה תראה כך:



ו"מגבלת התקציב" מורכבת מהקטע המחבר את (300,0) עם (100,100) והקטע המחבר את (100,100) עם (0,300). הקבוצה החסומה בין קטעים אלה והצירים – הלוא היא קבוצת

התקציב – איננה קמורה. למשל, אם נחבר את (300,0) ו- (0,300) בקו ישר, נקבל עליו את הנקודה (150,150) שהיא מחוץ לקבוצת התקציב.

בהמשך נראה אילו נסים ונפלאות מחוללת הקמירות, ולכן נבין מדוע נופל ליבו של הכלכלן בראותו קבוצת תקציב לא קמורה כגון זו. כאמור, לרוב נניח קבוצות תקציב קמורות, ואפילו את הפשוטה ביותר, זו המוגדרת ע"י אי-שוויון לינארי אחד, כפי שמתקבל עם מחירים קבועים (שאינם תלויים בכמויות המוצרים).

קבוצות רצויות ועקומות אדישות

התיאור הגרפי של קבוצת התקציב מעורר את תאבוננו לתאר באופן דומה גם את פונקצית התועלת. שהרי אם למצוי יש תמונת דיוקן, מדוע ייגרע חלקו של הרצוי?

ממבט ראשון יכול להתקבל הרושם שהדבר לא יהיה פשוט: מכיון שסלי המוצרים מתוארים במרחב ה-n מימדי שלנו (או, ליתר דיוק, ברביע האי-שלילי שלו), כדי לתאר את פונקצית התועלת נזדקק למימד נוסף. כך, למשל, עבור n=2, שהוא מספר המוצרים הקטן ביותר שבו יש עניין לענות בו, נצטרך לתאר את גובה פונקצית התועלת במימד שלישי, היוצא מתוך הנייר (או הלוח) לחלל האויר. זה קצת קשה לדמיין, למרות שמחשבים יכולים להיות לנו לעזר כאן. אך לפני שנתלהב ונרוץ לחפש מסך מתוחכם, ניזכר שפונקצית התועלת שלנו היא רק אורדינלית. הווה אומר, אין לייחס חשיבות לגובה הפונקציה, או לערך המספרי שלה, אלא רק לסדר שהיא מבטאת. אמנם הסברנו לעצמנו שהסיפור הזה הוא קצת מיתוס, המבוסס על ההנחה הלא-מציאותית שההעדפות הפרט הן טרנזיטיביות לחלוטין. עם זאת, אנחנו עובדים כאן במסגרתו של מודל זה, עם העדפות טרנזיטיביות וללא מקורות מידע נוספים על ערכה המספרי של התועלת. כפי שנראה, למודל זה תהיה יכולת חיזוי לא מבוטלת למרות שהוא מתעלם מנתונים מסוימים. מכל מקום, במסגרת מודל זה, כל טרנספורמציה עולה של פונקצית התועלת אף היא פונקצית תועלת (של אותו פרט), כשרה למהדרין. ולכן אולי אין צורך לטרוח ולתאר בדיוק את ערכי הפונקציה, כאשר בעצם אין לנו כבוד רב מדי אליהם.

במקום לתאר את ערכי פונקצית התועלת, אם כך, נתאר רק את הקבוצות של סלי התצרוכת שהם טובים לפחות כמו, או בדיוק כמו, סל נתון. **קבוצה רצויה** תהיה קבוצה של סלים מסוג זה: כל הסלים שהם טובים לפחות כמו סל נתון x. כך, ל- x–ים שונים יכולות להיות קבוצות רצויות שונות. עם זאת, ייתכן גם ששני סלים שונים יגדירו אותה קבוצה רצויה: זה יהיה המקרה אם

הסלים שקולים זה לזה. באופן דומה **עקומת אדישות** תהיה קבוצה של סלים השקולים זה לזה. לכל סל נתון x יש עקומת אדישות עליה הוא נמצא, ו-x-ים שונים יכולים להיות על עקומות שונות, אך ייתכן גם ששני סלים יימצאו על אותה עקומה – בדיוק באותו מקרה שבו הם שקולים.

אפשר להיות קצת יותר מדויקים ולרשום את הקבוצה הרצויה מ- x כ-

$$B(x) = \{ y \mid y \geq x \}$$

(זכרו שהסימון $\geq$ משמש כאן בתפקיד "טוב לפחות כמו", ובכיתה אנחנו מציירים אותו עם סלסולים.) ואת עקומת האדישות של x כ-

$$E(x) = \{ y \mid y \sim x \}$$

שימו לב שבינתיים לא הצדקנו את השם "עקומה", אך נעשה זאת בקרוב (בעזרת הנחות נוספות על העדפות הפרט).

מספר עובדות:

1. עבור כל שני סלים, x,y, אחת מהקבוצות $B(x),B(y)$ היא תת-קבוצה של השניה (ואולי זהה לה).
2. עבור כל שני סלים, x,y, הקבוצות $E(x),E(y)$ יכולות להיות זרות או זהות, אך הן לא יכולות להיות בעלות חיתוך לא-ריק בלי להיות זהות.

שתי התכונות נובעות מהשלמות והטרנזיטיביות של יחס ההעדפה: אם $x\geq y$, אזי, בזכות הטרנזיטיביות, $B(x)$ חייבת להיות מוכלת ב- (תת-קבוצה של) $B(y)$: כל z הנמצא ב- $B(x)$ מקיים $z\geq x$ ולכן, עפ"י טרנזיטיביות, גם $z\geq y$, זאת אומרת ש-z נמצא גם ב- $B(y)$. השלמות מבטיחה לנו שחייב להתקיים לפחות אחד מהשניים: או ש $x\geq y$, ואז $B(x)$ היא תת-קבוצה של $B(y)$, או ההפך (ואז $B(y)$ היא תת-קבוצה של $B(x)$). המקרה שבו $x\sim y$ יתקיים אם ורק אם $B(x)=B(y)$.

באופן דומה, אם שני סלים הם שקולים, $x\sim y$, אזי הטרנזיטיביות של יחס השקילות מבטיחה $E(x)=E(y)$. אם, לעומת זאת, אין שקילות בין השניים, שתי הקבוצות זרות: אילו היה סל z ששייך לשתיהן, הוא היה שקול הן ל- x והן ל- y, והטרנזיטיביות (שוב, של יחס השקילות) היתה

מבטיחה שגם x ו- y שקולים, ולכן הקבוצות היו בהכרח שוות. (שימו לב שכאן לא נעזרנו בשלמות היחס.)

כך, בשעה שקבוצת התקציב היא אחת, קבוצות רצויות יש הרבה. לא לכל x נקבל קבוצה שונה, כפי שראינו, אך שני סלים שונים בהחלט יכולים להגדיר קבוצות רצויות שונות. את הקבוצות הרצויות השונות, או לחליפין, את עקומות האדישות השונות, כבר נוכל לתאר גרפית במקרה הדו-ממדי. יהיו לנו הרבה קבוצות כאלו, אך כל אחת מהן תהיה "מאותו טיפוס" של מגבלת התקציב, ותחיה באותו מרחב כמותה. וכך נוכל לחבר בשעה טובה ומוצלחת בין הרצוי למצוי. אך לפני כן נדון בשתי תכונות נוספות של ההעדפות.

מונוטוניות

מקובל להניח שהעדפות הצרכן הן מונוטוניות, במובן שהצרכן מעדיף יותר על פחות. הווה אומר: אם נגדיל את כמויות המוצרים (כולם, או חלקם), נשפר את מצב הצרכן (או לפחות לא נרע אותו). מרוב הערות סוגריים אתם כבר חוששים שיש כאן יותר מהגדרה אחת, ואכן כמה דקויות מצפות לנו, אך הרעיון די ברור: יותר עדיף על פחות.

מדוע? למעשה מסתתרות כאן שתי הנחות. האחת היא שאנו מנסחים את הבעיה במונחים של כמויות טובין (goods) ולא רעין (bads). למשל, את העדפות הצרכן לעצמת הקול של המכוניות בכביש נגדיר במונחים של העדפה לשקט, ולא לרעש. כשנדון בהחלטת הצרכנית על מספר שעות העבודה שלה, ננסח את העדפותיה על זמן הפנאי הנותר לה, ולא על מספר השעות שבהן היא עובדת (בהנחה שהיא לא נהנית מהעבודה עצמה). זוהי בסך הכל מוסכמה שלנו ככלכלנים, שמפשטת קצת את חיינו.

ההנחה השניה היא קצת יותר משמעותית, והיא שההעדפות של הצרכן על כמויות הטובין ממשיכות לעלות, או לפחות לא לרדת, בכל כמות של המוצרים. על פניה, זו לא נראית הנחה מאוד סבירה. למשל, נניח שאני אוהב אבטיחים, ותועלתי עולה בכמות האבטיחים שאני צורך ביום, מ- 0 ל- 1 וגם מ- 1 ל- 2. אך יגיע מספר אבטיחים n שבו תועלתי תפחת משמעותית אם אצרוך את האבטיח ה- n-י. למעשה, זה המצב לגבי כמעט כל מוצר. איך אפשר להצדיק את המונוטוניות, אם כך? התשובה היא שאנו מניחים free disposal – הצרכן יכול להיפטר מכל כמות עודפת ללא כל קושי. אין הוא חייב לצרוך יותר מהכמות הרצויה לו. הנחה זו כמובן אינה

הגיונית אם אנחנו חושבים על זבל, רעש, ושאר מוצרים (טובין או רעין) שמזהמים את הסביבה. אך לגבי רוב המוצרים ההנחה נשמעת סבירה למדי.

הערה חשובה: כשאני שואל את עצמי מה התועלת שלי מ-60 אבטיחים, אני צריך לדמיין את עצמי צורך אותם, או, בהנחת free disposal, צורך כמה שאני בוחר מתוכם ואת השאר זורק. אך כצרכן אני לא יכול להחליט לפתוח באסטה ולמכור אבטיחים. כמובן, בחיים אני יכול לעשות זאת, אבל אז אהפוך (מבחינה כלכלית) לפירמה המוכרת אבטיחים. פירמה זו תהיה בבעלותי הבלעדית, רווחיה יצטרפו להכנסה שלי, ואת ההכנסה הכוללת אוציא על מוצרים שונים ומגוונים כראות עיני. זה יקרה מאוחר יותר במודל שלנו. כרגע אנחנו רק מנסים להבין מהי "ראות עיני". זאת אומרת, אנחנו מנסים לבחון את ההעדפות מהמוצרים הסופיים (ללא מסחר נוסף) ואחרי שנבין את אלה נחזור צעד אחורה ונשאל איזה מסחר יתבצע ע"י אותם פרטים, בהינתן העדפותיהם על המוצרים אותם הם אכן צורכים.

ועתה לדקויות. הנחת המונוטוניות הפשוטה ביותר היא שאם סל המוצרים x מבטיח לפחות אותה כמות מוצר כמו סל המוצרים y, לכל מוצר ומוצר, אזי לא ייתכן ש- y יהיה עדיף (ממש) על x. ובאופן יותר פורמלי:

מונוטוניות בסיסית: לכל שני סלי מוצרים x,y, אם (לכל מוצר i, $x_i \geq y_i$) אזי $x \succeq y$.

מונוטוניות זו מאפשרת לצרכן להגיע ל"נקודת רוויה", ממוצר אחד אך גם מכל המוצרים יחד. ואמנן נקודת רוויה כזו נשמעת מאוד סבירה מבחינה פיזיולוגית: יש גבול לכמות המזון שאנחנו יכולים לצרוך, כמו גם למספר זוגות הנעליים שאנחנו יכולים לנעול וכו'. אך רובנו מוצאים שנקודות הרוויה שלנו קצת רחוקות מאיתנו, ולכן לרוב אנחנו מניחים תכונות מונוטוניות חזקות יותר, המבטיחות שהצרכן עדיין לא הגיע לרוויה.

מונוטוניות חלשה: מתקיימת מונוטוניות בסיסית, ובנוסף לכך, אם לשני סלים x,y מתקיים גם ש(לכל מוצר i, $x_i > y_i$), אזי $x \succ y$.

כך, המונוטוניות החלשה דורשת שהגדלת **כל** הכמויות תגרום לצרכן להודות שמצבו השתפר ממש.

ובמקום שיש מונוטוניות חלשה יש גם מונוטוניות חזקה:

מונוטוניות חזקה: לכל שני סלי מוצרים x,y, אם (לכל מוצר i, $x_i \geq y_i$), וכן [לפחות ל- i אחד מתקיים אי-שוויון חזק ($x_i > y_i$)], אזי $x > y$.

שימו לב שהמונוטוניות החזקה גוררת את המונוטוניות הבסיסית (למרות שלא הכנסנו את דרישת המונוטוניות הבסיסית להגדרת המונוטוניות החזקה). הסיבה היא שאם ידוע לנו התנאי של המונוטוניות הבסיסית, זאת אומרת שלכל מוצר i, $x_i \geq y_i$, אזי אחת מן השתיים: או ששני הסלים זהים, ואז מתקיימת ביניהם אדישות, או ש-x מבטיח כמות גדולה יותר מ- y ברכיב אחד לפחות, ואז המונוטוניות החזקה מספיקה כדי להקיש ש- $x > y$. בשני המקרים, $x \geq y$.

המונוטוניות החזקה דורשת שהעדפה חזקה של x על פני y תצוץ אפילו אם הכמויות ב- x שוות לכמויות ב- y בכל אחד מהמוצרים למעט אחד. הגדלה של הכמות ברכיב אחד בלבד כבר מספיקה ליצירת העדפה חזקה. המונוטוניות החלשה דורשת שהעדפה חזקה תתקיים רק אם <u>כל</u> כמויות המוצרים גדלו. כמובן, אם מתקיימת מונוטוניות חזקה אזי תתקיים גם מונוטוניות חלשה: לפי תנאי המונוטוניות החלשה, x מבטיח כמויות גדולות יותר מ- y בכל המוצרים, בשעה שידוע לנו (על פי המונוטוניות החזקה) שמספיק להגדיל את הכמות באחד מהמוצרים וכבר תיווצר העדפה חזקה ל- x על פני y.

ההפך אינו נכון. למשל, נניח שמיקה שותה קפה עם כפית סוכר אחת בדיוק. היא לא צורכת קפה בלי סוכר ולא סוכר בלי קפה. אין מבחינתה שום תחליפיות בין שני המוצרים. אפשר לנסח את העדפותיה ע"י פונקצית התועלת

$$u(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$$

כאשר x_1 מציין את כמות הקפה (נמדדת בספלים) ואילו x_2 – את כמות הסוכר (נמדדת בכפיות). אם יש למיקה ספל קפה אחד וכפית סוכר אחת, הגדלת הכמות של אחד מהמוצרים תותיר אותה אדישה. רק הגדלת שתי הכמויות תיצור העדפה של ממש. כך, העדפות אלו הן מונוטוניות במובן החלש אך לא החזק.

לרוב נניח שההעדפות מקיימות מונוטוניות חלשה. הנחה זו מספיקה לנו כדי להבטיח שהצרכן יבחר להיות "על מגבלת התקציב", זאת אומרת לנצל את כל הכנסתו. עובדה זו תהיה נוחה גם בחישובים של סל אופטימלי, וגם מסיבות תיאורטיות שיתבהרו בקורס מיקרו 2. כאמור, ההנחה איננה בלתי סבירה למרות שבכמויות גבוהות מספיק הצרכן כנראה יגיע לרוויה.

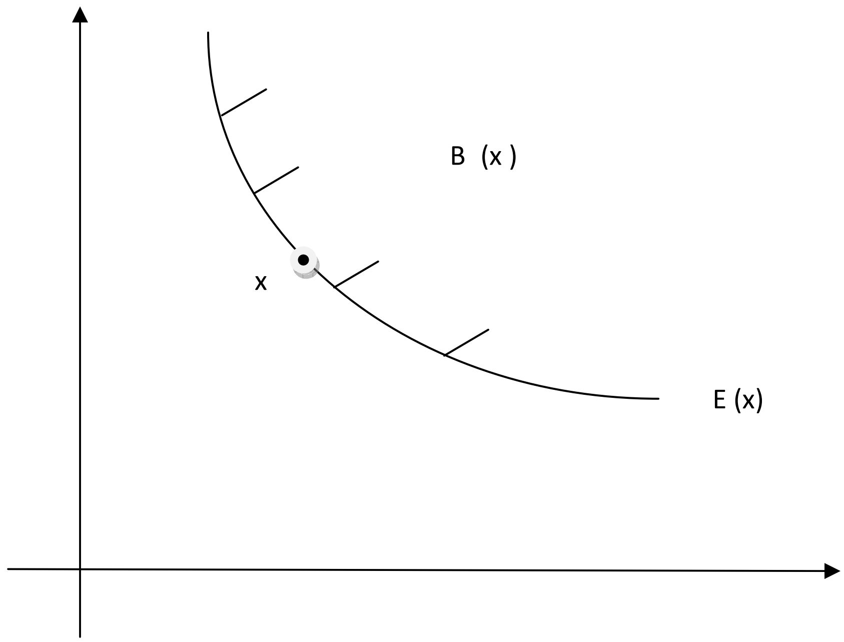
במקרה הדו-מימדי, הנחת המונוטוניות החלשה מבטיחה גם של"עקומות" האדישות אין "שטח". הווה אומר, קבוצת סלים שכולם שקולים זה לזה לא יכולה להכיל, למשל, ריבוע בעל שטח חיובי. (אם היה כזה ריבוע, היה ניתן למצוא בתוכו שני סלים שהאחד גדול מהשני בכל רכיב, בסתירה למונוטוניות החלשה.) לאור זאת, אין לנו סיבה מיוחדת להתעקש על מונוטוניות חזקה, ולכן לרוב נסתפק בחלשה.

בהינתן הנחת המונוטוניות, קל למצוא את הקבוצות הרצויות מעקומות האדישות ולהפך. אם נתחיל בעקומת אדישות, הלוא היא הקבוצה E(x) עבור כל x שנמצא על העקומה, נוכל להשלים אותה לקבוצה B(x) ע"י הוספת כל הווקטורים שהם "מעל" העקומה, ז.א. כל הווקטורים y שמבטיחים כמויות גדולות לפחות כמו איזשהו x (על העקומה) בכל רכיב ורכיב. לחליפין, אם אנחנו מתחילים עם הקבוצה הרצויה B(x), ניתן למצוא את עקומת האדישות שלה על ה"שפה" של הקבוצה – בזכות הרציפות, ברור לנו שכאשר נעבור מתחום של סלים טובים מ- x לסלים גרועים מ- x, נעבור דרך סל שנותן לנו אדישות בדיוק.

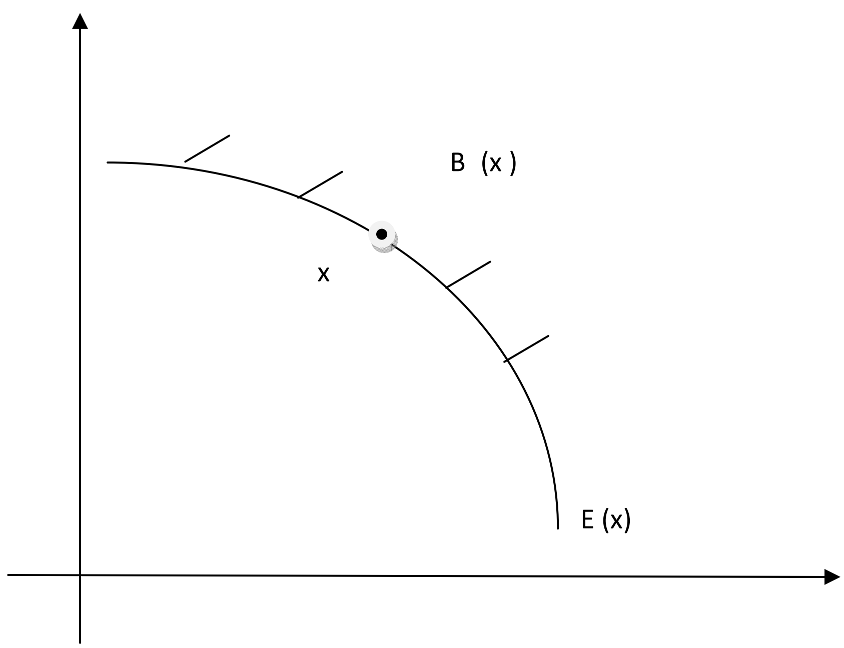
<u>קמירות</u>

ההנחה השניה על העדפות הצרכן היא הנחה של קמירות. בהינתן ההגדרות שלעיל, קל לנסח הנחה זו: אנו פשוט מניחים שכל הקבוצות הרצויות הן קמורות. או, במלים אחרות, לכל x, הקבוצה B(x) היא קמורה. או, במונחי פונקצית התועלת, ההעדפות הן קמורות אם פונקצית התועלת היא קוואזי-קעורה. (שימו לב שהניסוחים שקולים לפי הגדרותינו: הקבוצות הרצויות הן בדיוק הקבוצות שבהן מושגת רמת תועלת מסוימת לפחות, וקמירותן של אלו מגדירה את הפונקציה כקוואזי-קעורה.)

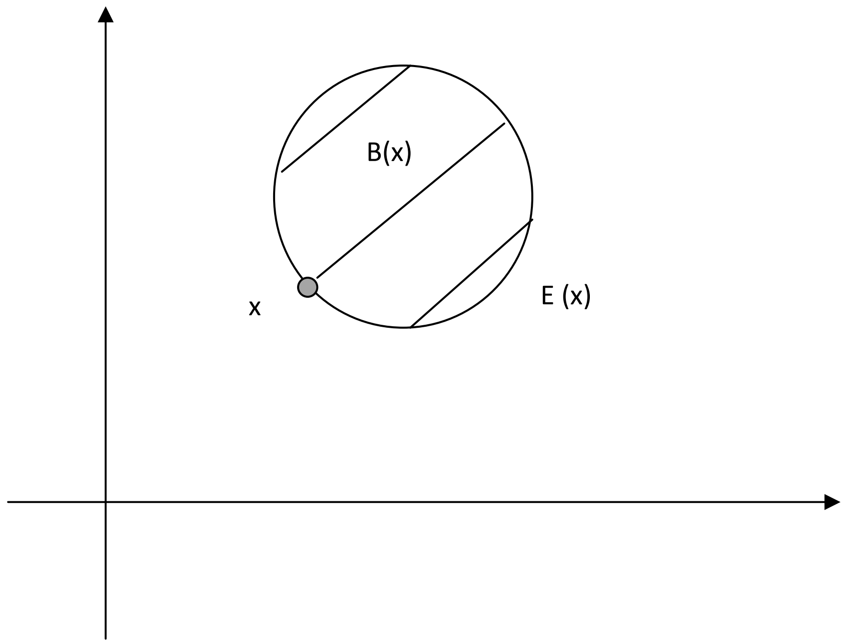
להלן דוגמה להעדפות מונוטוניות וקמורות (נצייר רק קבוצה רצויה אחת, ונדמיין שכל השאר דומות לה):



והנה דוגמה של קבוצה רצויה שאיננה קמורה (למרות שההעדפות עדיין מונוטוניות):



לשם התרגיל, אפשר גם לחשוב על העדפות קמורות שאינן מונוטוניות, משהו מהצורה:



לעתים נשתמש בהנחה חזקה יותר, של **קמירות חזקה**, שאומרת שהקבוצות הרצויות הן קמורות במובן החזק, ואז עקומות האדישות אינן מכילות קטעים ישרים. בציור הראשון והשלישי לעיל הקבוצות הקמורות הן קמורות במובן החזק.

מה משמעותה הכלכלית של הנחת הקמירות? כללית, ההנחה אומרת שהצרכן ברנש מתון המעדיף את הממוצע על-פני נקודות קיצוניות. כמובן, תלוי איזה נקודות קיצוניות בוחרים. אך אם נניח שנבחרות שתי נקודות קיצוניות שהן כשלעצמן שקולות בעיני הצרכן, נקודה על הקטע ביניהן לא יכולה להיות יותר גרועה מהן. אם, למשל, 4 ק"ג מלפפונים (ללא עגבניות כלל) שקולים בעיני ל-2 ק"ג עגבניות (ללא מלפפונים כלל), הרי שהעדפות קמורות אומרות שתערובת של 2 ק"ג מלפפונים וק"ג עגבניות אחד תהיה טובה בעיני כמו שתי האפשרויות הקודמות.

הנחה זו היא די סבירה אם תחשבו על חלוקת תקציב בין, למשל, מזון וביגוד, או חוקה בין תצרוכת היום לבין תצרוכת מחר. לעומת זאת, יש מקרים שבהם ההנחה נשמעת פחות סבירה. נניח, למשל, שאני מחלק 90 דקות בין שני סרטים. כל סרט אורך 90 דקות. נניח גם שאני אדיש בין צפיה בסרט אחד לעומת משנהו. אך צפיה ב-45 דקות מכל אחד מהם היא כנראה לא

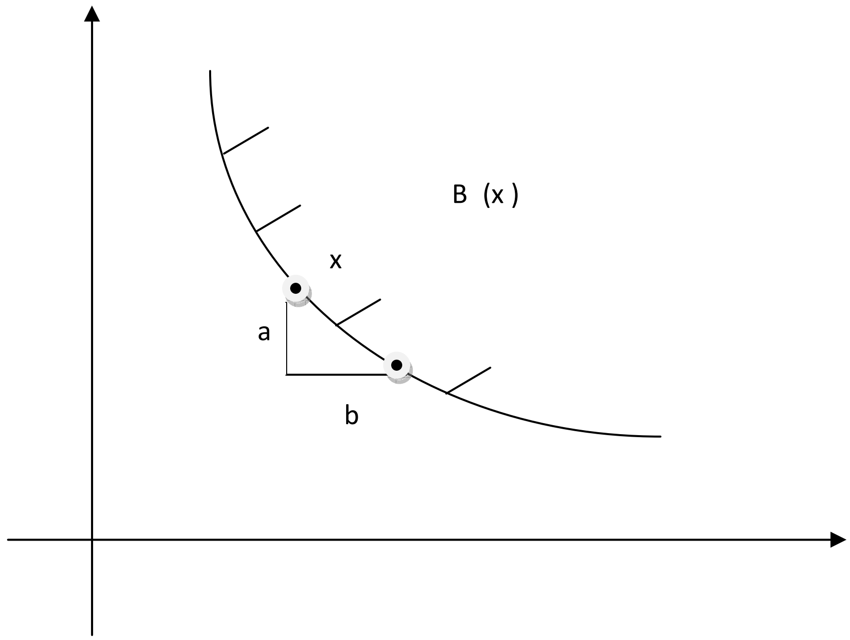
רעיון מוצלח. ובאופן דומה, אם אני צריך לבחור בין שתי דירות אולי אני אדיש ביניהן, אך אעדיף כל אחת מהן על פני האפשרות של חלוקת הזמן בין שתיהן. הנחת הקמירות, אפוא, לא מתקיימת תמיד. אך היא די סבירה אם אנחנו חושבים על סעיפי הוצאות גדולים, בפרט לאורך זמן. אם נבחן סעיפי הוצאות כגון "הוצאות דיור" ו"הוצאות מזון" על פני שנה, הקמירות נראית די משכנעת.

קמירות ההעדפות קשורה להנחת התועלת השולית הפוחתת. כדי לראות זאת, נתחיל בהנחה שיש לצרכן פונקצית תועלת קרדינלית, הווה אומר, שיש משמעות למספרי התועלת. ונניח גם שהתועלת משני המוצרים היא **סיכומית**, ז.א. שניתן לרשום את פונקצית התועלת כסכום של פונקציות, שכל אחת מהן תלויה רק באחד המשתנים:

$$u\ (x_1, x_2) = v_1\ (x_1) + v_2\ (x_2)$$

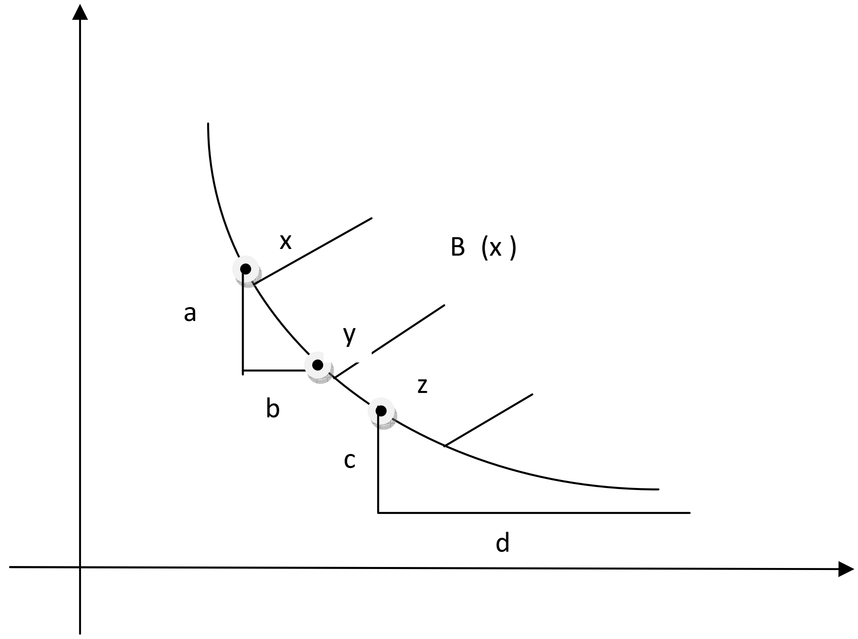
באשר הפונקציות v_1, v_2 מקיימות את תנאי התועלת השולית הפוחת: כל אחת מהן היא פונקציה עולה של המשתנה שלה, אך קצב עלייתן פוחת. או: נגזרתן הראשונה חיובית, אך השנייה – שלילית. בקצרה, הפונקציות v_1, v_2 הן מונוטוניות עולות וקעורות.

רעיון התועלת השולית הפוחתת הוא די טבעי ודי עתיק: ההנאה שאדם ישאב מהשקל הראשון, או מהעגבניה הראשונה, גבוהה מזו שישאב מהשקל או העגבניה ה- 100. לא ממש ברור למה הכוונה ב"הנאה" זו, אך לו היתה לנו פונקצית תועלת קרדינלית היה אפשר, לצורך הענין, לזהות אותה עם ה"הנאה". ואז ניתן לשאול: כמה יחידות ממוצר 1 צריך לתת לצרכן כדי לפצות אותו על אובדן יחידה ממוצר 2? בעצם, זוהי שאלה על **השיפוע של עקומת האדישות**:



אם אנו פותחים בנקודה $x=(x_1, x_2)$ ומוסיפים $a<0$ לרכיב השני, ו- $b>0$ לרכיב הראשון, כך שאנו מגיעים לנקודה חדשה, $y=(x_1+b, x_2+a)$ הנמצאת על אותה עקומת אדישות, הרי שהיחס a/b הוא קירוב לשיפוע העקומה בנקודה x. ולמעשה, אם נשאיף את a ועימו את b לאפס, הרי שהגבול של היחס הזה הוא בדיוק ההגדרה של השיפוע של העקומה. (ובמצב זה המיתר שמחבר את x עם y ישאף לקו המשיק לעקומה בנקודה x.)

השאלה, האם עקומת האדישות מגדירה "קבוצה רצויה" קמורה אם לאו, תוכרע ע"י השוואת השיפוע הנ"ל בנקודות שונות על פני העקומה:



נשווה את הנקודה x, שבה יש יחסית הרבה מהמוצר השני ומעט מהראשון, עם הנקודה z, שבה המצב הפוך. לשם פשטות נניח כי a=c=1. כשאנו גוזלים מהצרכן יחידה אחת מהמוצר השני בנקודה x, מכיון שיש לו יחסית הרבה מאותו מוצר, הוא לא ממש מתרגש: אבדן התועלת דרך ירידת ערכה המספרי של הפונקציה v_2 אינו טראגי, בשל הנחת התועלת השולית הפוחתת (יחסית לאבדן התועלת מהפחתת כמות המוצר באותו גודל c=1 כאשר אנחנו מתחילים בנקודה z). מאידך גיסא, ב- x, כאשר יש יחסית מעט ממוצר 1, כל יחידה שלו היא חשובה, יותר מאשר בנקודה z, שבה יש יחסית הרבה ממוצר 1 (זוהי הנחת התועלת השולית הפוחתת שוב, הפעם לגבי מוצר 1). כשנבוא לפצות על אבדן התועלת מהפחתת כמות המוצר השני ע"י הגדלת הכמות של המוצר הראשון, נמצא שאנו זקוקים לפיצוי קטן יותר ב- x מאשר ב- z: הן משום שהנזק שנגרם בשל עושק יחידה ממוצר 2 קטן יותר ב- x מאשר ב- z, והן מכיון שכל יחידה של מוצר 1 "שווה יותר" ב- x מאשר ב- z. ולכן, אם אכן a=c, נקבל ש- b<d. וכמובן, הטיעון היה מתהפך אם היינו מניחים תועלת שולית עולה בשני המוצרים (ואז היינו מקבלים עקומת אדישות שבה שהקבוצה <u>הפחות-טובה</u> היא קבוצה קמורה).

זה אולי משכנע כטיעון של המאה ה-19, אבל אנחנו כבר גדולים וחכמים ויודעים שאין כזה דבר "תועלת שולית פוחתת", כי פונקצית התועלת היא רק אורדינלית וכו'. (ועם כל הסתייגויותינו מהמודל הקלאסי, שבשל הנחות לא מציאותיות גזל מפונקצית התועלת את מעמדה כמושג מדעי, במסגרת המודל שבו אנו עובדים, פונקצית התועלת אכן כל כך רחוקה מיחידות עד כדי

ריקון מושג התועלת השולית מתוכן.) ובנוסף לכך, כל הסיפור דלעיל הניח שהתועלת היא סיכומית בשני המוצרים, ומי יתקע כף לידינו ויערוב לנו שמסקנותינו מרחיקות הלכת אכן תקפות גם באופן כללי יותר?

ובכן, לנושא השני נוכל להסיר דאגה מלבנו בעזרת מושג הדיפרנציאליות: אם פונקצית התועלת דיפרנציאלית, הרי שניתן לקרב את השינוי בערכה ע"י סכום השינוי הנגרם מכל משתנה לחוד (השינוי בגודל המשתנה מוכפל בנגזרת החלקית של הפונקציה ביחס לאותו משתנה). כך שהחישוב שעשינו למקרה הסיכומי הוא די כללי: ממילא אנחנו מתעניינים ביחס השינויים בגבול (למשל, a/b לעיל כאשר גם a וגם b שואפים לאפס).

ולענין הנושא הראשון: שיפוע עקומת האדישות תלוי רק בעקומת עצמה, או בקבוצה הרצויה שלה, ואלו אמורות להיות אוביקטים מדידים ובעלי משמעות. כל ייצוג אלטרנטיבי של אותן ההעדפות יצטרך לתאר אותן קבוצות רצויות ואותן עקומות אדישות, ולכן גם אותם שיפועים. ואכן, בדיקה מעט יותר מדוקדקת מראה שהשיפוע של עקומת האדישות ניתן לחישוב מתוך פונקציה התועלת באופן שאינו תלוי בפונקציה המסוימת שבה בחרנו לתיאור ההעדפות. כיצד נחשב, אפוא, את שיפוע העקומה?

עקומת האדישות מאופיינת ע"י השוויון

$$u\ (x_1\ ,\ x_2) = c$$

עבור קבוע c כלשהו (המשתנה מעקומה אחת למשנה). אם, כמו בציור שלעיל, אנו מוסיפים $a<0$ ל- x_2 ו- $b>0$ ל- x_1, ונשארים על אותה עקומה, הרי שמתקבל גם

$$u\ (x_1 + b\ ,\ x_2 + a) = c$$

בהנחה ש- a ו- b קטנים, ושהפונקציה u דיפרנציאבילית, ניתן לקרב את הערך הנ"ל ע"י

$$u\ (x_1 + b\ ,\ x_2 + a) = u\ (x_1\ ,\ x_2) + b\ u_1(x_1\ ,\ x_2) + a\ u_2(x_1\ ,\ x_2) + o(a,b)$$

כאשר u_1 ו- u_2 הן הנגזרות החלקיות של הפונקציה u על פי המשתנה הראשון והשני, בהתאמה, והביטוי האחרון הוא ביטוי ששואף לאפס מהר יותר מאשר a או b. (זכרו ש- a ו-b קשורים כי הנקודה נמצאת על עקומת אדישות נתונה, שלמעשה קובעת את b כפונקציה של a או להפך.)

שימו לב גם שהנגזרות החלקיות גם הן, ככלל, פונקציות של שני המשתנים, x_1, x_2, אם כי לעתים יהיה נוח לשכוח עובדה כאובה זו ולהשמיט את המשתנים מהסימון.

אוקיי, מתקדמים. אנחנו יודעים ששתי הנקודות נמצאות על אותה עקומת אדישות, כך ש-

$$u(x_1 + b, x_2 + a) = u(x_1, x_2) = c$$

ולכן ניתן לרשום

$$bu_1(x_1, x_2) + a\, u_2(x_1, x_2) = o(a,b)$$

או, עבור a,b קטנים,

$$bu_1(x_1, x_2) + a\, u_2(x_1, x_2) \approx 0$$

או,

$$b/a \approx -[\, u_2(x_1, x_2) / u_1(x_1, x_2)\,]$$

כאשר אי-הדיוק של השוויון שואף לאפס כאשר a,b שואפים לאפס. ובגבול, כאשר אנחנו מסתכלים לא על שיפוע המיתר אלא על שיפוע המשיק לעקומה בנקודה, נקבל שהשיפוע הוא:

$$-u_2 / u_1 = -[\, u_2(x_1, x_2) / u_1(x_1, x_2)\,]$$

(וצד ימין נועד רק להזכיר לנו שמדובר בפונקציות של המשתנים הנדונים.)

זה היה יפה ומרשים, ואנו נעזר בחישוב זה גם בהמשך. אך שאלתנו היתה המשמעות הכלכלית של קמירות ההעדפות, ובפרט, כיצד ניתן להבין את התועלות השוליות, פוחתות ככל שתהיינה, כאשר פונקצית התועלת היא רק אורדינלית. הרי במקום u היינו יכולים להשתמש בפונקציה אחרת, v, כל עוד

$$v = f(u)$$

עבור פונקציה מונוטונית עולה f כלשהי. אם כך, האם השיפוע של העקומה יהיה

$$-u_2 / u_1$$

או

$$? \quad -v_2 / v_1$$

למזלנו, שני היחסים זהים. כלל השרשרת קובע, שאם נרצה לגזור את $v=f(u)$ לפי משתנה מסוים, עלינו ראשית לחשב את הנגזרת של f ביחס לארגומנט שלה, u, ואז להכפיל את הנגזרת הזו בנגזרת הפנימית – החלקית במקרה זה – של u ביחס למשתנה הנדון. כך,

$$v_1 = f' * u_1$$

$$v_2 = f' * u_2$$

ולשמחתנו היחס נשמר:

$$u_2 / u_1 = v_2 / v_1$$

וכך אנו למדים **שיחס התועלות השוליות** הוא גודל כלכלי משמעותי, אשר אינו תלוי בפונקצית התועלת המסוימת שבחרנו. יתרה מזו: אם גודל זה, שהוא הערך המוחלט של השיפוע של עקומת האדישות, קטן כאשר אנו גולשים על העקומה לכיוון ימינה ומטה, הרי שהעקומה מגדירה קבוצה רצויה קמורה. והאינטואיציה הכלכלית של יחס התחלופה בין שני המוצרים תקפה גם במקרה הכללי, וללא התייחסות לערכה המספרי של "התועלת השולית ממוצר מסוים". אכן, אם תעברו על הטיעון המקורי, היתה בו יתירות מסוימת: כשגלשנו לנו במורד העקומה, ראינו שמצד אחד x_2 נעשה חשוב יותר, ומצד שני – x_1 נעשה חשוב פחות. אך כל מה שמעניין אותנו הוא <u>היחס</u> בין מידת החשיבות שלהם, ולכן ניתן לחזור על הטיעון ללא מושג התועלת: במקום לשאול, "כמה יחידות תועלת נאבד אם נקטין ביחידה אחת את הכמות של המצר השני" נשאל ישירות "כמה יחידות מהמוצר הראשון צריך להוסיף כדי לפצות על אבדן של יחידה אחת מהמוצר השני". אם ההעדפות הן קמורות, צריך יותר מהמוצר הראשון כאשר יש, יחסית, הרבה ממנו ומעט מהשני (בהשוואה למצב שבו יש מעט מהראשון והרבה מהשני).

<u>קמירות ההעדפות – קוואזי קעירות של פונקצית התועלת</u>

ראינו, אפוא, שאם יש לנו פונקצית תועלת דיפרנציאבילית, יחס הנגזרות השוליות, שהוא גודל משמעותי (ולא תלוי בפונקצית התועלת המסוימת שבחרנו לייצג את ההעדפות), מאפשר לזהות

קמירות. דרך אחרת לזיהוי קמירות, שתשמש אותנו גם במקרים שהפונקציה אינה בהכרח דיפרנציאבילית, היא בדיקה ישירה של תנאי הקוואזי-קעירות של הפונקציה. להלן דוגמה.

נניח כי יש לנו פונקציה תועלת סיכומית

$$u\ (x_1,\ x_2) = v_1\ (x_1) + v_2\ (x_2)$$

באשר הפונקציות v_1, v_2 קעורות (כל אחת בארגומנט שלה, שהוא חד-מימדי). נוכיח כי u קוואזי-קעורה. לצורך זה נבחר ערך כלשהוא c, ושתי נקודות

$$x = (x_1,x_2)$$

$$y = (y_1,y_2)$$

שמשיגות את הערך c לפחות, ונראה שהוא הדבר בכל נקודה על הקטע המחבר אותן, היינו שלכל $0≤a≤1$, גם הנקודה

$$z = (z_1,z_2) = ax + (1-a)y = (\ ax_1 + (1-a)y_1\ ,\ ax_2 + (1-a)y_2\ )$$

משיגה לפחות את הערך c.

נתון לנו, אם כן,

$$u\ (x_1,\ x_2) = v_1\ (x_1) + v_2\ (x_2) \geq c$$

$$u\ (y_1,\ y_2) = v_1\ (y_1) + v_2\ (y_2) \geq c$$

ואנו מנסים להוכיח כי

$$u\ (z_1,\ z_2) = v_1\ (z_1) + v_2\ (z_2) \geq c$$

בזכות הקעירות של v_1 אנו יודעים כי

$$v_1\ (z_1) = v_1\ (ax_1 + (1-a)y_1) \geq a\ v_1\ (x_1) + (1-a)\ v_1\ (y_1)$$

וכנ"ל עבור v_2 :

$$v_2\ (z_2) = v_2\ (ax_2 + (1-a)y_2) \geq a\ v_2\ (x_2) + (1-a)\ v_2\ (y_2)$$

ועתה נסכום:

$$u(z_1, z_2) = v_1(z_1) + v_2(z_2) \geq$$

$$a\, v_1(x_1) + (1-a)\, v_1(y_1) + a\, v_2(x_2) + (1-a)\, v_2(y_2) =$$

$$a\,[v_1(x_1) + v_2(x_2)] + (1-a)\,[v_1(y_1) + v_2(y_2)] =$$

$$au(x_1, x_2) + (1-a)u(y_1, y_2) \geq ac + (1-a)c = c$$

(כאשר בשורה האחרונה השתמשנו בעובדה שהתועלת מהסל x ומהסל y שתיהן c לפחות).

מקרים פרטיים של הפונקציות הסיכומיות הללו יהיו:

$$u(x_1, x_2) = v_1(x_1) + x_2$$

כאשר v_1 קעורה, למשל

$$u(x_1, x_2) = \log(x_1) + x_2$$

או פונקצית Cobb-Douglas:

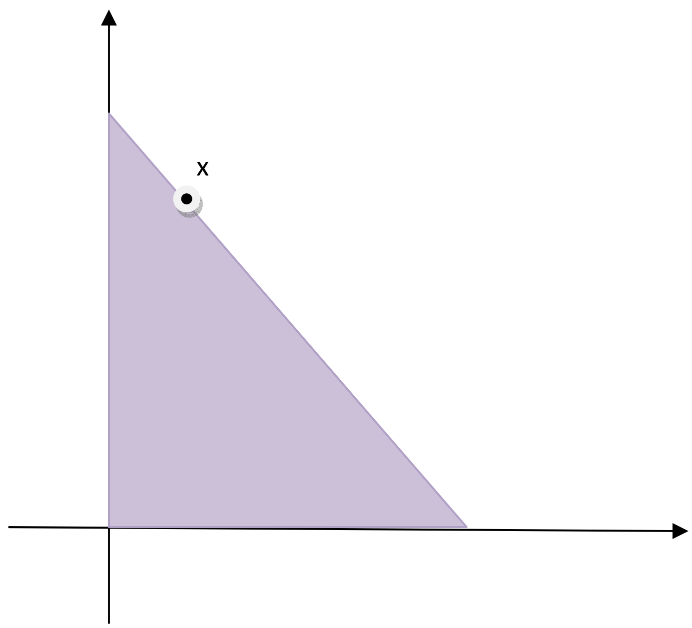
$$u(x_1, x_2) = a^*\log(x_1) + b^*\log(x_2)$$

<u>עקרון ההשקה</u>

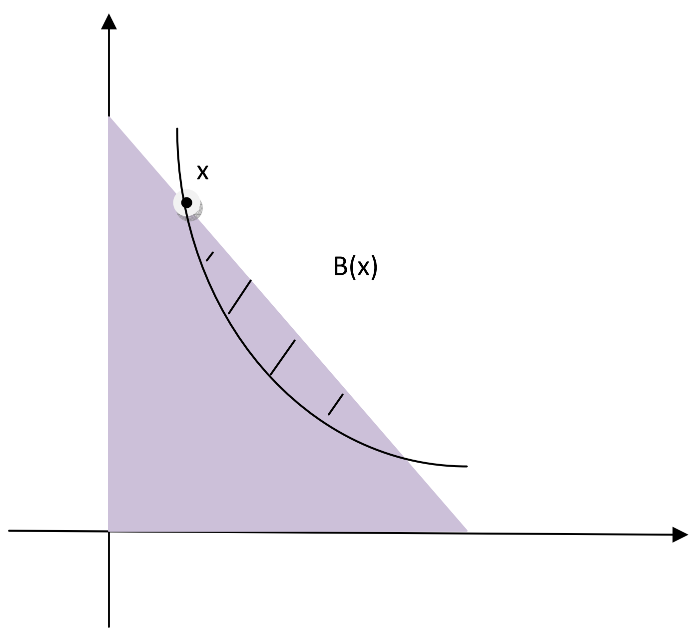
הדבר החשוב שאנו מקבלים מכל ההנחות שצברנו הוא שאם קבוצת התקציב קמורה וכך גם הקבוצות הרצויות, אזי נקודה שהיא אופטימום לוקאלי היא גם אופטימום גלובלי. ננסה להבין ענין זה טוב יותר:

נתונה לנו קבוצת תקציב קמורה (פשוטה, המוגדרת ע"י אי-שוויון לינארי, או פחות פשוטה, אך העיקר – קמורה). אנו מחפשים נקודה טובה ביותר בה. (נקודת אופטימום או נקודה אופטימלית – מכיון שההעדפות שלמות, אין הבחנה בין שני המושגים.)

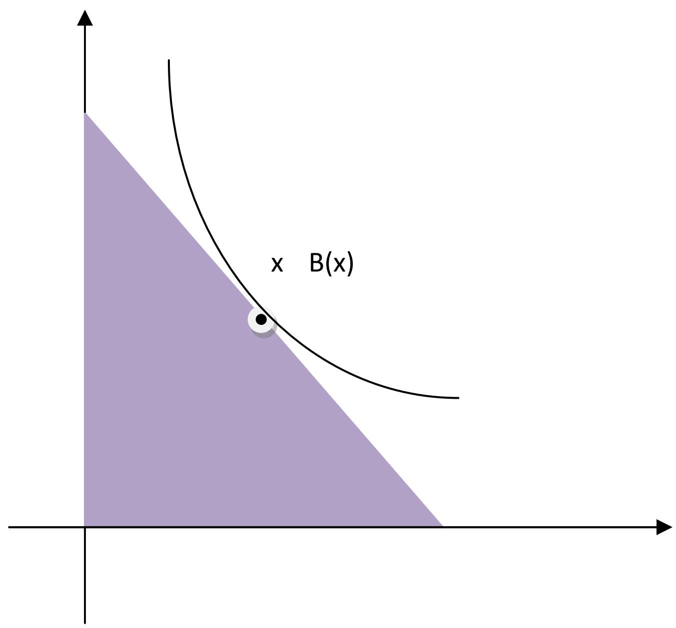
נתבונן בנקודה x בקבוצה ונשאל האם היא במקרה נקודה אופטימלית. מכיון שאנחנו מניחים העדפות מונוטוניות (לפחות במובן החלש), אנו יודעים שהצרכן יעדיף להיות על מגבלת התקציב, ולכן נניח ש- x אכן כזו:



נתבונן בקבוצה של כל הסלים הטובים לפחות כמו x:

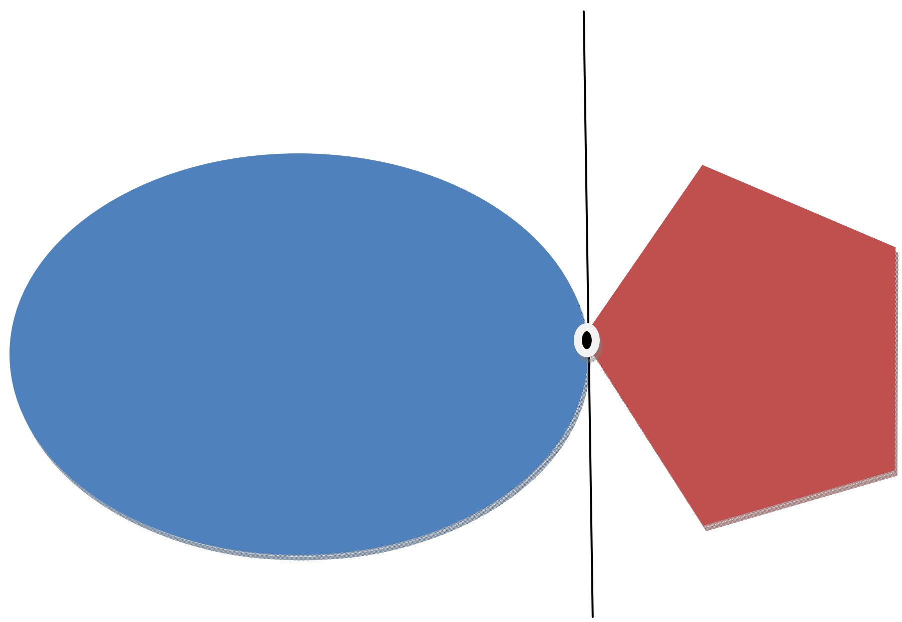


ניתן לראות שיש שטח (מקווקוו) שהוא בתוך הקבוצה האפשרית אך ממש יותר טוב מ- x. לכן x איננה אופטימום. ניתן לבחור משהו טוב הימנה. ננסה לטפס לקבוצה רצויה "גבוהה" יותר. כל עוד יש לקבוצה כזו חיתוך בעל "שטח" עם קבוצת התקציב, איננו באופטימום. אם נהיה שאפתניים מדי ונעלה לקבוצה שאין לה חיתוך כלל, נאבד קשר עם המציאות: נהיה בחזקת חולמים באספמיה, המקווים לדברים שאינם אפשריים. ולכן, האופטימום יתקבל כשנטפס לקבוצה הרצויה הגבוהה ביותר שעדיין נוגעת בקבוצת התקציב:



בציור זה אנו רואים השקה יפה בין שתי הקבוצות, בין הרצוי והמצוי. זוהי "השקה" כמו בשיעורי גיאומטריה בתיכון, כאשר יש לקבוצה הרצויה שיפוע מוגדר היטב והוא שווה לשיפוע קו התקציב. באופן יותר כללי, "השקה" יכולה להיות גם בין גופים שאינם חלקים (ושאין להם "שיפוע" מוגדר היטב): שתי קבוצות "משיקות" זו לזו אם ניתן להעביר קו ישר, כך שקבוצה אחת נמצאת מצידו האחד, והשניה – מצידו השני. (אנו מתעלמים כאן מכמה דקויות לגבי נקודות שהן בדיוק על הקו.)

למשל, הקבוצות הבאות משיקות:



אם אחת הקבוצות היא הקבוצה המצויה (האפשרית) והשניה היא קבוצה רצויה, ההשקה מבטיחה לנו שבאזור הנקודה המשיקה לא ניתן להשיג שיפור: כל מה שטוב יותר מהנקודה כבר לא אפשרי. הקמירות מבטיחה לנו שהאופטימליות המקומית (לוקלית) הזו היא גם גלובלית: בגלל הקמירות לא ייתכן שאחת מהקבוצות לעיל תחליט פתאום לחצות את הקו ולעבור לצד השני. ולכן אין נקודות אפשריות – מצד אחד של הקו – שהן טובות יותר מנקודת ההשקה (כל הטובות יותר נמצאות בצד השני של הקו).

<u>עקרון השוליות</u>

רעיון ההשקה ניתן לתרגום למשוואה אלגברית פשוטה, לפחות במקרה שלקבוצות יש שיפועים מוגדרים היטב. כבר שפכנו דיו רב על חישוב השיפוע של עקומת האדישות במקרה שפונקצית התועלת היא דיפרנציאבילית, וקיבלנו: :

$$- u_2 / u_1 = - [u_2(x_1 , x_2) / u_1(x_1 , x_2)]$$

עתה נעשה תרגיל דומה לקו התקציב. מהו שיפועו? הרעיון דומה לחישוב השיפוע של עקומת התקציב, אך יש חדשות טובות: במקרה של קו תקציב פשוט (המוגדר ע"י משואה לינארית), החשבונות פשוטים יותר. זאת מכיון שכאשר בפונקציות לינאריות עסקינן, אין צורך להתעסק במינוחים דיפרנציאליים ובקירובים – ה"קירוב הלינארי" של הפונקציה הוא-הוא הפונקציה עצמה.

וכך, אם הנקודות (x_1 , x_2) ו- $(x_1 + b , x_2 + a)$ נמצאות על קו התקציב, הרי שהן מקיימות

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

$$p_1(x_1 + b) + p_2(x_2 + a) = I$$

ולכן

$$p_1b + p_2a = 0$$

ושיפוע קו התקציב יהיה

$$b/a = -p_2 / p_1$$

השוואת השיפועים נותנת את **<u>עקרון השוליות</u>**: יחסי המחירים שווים ליחסי התועלות השוליות:

$$u_1 / u_2 = p_1 / p_2$$

או

$$u_1 / p_1 = u_2 / p_2$$

הניסוח הראשון של התנאי הוא גיאומטרי: כפי שהסברנו לעיל, הוא משווה בין שיפוע עקומת האדישות בנקודה – יחס התועלות השוליות בה – לבין שיפוע קו התקציב, הלוא הוא יחס המחירים.

הניסוח השני של התנאי הוא כלכלי, וניתן להבינו כך: נדמיין שיש לנו הקצאת תקציב בין מוצר 1 למוצר 2, ונשאל האם כדאי להעביר שקל אחד מ-1 ל-2. מה אבדן התועלת שכרוך בהוצאה של שקל אחד פחות על מוצר 1? אתם אמורים להרים גבה ולשאול, "הוא שוב מדרדר לתועלות שוליות? הוא עדיין לא למד שאין משמעות למספרי התועלת?" אך אבקשכם להתאזר בסבלנות – כל מונחי התועלת יחזרו ויומרו למוצרים, וכבר ראינו שיחסי כמויות המוצרים הם גודל כלכלי

שאינו תלוי בפונקצית התועלת שבחרנו. וחוץ מזה, מה אכפת לכם – אם אתם טוענים שמצאתם נקודה אופטימלית, הרי שהיא אמור למקסם כל פונקצית תועלת שבחרתי לייצג בה את העדפותי, ולכן מוטב שהתשובה לשאלה לעיל תהיה שלילית, היינו שלא אוכל לשפר את ערך פונקצית התועלת שלי ע"י העברת שקל מתקציב מוצר 1 לתקציב מוצר 2. נמשיך, אפוא.

ובכן, שקל אחד קונה $1/p_1$ יחידות ממוצר 1. כל יחידת מוצר נותנת, בקירוב, u_1 יחידות תועלת. (זוהי משמעות הנגזרת החלקית של פונקצית התועלת ביחס לכמות המוצר, וה"קירוב" נובע מכך שהנגזרת נועדה לשינוי אינפיניטסימלי, ושקל אחד עלול להיות לא מספיק קטן כדי שהקירוב יהיה טוב.) ולכן יחידות התועלת שנאבד הן – שוב, בקירוב – u_1 / p_1. לפי אותו חשבון בדיוק, מספר יחידות התועלת שנרוויח מהוצאת שקל נוסף על מוצר 2 הוא u_2 / p_2. אם, למשל,

$$u_1 / p_1 < u_2 / p_2$$

אזי יצא הפסדנו בשכרנו, ויהיה כדאי להוציא שקל אחד פחות על מוצר 1 ואחד יותר על מוצר 2. ואם מתקיים אי השוויון ההפוך, אזי כדאי להעביר שקל אחד מההוצאה על מוצר 2 להוצאה על מוצר 1. אם, לעומת זאת, מתקיים שוויון – הלוא הוא תנאי השוליות הנובע מההשקה – אזי לא כדאי "לזוז" לא לכיוון זה ולא לכיוון השני, והנקודה שנמצאה היא אופטימלית באופן מקומי. (ואז, כאמור, הקמירות מבטיחה שהיא גם אופטימלית באופן גלובלי.)

לבסוף, נציין שניתן לקבל את תנאי ההשקה גם משיטת כופל לגראנז'. שיטה זו נראית אולי קצת כמו מעשה להטים, אך היא שימושית מאוד. רצוי להבין היטב את האינטואיציות הגיאומטרית והכלכלית שלעיל, אך בחיינו ככלכלנים נרצה למקסם (או למנמם) פונקציות שונות, לעתים עם יותר משתנים, ושיטת לגראנז' מבטיחה שנעשה את החישובים בצורה מסודרת ולא נשאיר x-ים בשטח.

ובכן: מעשה הלהטים של לגראנז' מציע להכניס את האילוץ לפונקציה המטרה, משל היינו "משלמים" על חריגה מהאילוץ. כך, אם אנחנו מתעניינים בבעיה

$$\text{Max } u\,(x_1\,,\,x_2)$$

Subject to

$$p_1\,x_1 + p_2\,x_2 = I$$

(ונתעלם בשלב זה מאילוצי האי-שליליות – הכללה של שיטת לגראנז' מטפלת גם באי-שוויונות) – נוסיף משתנה, נניח z (או λ,לזכר Lagrange), שיהיה המקדם, בפונקציה המטרה, של ה"חריגה" מהאילוץ:

$$\text{Max } L(x_1, x_2, z) = [\ u\ (x_1\ , x_2) - z\ (p_1\ x_1 + p_2\ x_2 - I)\ ]$$

ונסתכל על בעיה זו כעל בעיה בשלושה משתנים, אך ללא אילוץ. תנאי סדר ראשון שלה אומרים שהנגזרת החלקית של הפונקציה החדשה L לפי כל אחד משלושת המשתנים צריכה להיות אפס.

נפתח בנגזרת החלקית לפי המשתנה המלאכותי z: מכיון שאינו מופיע בפונקצית המטרה המקורית u, הנגזרת היא לא יותר מאשר

$$p_1\ x_1 + p_2\ x_2 - I$$

והשוואתה לאפס פשוט אומרת שהאילוץ (מגבלת התקציב) מתקיים.

הנגזרת החלקית לפי x_1 היא

$$u_1\ (x_1, x_2) - z\ p_1$$

והשוואתה לאפס נותנת

$$z = u_1\ (x_1, x_2)\ /\ p_1$$

ובאותו אופן,הנגזרת החלקית של L לפי x_2 צריכה להיות שווה לאפס, ואנו מקבלים גם

$$z = u_2\ (x_1, x_2)\ /\ p_2$$

ולכן נובע תנאי השוליות

$$u_1\ (x_1, x_2)\ /\ p_1 = u_2\ (x_1, x_2)\ /\ p_2$$

<u>הכרחיות ומספיקות</u>

תנאי (או "עקרון") השוליות הוא כלי מאוד בסיסי לחיפוש נקודות אופטימום, ובעזרתו ניתן גם לנתח את ההתנהגות של נקודת האופטימום ביחס לפרמטרים שונים, כגון שינוי במחירים או בהכנסה. למעשה, השוואת יחסי המחירים ליחסי התועלות השוליות בתורת הצרכן, והשוואות דומות בתורת היצרן, הופכות למעין טבע שני של כלכלנים. לאור זאת, רצוי לזכור שהתנאי כשלעצמו <u>אינו מספיק ואינו הכרחי לאופטימליות</u>.

נפתח במספיקות. כפי שציינו, תנאי השוליות הוא תנאי מספיק **אם ידוע כי מתקיימת קמירות** של הקבוצות הרצויות כמו גם של הקבוצה האפשרית (המצויה). ללא קמירות באחד מהצדדים, ייתכן שיתקיים תנאי השוליות, ואכן תהיה השקה, אך האופטימום שנמצא הוא רק מקומי (לוקאלי) ולא גלובלי. כמו-כן ייתכן שתנאי השוליות מתקיים למרות שגם באופן לוקאלי הרצוי והמצוי נחתכים, אך ב"נקודת פיתול". וייתכן שהתנאי מתקיים אך הנקודה שמצאנו אינה הכי טובה אלא הכי גרועה על קו התקציב.

בעצם, תנאי השוליות הוא תנאי סדר ראשון, המקביל לחלוטין לתנאי $f'(x)=0$ כתנאי למקסימיזציה של פונקציה f כלשהיא. זהו תנאי מספיק עבור פונקציה קעורה (כמו $f(x)=-x^2$) אך הוא אינו מספיק באופן כללי. ייתכן שהמדובר במקסימום לוקלי אך לא גלובלי, או בנקודת פיתול (כמו במקרה של הפונקציה $f(x)=x^3$) או בנקודת מינימום ולא מקסימום (כמו במקרה של הפונקציה $f(x)=x^2$). ולכן ההסתערות על תנאי השוליות צריכה להיות מותנית בבדיקה מוקדמת שאכן בבעיה קמורה עסקינן.

חשוב גם לזכור שתנאי השוליות איננו הכרחי. גם אם הבעיה קמורה (קבוצה אפשרית קמורה, קבוצות רצויות קמורות), ייתכנו צרות מצרות שונות. למשל, ייתכן שאין פתרון אופטימלי כי הקבוצה האפשרית אינה חסומה. זה אולי לא נשמע סביר לצרכן בעל הכנסה נתונה, אך זה ייתכן במקרה של פירמה שקבוצת אפשרויות הייצור שלה מאפשרת הכפלה של התשומות והתפוקות באופן שרירותי (ולא חסום). ייתכן שהבעיה אינה מונוטונית, ואז הפתרון אינו על שפת הקבוצה האפשרית. וייתכן שיש פתרון המקיים את תנאי ההשקה, אך בגלל חוסר דיפרנציאביליות הנגזרות החלקיות אינן מוגדרות היטב בנקודת האופטימום, ותנאי השוליות יפקשש את הנקודה האופטימלית. לדוגמה, אם יש שני מוצרים שכל אחד מהם עולה 1 ₪ ליחידה, ופונקציות התועלת היא

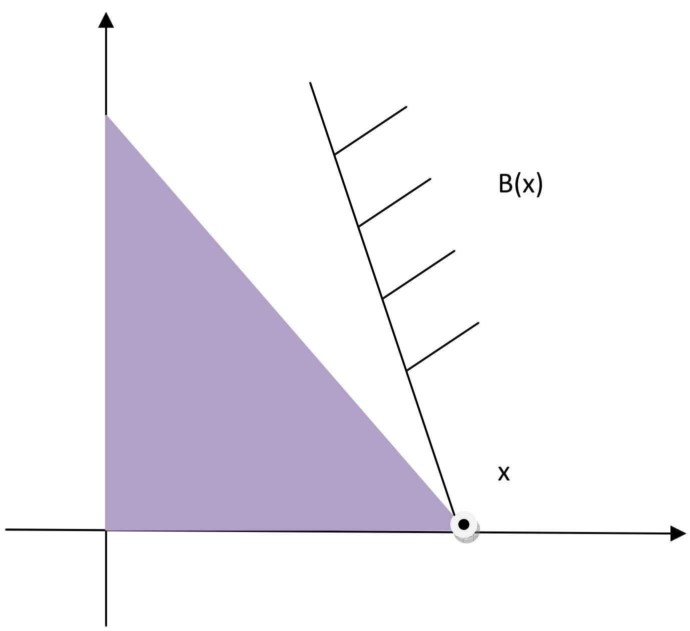
$$u\ (x_1, x_2) = 2\ x_1 + x_2$$

אזי הפתרון האופטימלי יהיה תצרוכת של המוצר הראשון בלבד (לכל רמת הכנסה), ובנקודה האופטימלית אין שוויון של יחסי התועלות השוליות למחירים. למעשה, לאורך כל קו התקציב יתקיים

$$u_1 / p_1 = 2 > 1 = u_2 / p_2$$

ולפי ההגיון הכלכלי של תנאי השוליות, הצרכן יעדיף להעביר שקל אחד מהוצאה על מוצר 2 להוצאה על מוצר 1. דא עקא, שבנקודה שבה $x_2=0$ כבר אין יותר שקלים שאפשר להעביר מההוצאה של מוצר 2. ולכן תנאי השוליות אינו מתקיים למרות שאנחנו בנקודה אופטימלית.

ובאופן גראפי תראה הבעיה כך:



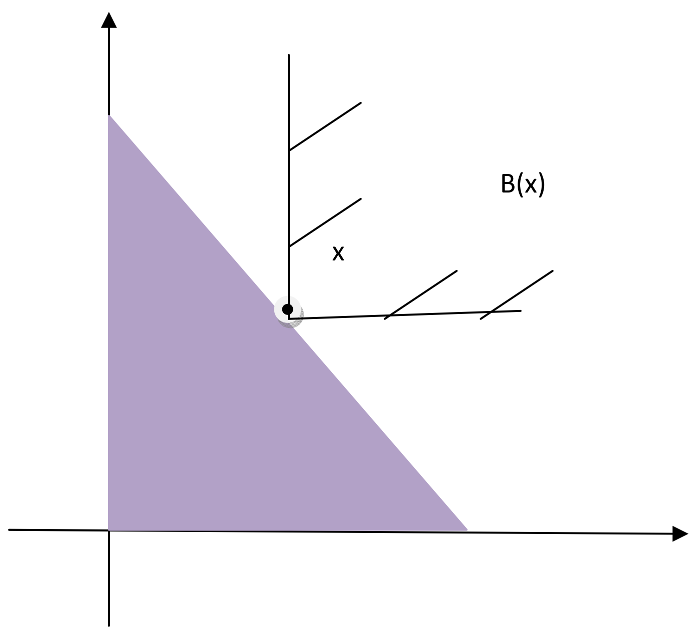
... כך שמתקיימת "השקה" במובן זה שניתן להפריד בין שתי הקבוצות – הרצויה והמצויה – ע"י קו ישר, אך לא במובן של שוויון שיפועים או יחסי נגזרות חלקיות.

ייתכן גם שיש פתרון אופטימלי שאינו מקיים את תנאי השוליות כאשר פונקצית התועלת אינה דיפרנציאבילית. למשל, לפונקציה

$$u\ (x_1, x_2) = \min\ (x_1, x_2)$$

אין נגזרות חלקיות לאורך האלכסון $x_1=x_2$, ודווקא בו נמצאות הנקודות האופטימליות (לכל הכנסה ולכל מחירים חיוביים). וכך יש נקודות אופטימום אך תנאי השוליות לא יזהה אותן. (במובן מסוים זה מקרה פחות מטעה, כי בבואנו לגזור את פונקצית התועלת מיד מתבהרת הבעיה, בשעה שבמקרה הקודם הנגזרות מוגדרות היטב בכל נקודה, אלא שיחסן אינו משתווה לשיפוע קו התקציב.)

ובאופן גראפי תראה הבעיה כך:



שימו לב שצרות אלו מוכרות לכם ממקסימיזציה של פונקציה במשתנה אחד. גם שם ייתכן שתנאי הסדר הראשון, $f'(x)=0$, אינו הכרחי מכיון שהפתרון מתקבל בנקודה קיצונית של התחום (למשל, הפונקציה $f(x)=x$ על הקטע $[0,1]$) או בנקודה של חוסר-גזירות (כמו הפונקציה $f(x)=-|x|$).

<u>יחידות</u>

לבסוף, נשאלת השאלה, האם הפתרון של בעית האופטימיזציה יחיד? רגע, למה זה חשוב בעצם? ראשית, אם הפתרון אינו יחיד,יכולת החיזוי שלנו מוגבלת: התיאוריה אינה אומרת לנו

בדיוק מה יבחר הצרכן. שנית, נראה שללא יחידות, הפתרון יהיה גם מאוד רגיש לתנאי הבעיה: שינוי קטן במחירים יוכל לגרום ל"קפיצה" בכמויות המבוקשות מהמוצרים. היינו, אנו עלולים לקבל פונקצית ביקוש לא רציפה, וזה כאב ראש נוסף, חלקית משום ששוב תהיה לנו יכולת חיזוי מוגבלת: טעות מדידה קטנה יכולה להיות מתורגמת לטעות גדולה בחיזוי.

לאור זאת, האין זה משמח לדעת שהפתרון יחיד, ואז גם תלוי ברציפות בתנאי הבעיה, אם לפחות **אחת** משתי הקבוצות (המצויה או הרצויה) קמורה ממש? אכן, שמחה גדולה. אלא מאי, שעל קבוצת התקציב קשה לסמוך: בדרך כלל אנו מגדירים אותה בפשטות ע"י אי-שוויון לינארי אחד, ולכם מתקבלת קבוצה מצויה קמורה, אך לא קמורה ממש: שתי נקודות על קו התקציב, שהן על "שפת" הקבוצה, מגדירות קטע שהוא גם על השפה, ולא ממש בתוכה. כך שמכאן לא תצמח הישועה.

נשים, אפוא, יהבנו על ההעדפות. מאוד מפתה להניח שהן פשוט קמורות ממש ובכך לפתור את כל בעיותינו. אך כאן מתעוררת בעיה. נניח שאני קונה עפרונות, ויש בחנות עפרונות אדומים וכחולים. מחירם זהה, ולי ממש לא אכפת מה צבע העפרון. עם זאת, מדובר במוצר שונה, בעל מספר קטלוגי קונה, ואכן יש לקוחות (ילדים בני שבע, למשל), שיגלו העדפות חזקות לצבע כזה או אחר. לכן, אי אפשר להניח שמדובר שאותו מוצר. ובכל זאת, פונקצית התועלת שלי תלויה רק במספר העפרונות הכולל שברשותי, והדבר נכון גם למגבלת התקציב שלי. למשל, בעית הצרכן שלי יכולה להיות

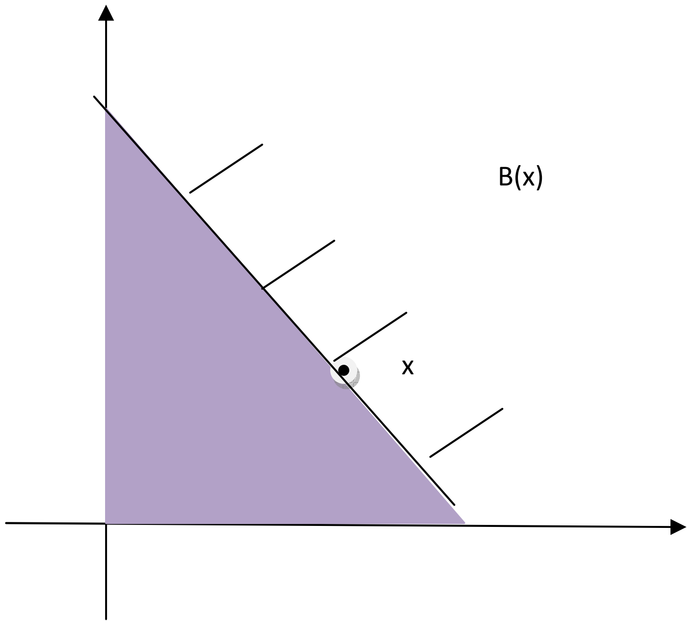
$$\text{Max } u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Subject to

$$x_1 + x_2 = I$$

ומסתבר שכל זוג (x_1, x_2) הנמצא על קו התקציב הוא פתרון אופטימלי.

ובאופן גראפי:



במקרה זה התיאוריה אכן לא יכולה לחזות כמה עפרונות כחולים וכמה אדומים אקנה. ואכן, מבחינתי היה ניתן לחשוב על משתנה אחד בלבד, נניח $x= x_1+x_2$, ולחשוב על הבעיה כמקסימיזציה של $u(x)=x$ בכפוף לתנאי $x=I$. אלא שיש צרכנים אחרים שמתייחסים להבדל בין המוצרים, ולא ניתן לבצע הצבה זו כשאנו בוחנים שיווי משקל במשק כולו. ומכיון שתמיד ייתכן שחלק מהצרכנים אדישים לחלק מתכונות המוצר ואחרים לא, תמיד ייתכן שלחלק מהצרכנים יש העדפות שהן קמורות רק במובן החלש.

שימו לב שאם בבעיה הנ"ל תשנו מעט את מחיר אחד המוצרים יתקבל פתרון יחיד (באחת מהפינות). ואז שינוי קטנטן במחיר יכול לגרום לקפיצה גדולה בכמות המבוקשת (משני המוצרים בו זמנית).

<u>דוגמה</u>

אחרי כל כך הרבה צרות ואנומליות, אולי נראה דוגמה אחת נורמלית וחביבה לעשות לנו טוב על הלב. ונבחר – איך לא – את פונקצית Cobb-Douglas שנראית כך:

$$u\ (x_1,\ x_2) = (x_1)^a\ \ (x_2)^b$$

עבור חזקות חיוביות $a,b>0$.

ניתן לבדוק שהבעיה קמורה, אך אנו נרוץ הלאה כאחוזי אמוק ונגזור את הפונקציה כשסע הזאב את הגדי. או, אם נצליח לשלוט בעצמנו, ניזכר שהפונקציה נתונה עד כדי טרנספורמציה מונוטונית, ובמקרה זה הלוגריתם הוא רעיון טוב, כי אז נקבל פונקציה סיכומית:

$$v(x_1, x_2) = \log [u(x_1, x_2)]$$

$$= \log [(x_1)^a (x_2)^b] = a \log(x_1) + b \log(x_2)$$

בעלת הנגזרות החלקיות החביבות

$$v_1 = a / x_1$$

$$v_2 = b / x_2$$

ואז שוויון היחסים בין הנגזרות החלקיות למחירים (על פני שני המוצרים)

$$v_1 / p_1 = v_2 / p_2$$

יתן

$$a / p_1x_1 = b / p_2x_2$$

או

$$p_1x_1 / p_2x_2 = a / b$$

ויחד עם מגבלת התקציב

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

נקבל

$$p_1x_1 = a/(a+b)\, I$$

$$p_2x_2 = b/(a+b)\, I$$

ולכן

$$x_1 = a/(a+b)\ (1/p_1)\ I$$

$$x_2 = b/(a+b)\ (1/p_2)\ I$$

וממשוואות אלו ניתן לגזור מסקנות מרחיקות לכת. למשל, מסתבר שפונקצית הביקוש של הצרכן לכל אחד מהמוצרים כפונקציה של מחירו של המוצר היא היפרבולית. והביקוש כפונקציה של ההכנסה (עקומת אנגל) המתקבלת כאן היא לינארית. ופונקציות הביקוש הצולבות (של מוצר אחד כפונקציה של מחירו של מוצר אחר) מתגלות במקרה זה כקבועות: הכמות המבוקשת ממוצר אחד אינה תלויה במחירו של המוצר השני. כל אלו הן תכונות יפות, אבל גם קצת מגבילות, ולכן טוב לדעת שיש פונקציות אחרות בעולם ויש גם חיים אחרי Cobb-Douglas. מכל מקום, לכל פונקצית תועלת אחרת שנבחר אופי החישוב יהיה דומה. ובהנחות הרגילות של מונוטוניות וקמירות זה תמיד יהיה רעיון טוב לנסות להצליב את תנאי השוליות עם מגבלת התקציב ולראות אם מתקבל פתרון בטווח הרלוונטי של המשתנים.

תרגילים: בשלב זה אתם אמורים להיות מסוגלים לפתור:

בעיות 6,7,8,9,10 בבחינה לדוגמה מס' 1

בעיות 6,7,8,9,10 בבחינה לדוגמה מס' 2

בעיות 8,9,10,12 בבחינה לדוגמה מס' 3

סיכום שיעור 7 ובו יסופר: איך נזיז עקומות ונגדיר עקומות חדשות

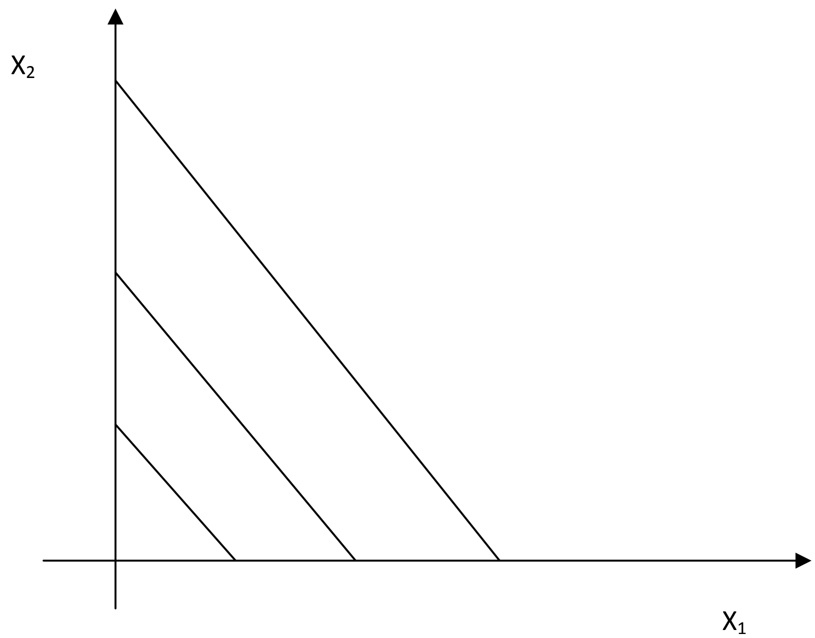
הגיעה השעה לקצת סטטיקה השוואתית. השם "סטטיקה" מרמז שהיא איננה דינמיקה. אנחנו מתעניינים מה יקרה אם נשנה תנאים מסוימים – בפרט, אם ישתנו מחירים או הכנסה. אבל אנחנו לא באמת מספרים סיפור דינמי, שאמור לפרט מתי ישים לב הצרכן לשינוי בתנאים, מתי ואיך ישנה את דפוסי התצרוכת שלו וכו'. במקום זאת, אנחנו קופצים מיד לנקודת האופטימום החדשה, ושואלים איך היא נראית ביחס לקודמת. נציין במאמר מוסגר, שקפיצת הדרך הזו מוצדקת במידה רבה במקרה של בעיות קמורות (העדפות קמורות וקבוצה אפשרית קמורה): במקרה זה, שיפורים קטנים ומקומיים יכולים להביא לאופטימום. ושיפורים קטנים יש לקוות שהצרכן מסוגל לעשות – פה ושם הוא שואל את עצמו אם לא ייטב לו אם יוציא שקל אחד פחות פה ושקל אחד יותר שם, ואגב כך הריהו משווה לכאורה נגזרות שוליות ומחירים. ואם יגיע לנקודה שבה אין שום שיפור מקומי אפשרי, תנאי ההשקה (בנוכחות הקמירות) מבטיח שזו אכן נקודה אופטימלית.

סוגי התרגילים שנתעניין בהם הם שינוי של פרמטר אחד כל פעם. "פרמטר" זה יכול להיות ההכנסה (ואז נניח שהמחירים קבועים) או אחד המחירים (ואז נניח שההכנסה וגם שאר המחירים קבועים). לאור שינוי שכזה, נתעניין בגורל הסל האופטימלי – מה קרה לכמות המבוקשת של כל אחד מהמוצרים. שימו לב שאם נשנה מחיר של מוצר אחד, נוכל לשאול גם מה קרה לכמות המבוקשת ממוצר זה וגם מה קרה לכמות המבוקשת ממוצרים אחרים. אז נתחיל?

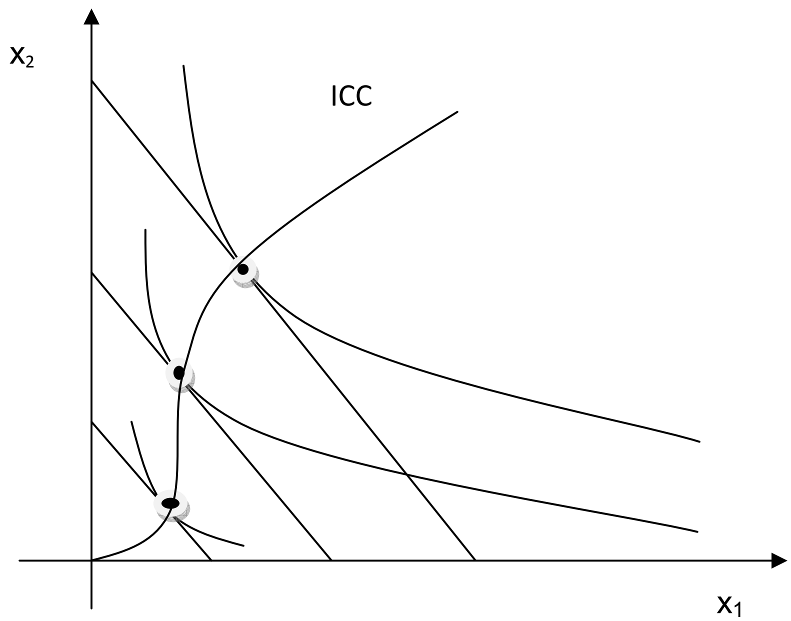
<u>שינוי ההכנסה</u>

כאשר משתנה ההכנסה, מגבלת התקציב זזה באופן מקבילי – יהיה לה אותו שיפוע (המוגדר ע"י יחס המחירים) אך היא תהיה גבוהה או נמוכה יותר, בתלות בשינוי בהכנסה.

בתיאור גרפי יראה השינוי כך:



לאורך כל אחד מקוי התקציב הנ"ל תהיה נקודה אופטימלית. נעשה לעצמנו חיים קלים ונניח שנקודה זו יחידה. הקו המחבר את כל הנקודות האופטימליות (כל אחת על מגבלת תקציב שונה) נקרא **עקומת הכנסה-תצרוכת** (ICC – Income Consumption Curve). עקומה זו מתארת את סלי התצרוכת המתאימים לרמות הכנסה שונות, כאשר המחירים נשארים קבועים. גובה ההכנסה אינו נראה בעקומה – ההכנסה היא הפרמטר המשתנה כאשר אנו מטיילים על העקומה, אך הגדלים שהיא מודדת הם כמויות של מוצרים בלבד.



נחשב עקומה זו במקרה של העדפות Cobb-Douglas, ונניח שכבר בחרנו להן ייצוג נוח:

$$u\ (x_1, x_2) = a \log(x_1) + b \log (x_2)$$

יתרה מזו, בלי הגבלת הכלליות אפשר גם להניח ש-

$$a + b = 1$$

(כי אפשר גם להכפיל את הפונקציה בקבוע חיובי שיבטיח "נרמול" זה). במצב זה a יהיה חלק התקציב המוצא על המוצר הראשון, ו- b=(1-a) יהיה חלק התקציב המוצא על המוצר השני. הכמויות המבוקשות הן

$$x_1 = a\ (1/p_1)\ I$$

$$x_2 = b\ (1/p_2)\ I$$

וקל לראות ששתיהן פונקציות לינאריות של ההכנסה, I. כמו-כן, היחס בין הכמויות הוא

$$x_1/x_2 = (a/b)(p_2/p_1)$$

-- גודל שאינו תלוי בהכנסה, I.

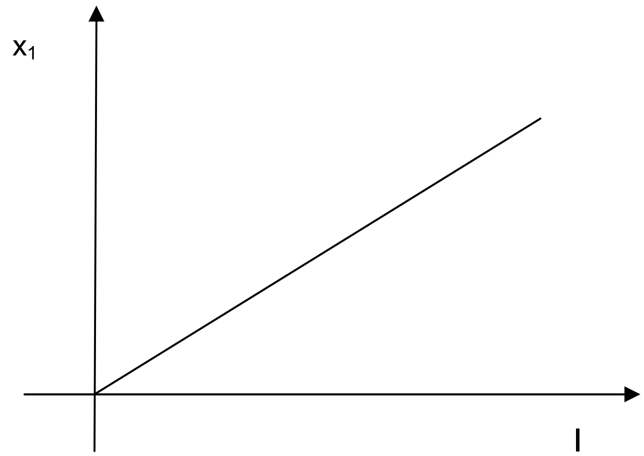
מסתבר שנקודות ההשקה של כל אחד מקווי התקציב עם עקומת האדישות המתאימה הן על קרן היוצאת מהראשית. זוהי תכונה של העדפות Cobb-Douglas, אך היא מופיעה גם בהעדפות אחרות. העדפות **הומוטטיות** הן כאלו שלאורך כל קרן היוצאת מהראשית, שיפוע עקומות האדישות הפוגעות באותה קרן הוא קבוע. העדפות כאלו נפוצות מאוד במודלים כלכליים. האם הפופולריות שלהן נובעת מכך שעשרות מחקרים פסיכולוגיים הוכיחו שכך מתנהגות העדפות הצרכן? לאו דוקא. אך הנוחות המתמטית היא בגדר הכרח בל יגונה. נראה בחיינו המקצועיים לא מעט העדפות הומוטטיות, וכדאי לזכור שלעתים יש יותר פנסים מאשר מפתחות. מכל מקום, עקומת ההכנסה-תצרוכת היא קרן היוצאת מהראשית עבור העדפות הומוטטיות, אך לא באופן יותר כללי.

לעתים נרצה לראות את הקשר בין ההכנסה לכמות המבוקשת באופן מפורש יותר, כאשר להכנסה יש ביטוי גיאומטרי נראה לעין. לצורך הענין אפשר להקדיש להכנסה ציר משלה, ולמען שמירה על שני מימדים צנועים, לוותר על ייצוג אחת הכמויות. כך נקבל את **עקומת אנגל**, המתארת את הביקוש למוצר מסוים כפונקציה של ההכנסה, כאשר כל המחירים נשארים קבועים. (הכמויות של המוצרים האחרים לרוב לא תשארנה קבועות, והן מוכתבות על-ידי הפתרון לבעית האופטימיזציה, אלא שאנו לא מציגים אותם באותו גרף.)

נצייר את עקומת אנגל עבור מוצר 1 במקרה של העדפות Cobb-Douglas: קיבלנו את הביטוי

$$x_1 = a\,(1/p_1)\,I$$

ומכאן שהכמות היא פונקציה לינארית של ההכנסה:



<u>גמישות הביקוש ביחס להכנסה</u>

כזכור, גמישות של משתנה אחד ביחס לאחר היא יחס בין שינויים יחסיים, או הנגזרת מחולקת ביחס המשתנים. יתרונה של הגמישות על פני הנגזרת, למשל, הוא שהיא אינה תלויה ביחידות המידה – מכיון שאנו משווים יחס בין שינויים יחסיים, יחידות המידה "מצטמצמות", ומתקבל גודל בעל משמעות כלכלית, כגון "שינוי של אחוז אחד ב- z גורר שינוי של 2 אחוזים ב- w."

כללית, הגמישות של w ביחס ל- z היא

$$\eta_{wz} = (dw/dz)/(w/z) = (dw/w)/(dz/z)$$

כאשר האות d מייצגת שינוי אינפיניטסימלי, וכך בצד שמאל יש לנו נגזרת במונה. (ואם יש משתנים נוספים באזור, מדובר בנגזרת החלקית למרות שהסימון עלול להיות מבלבל. דמיינו d עגלגל וחייכן יותר.)

הגמישות של w ביחס ל- z היא 1 (ז.א. 1+, למנוע בלבול) אם ורק אם מדובר בקשר לינארי (ללא חותך), ז.א. אם קיים מספר חיובי c כך ש

$$w = c*z$$

ומכיון שזהו אופי הקשר בין הכמות המבוקשת של מוצר 1 להכנסה בדוגמה שלנו, גמישות הביקוש ביחס להכנסה היא 1.

כמובן, זה יהיה גם המצב בנוגע למוצר השני, מטעמי סימטריה. אך למעשה אנחנו יכולים להגיע למסקנה זו משיקול נוסף: אם למוצר אחד מתוך שניים יש גמישות הכנסה 1, זהו המצב גם למוצר השני. דבר זה נכון לא רק להעדפות Cobb-Douglas ולא רק כאשר גמישויות ההכנסה הן קבועות: אפילו אם השוויון הראשון מתקיים רק בסל מסוים, גם השוויון השני יתקיים לאותו סל. מדוע?

הסיבה למעשה פשוטה בתכלית: אנו מתחילים ממשוואת התקציב

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

וגוזרים אותה לפי ההכנסה, I, ומקבלים

$$p_1(dx_1/dI) + p_2(dx_2/dI) = 1 \qquad (*)$$

כדי להתקרב לביטוי הגמישות, נשים לב ש-

$$p_1(dx_1/dI) = (p_1x_1/I) * [(dx_1/dI)/(x_1/I)] = (p_1x_1/I) * \eta_{x1I}$$

נסמן את סך ההוצאה על מוצר 1 ב-

$$E_1 = p_1x_1$$

ואת חלק התקציב המוצא על מוצר 1 ב-

$$e_1 = E_1/I$$

וכך קיבלנו

$$p_1(dx_1/dI) = e_1 * \eta_{x1I}$$

ולאחר חישוב דומה למוצר 2, נחזור ונרשום את (*) כ-

$$e_1 * \eta_{x1I} + e_2 * \eta_{x2I} = 1$$

ומכיון ש

$$e_1 + e_2 = 1$$

מסתבר שממוצע משוקלל של גמישויות ההכנסה (ז.א. גמישות הביקוש לכל מוצר ביחס להכנסה) הוא 1. כך שלא ייתכן ששתיהן גבוהות מ-1 או ששתיהן נמוכות מ-1, ואם האחת שווה ל-1, חזקה על השניה שאף היא שווה ל-1. (מסקנה זו תהיה נכונה גם עם מספר מוצרים גדול מ-2, אך איכשהו היא תישמע פחות מפתיעה: אם כל המוצרים פרט, אולי, לאחד, הם בעלי גמישות הכנסה יחידתית, אזי כך גם האחרון.)

למסקנה זו יש אינטואיציה כלכלית פשוטה: כספו של הצרכן יוצא, בסופו של דבר, על המוצרים (בהנחת המונוטוניות, כמובן). אם גידול של, נניח, 1% בהכנסה גורר גידול של 1% בכמות המבוקשת ממוצר 1, הרי שגם ההוצאה על מוצר 1 תעלה ב- 1% (שהרי המחירים לא השתנו). על מה תוצא שאר תוספת התקציב? על מוצר 2, כמובן. אבל הסכום שנשאר – 1% מההכנסה פחות 1% מההוצאה על מוצר 1 – הוא בדיוק 1% מההוצאה על מוצר 2. ועתה, שוב מכיון שהמחירים לא השתנו, עליה של 1% בהוצאה על מוצר 2 משמעותה הגדלת הכמות המבוקשת ממוצר 2 ב- 1%.

כזכור, אנו מבחינים ביו מוצרים שהביקוש להם עולה עם עליית ההכנסה, הנקראים מוצרים **נורמליים**, לבין מוצרים שהביקוש להם יורד, הנקראים מוצרים **נחותים**, כאשר המינוח "נייטרלי" מתאר מוצר שהביקוש לו אינו תלוי בהכנסה. (כמובן, ניטרליות או נחיתות אפשריות רק בתחומים מסוימים של ההכנסה – בסופו של דבר, כשההכנסה שואפת לאפס, הכמויות המבוקשות תשאפנה לאפס אף הן. ולכן, מוצר שנצרך בכמות חיובית ברמת הכנסה מסוימת חייב להתנהג כמו מוצר נורמלי בטווחים מסוימים של ההכנסה.) כיוון השינוי בתצרוכת מתבטא בסימנה של הגמישות: נורמליות מגדירה גמישות חיובית, ניטרליות – גמישות אפסית, ונחיתות – גמישות שלילית.

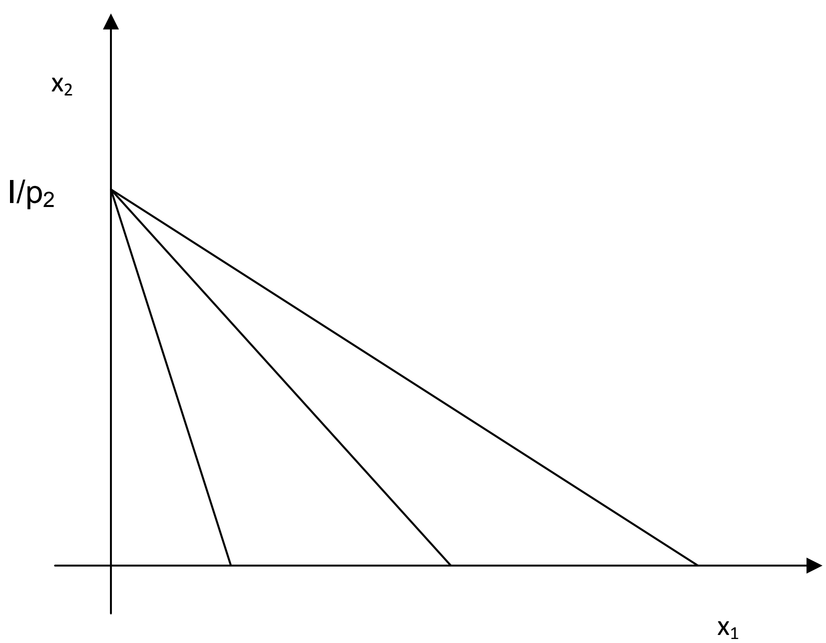
הדיון לעיל מצביע על הערך 1 כעוד ערך מעניין על סקאלת הגמישות. מכיון שממוצע גמישויות ההכנסה הוא 1, נוכל לתהות לאילו מוצרים הוא מעל 1 ולאילו – מתחת. מה נוכל לומר על מוצר שגמישות ההכנסה שלו גבוהה מ-1, ומה יקרה אם הגמישות נמוכה מ-1?

נניח שיש רק שני מוצרים – לחם וטיולים לחו"ל. אם גמישות האחד גבוהה מ-1, ואזי גמישות השני נמוכה מ-1, מי לדעתכם יהיה בעל הגמישות הגבוהה? ובכן, יש להניח שכאשר ההכנסה מוכפלת (עולה ב- 100%), כמות הלחם שאדם יצרוך לא תגדל פי 2. לעומת זאת, ייתכן שסוף-סוף יוכל להרשות לעצמו טיול עליו חלם שנים הרבה, כך שמספר הטיולים יעלה מ-0 ל- 1, "פי

אינסוף". רוצה לומר: מוצר הכרחי, כמו לחם, נצרך גם ברמות הכנסה נמוכות, אך, מאידך גיסא, כמותו לא תגדל באופן פרופורציוני להכנסה. מותר מותרות, לעומת זאת, יופיע בכמות חיובית רק לאחר שמוצרים ההכרחיים כבר מסופקים ברמה מסוימת, ויקבל חלק גדול יותר מתוספת ההכנסה. לאור זאת, אנו מגדירים **מוצרי מותרות** כמוצרים שגמישות ההכנסה שלהם גדולה מ-1, ומוצרים **בסיסיים** (או **הכרחיים**) כמוצרים שגמישות ההכנסה שלהם קטנה מ-1 (כולל מוצרים נייטרליים ונחותים).

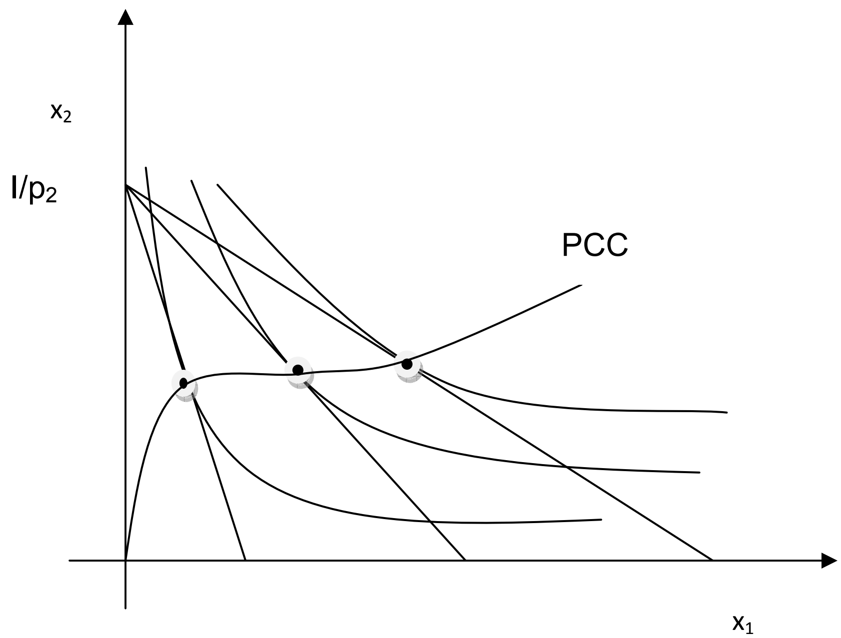
<u>שינוי מחיר</u>

נניח כעת שהשתנה מחירו של מוצר 1, ונשאיר את ההכנסה ואת מחיר המוצר השני קבועים. גם כעת יהיה קו תקציב שונה לכל רמת מחיר, אלא שהפעם קווי התקציב השונים אינם מקבילים: שיפוע הקו, הלוא הוא יחס המחירים, כאשר משתנה רק אחד מהמחירים משתנה. ובכל זאת, יהיה קצת סדר בבלגן: אם אנו משנים רק את מחירו של מוצר 1, הרי שכל קווי התקציב המתקבלים נפגשים באותה נקודה על ציר x_2. זאת מכיון שאם הצרכן מוציא את כל הכנסתו על מוצר 2 בלבד, הרי שהשינוי במחירו של מוצר 1 אינו משפיע על הכמות אותה הוא יכול לצרוך – זו נשארת I/p_2, גודל שאינו תלוי ב- p_1:

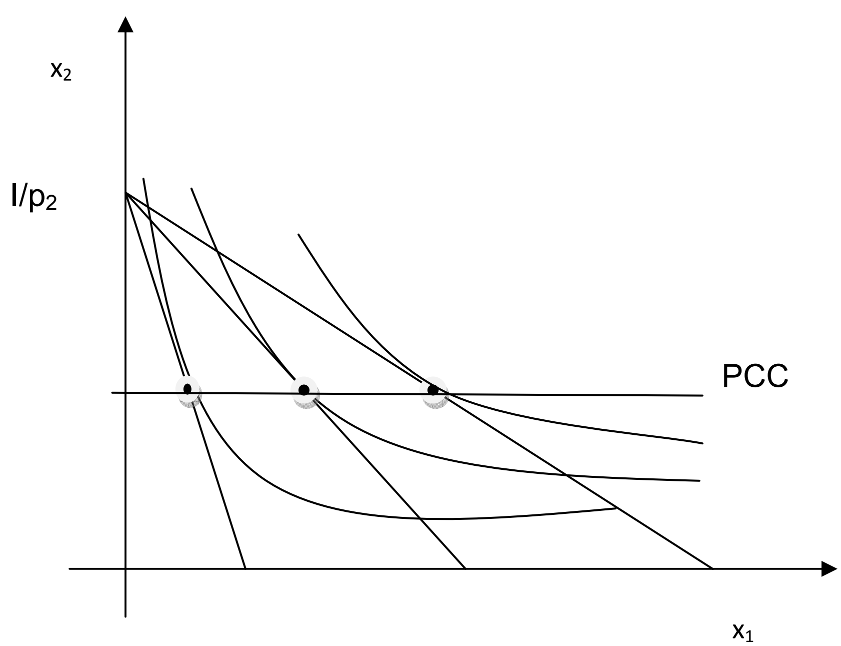


וכך קווי התקציב משנים את שיפועם – כאשר המחיר של מוצר 1 שואף לאינסוף, קו התקציב שואף להיות אנכי, וכאשר מחיר זה שואף לאפס, הקו שואף להיות אופקי. על כל קו תקציב כזה תהיה נקודה אופטימלית (בהנחות המקובלות), ואם נחבר את כל הנקודות הללו נקבל את

עקומת מחיר-תצרוכת (PCC – Price Consumption Curve). כמו במקרה של עקומת ההכנסה-תצרוכת, גם כאן אנו חיים במרחב המוצרים והגדלים הנראים לעין הם כמויות של המוצרים, בשעה שהמחיר הוא הפרמטר המשתנה כאשר אנו מטיילים על העקומה.



ובמקרה של פונקצית Cobb-Douglas, עקומה זו מקבלת צורה פשוטה: מכיון שההוצאה על כל מוצר היא קבועה (תלויה רק בהכנסה, I, ובפרמטרים של ההעדפות a,b, אך לא במחירים), שינוי במחיר של המוצר הראשון אינו משפיע על הכמות המבוקשת מהמוצר השני:



גם עבור שינוי במחיר נרצה לראות את הקשר בין המחיר לכמות המבוקשת באופן ישיר יותר, ולשם כך נצייר את עקומת הביקוש. יש להיזהר במינוח רב משמעי זה, משתי סיבות:

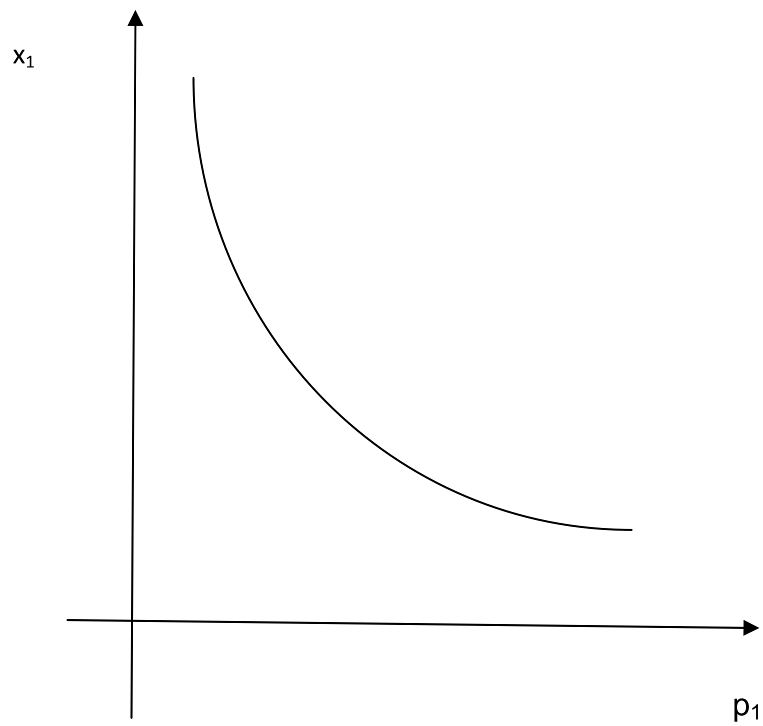
- ראשית, קיימות מספר עקומות ביקוש: עקומת הביקוש עצמית, המתארת את השינוי בכמות המוצר המבוקשת כפונקציה של המחיר של אותו מוצר, וגם עקומת ביקוש צולבת, המתארת את השינוי בכמות המוצר המבוקשת כפונקציה של מחירו של מוצר אחר;

- עקומת הביקוש מתארת את הכמות כפונקציה של המחיר, אך אנו רגילים להסתכל על עקומת הביקוש ההופכית, המתארת את הכמות על הציר האופקי ואת המחיר על האנכי. הסיבה היא היסטורית, כנראה: בשווקים חקלאיים בימים עברו היו מגיעים חקלאים עם תוצרתם שנגזר עליה להימכר באותו יום. הכמות היתה, לכן, קבועה, והמחיר היה מתאים את עצמו. גם כיום ניתן לחשוב על שווקים כאלה. עם זאת, לענייננו חשוב שהכמות שאנו מדברים בה היא הכמות המבוקשת ע"י צרכן מסוים, וצרכן זה מניח שהוא אינו משפיע על המחיר, כי הביקוש שלו זניח. אנו כרגע לא קובעים את מחיר המוצרים בשיווי משקל, אלא רק מנסים לנסח את הביקוש של הצרכן, ולצורך זה לתאר איך הוא חושב על הבעיה. הניתוח שלנו מניח שהצרכן אינו מאמין שהוא יכול להשפיע על המחירים ע"י החלטת התצרוכת שלו, ולכן לצורך חלק זה בפאזל – קביעת הביקוש של הצרכן – המחיר נתון והכמות המבוקשת נקבעת בהתאם לו. לסיכום, לעתים אנו מציירים את עקומת הביקוש כפי שאנו חושבים עליה – כאשר המחיר (כמשתנה של הפונקציה) מופיע על הציר האופקי, והכמות (כערך הפונקציה) על האנכי, ולעתים להיפך – ואז אנו קוראים לעקומה עקומת הביקוש ההופכית.

ובמקרה של Cobb-Douglas נקבל עקומת ביקוש שהיא היפרבולה, מכיון שהביקוש ניתן ע"י

$$x_1 = a\,(1/p_1)\,I$$

ובגרף:



גמישות הביקוש ביחס למחיר

במקרה של העדפות Cobb Douglas, נקבל שגמישות הביקוש ביחס למחיר (העצמי) היא 1- .
כללית, כאשר יש קשר בין שני משתנים, w ו- z הנתון ע"י

$$w = c / z$$

נקבל

$$dw/dz = - c (1/z^2)$$

וגם

$$w/z = c (1/z^2)$$

כך ש-

$$(dw/dz)/(w/z) = -1$$

הווה אומר: גמישות w ביחס ל-z היא (-1) – וזה המצב לגבי הביקוש למוצר ביחס למחירו בדוגמה שלנו.

מה בדבר עקומת הביקוש הצולבת וגמישותה? כפי שראינו לעיל, לא יהיה עניין רב בעקומת הביקוש הצולבת במקרה של העדפות Cobb-Douglas, מכיון שפונקציה זו היא קבועה: הכמות המבוקשת ממוצר 2 אינה תלויה במחירו של מוצר 1. ולכן גמישות הביקוש הצולבת היא אפס: שינוי של, למשל, אחוז, במחיר (של מוצר 1) גורר שינוי של 0% בכמות המבוקשת (ממוצר 2).

באופן כללי יותר יש קשר מעניין גם בין גמישויות הביקושים השונים ביחס למחיר נתון. נחזור אל מגבלת התקציב

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

והפעם נגזור אותה לפי מחירו של מוצר 1, p_1. יש לזכור כי, עקרונית, הן x_1 והן x_2 הם פונקציות של המשתנה p_1 (וגם של האחרים, אך אלה כרגע מוחזקים קבועים). לכן הביטוי p_1x_1 הוא מכפלה של שתי פונקציות של p_1: הוא עצמו, ו- x_1. לעומת זאת, במחובר השני, p_2x_2, רק x_2 הוא פונקציה של p_1. לבסוף, ההכנסה I היא פרמטר נפרד שאינו תלוי ב- p_1 ולכן $dI/dp_1=0$.

נקבל, אפוא,

$$x_1 + p_1(dx_1/dp_1) + p_2(dx_2/dp_1) = 0 \qquad (**)$$

ושוב ננסה להתקרב לביטויי הגמישויות:

$$p_1(dx_1/dp_1) = x_1 * (dx_1/dp_1)/(x_1/p_1) = x_1 * \eta_{x1p1}$$

ו -

$$p_2(dx_2/dp_1) = p_2 * (x_2/p_1) * [(dx_2/dp_1)/(x_2/p_1)] =$$

$$x_1 * (p_2x_2/p_1x_1) [(dx_2/dp_1)/(x_2/p_1)] = x_1 * (E_2/E_1) * \eta_{x2p1}$$

כאשר סך ההוצאה על מוצר i=1,2 מסומנת ב-

$$E_i = p_i x_i$$

וכך מתקבל מ- (**)

$$x_1 + p_1(dx_1/dp_1) + p_2(dx_2/dp_1) =$$

$$x_1 + x_1 * \eta_{x1p1} + x_1 * (E_2/E_1) * \eta_{x2p1} = 0$$

ואם אנחנו בפתרון פנימי (לא פינתי), שבו שני המוצרים נצרכים בכמויות חיוביות, אפשר לצמצם ב- x_1 ולקבל

$$1 + \eta_{x1p1} + (E_2/E_1) * \eta_{x2p1} = 0$$

או

$$\eta_{x1p1} + (E_2/E_1) * \eta_{x2p1} = -1$$

ומסתבר שכאשר יש רק שני מוצרים, שכל אימת שגמישות הביקוש העצמית של מוצר 1 היא (-1), גמישות הביקוש הצולבת של המוצר השני היא אפס. לעובדה זו יש הסבר כלכלי פשוט: גמישות ביקוש יחידתית (ושלילית, היינו, גמישות של 1-) אומרת, בקירוב, ששינוי של אחוז במחיר יגרור שינוי של אחוז בכמות המבוקשת (בכיוון ההפוך: עליית המחיר תגרור ירידה בכמות ולהיפך). אם כך, סך ההוצאה על המוצר לא ישתנה. מכיון שההכנסה לא השתנתה, יתרת ההכנסה שאפשר להוציא על המוצר השני לא תשתנה. לבסוף, מכיון שמחירו של המוצר השני לא השתנה, אזי אותו סכום המוצא עליו מתורגם לאותה כמות כמקודם.

תרגילים: בשלב זה אתם אמורים להיות מסוגלים לפתור:

בעיה 11 בבחינה לדוגמה מס' 1

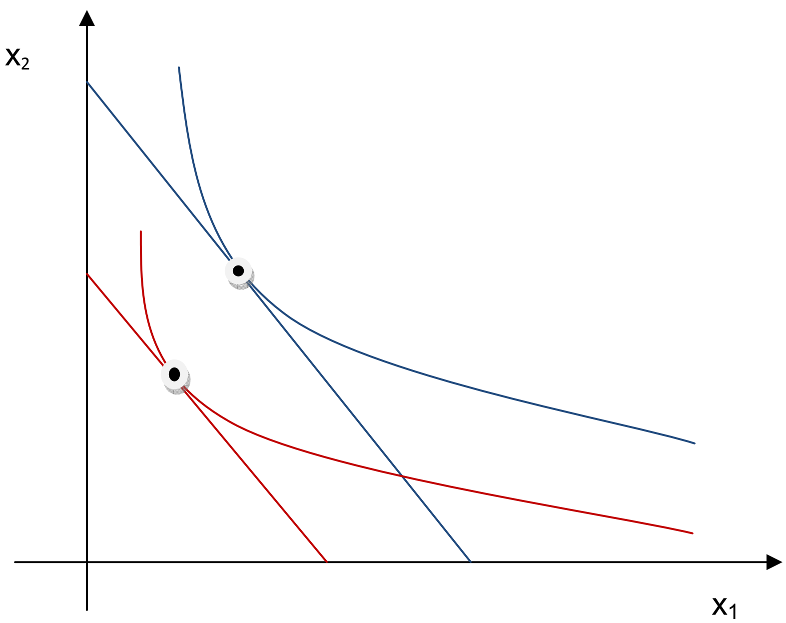
בעיות 11,12 בבחינה לדוגמה מס' 2

בעיות 11,13 בבחינה לדוגמה מס' 3

סיכום שיעור 8 ובו יסופר: מה באמת קורה כאשר מחיר משתנה

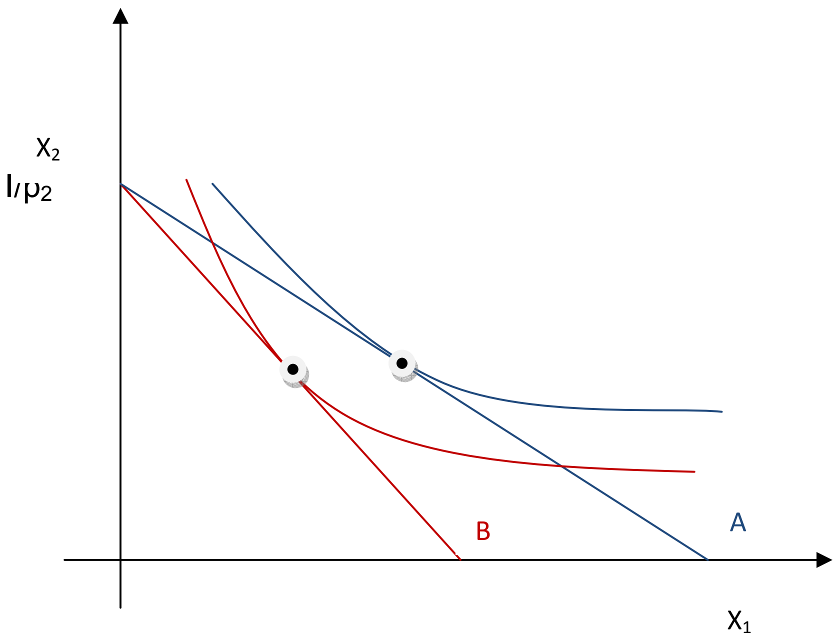
ראינו לעיל כיצד משפיעים מחירים על הביקוש למוצרים, ציירנו גם עקומת מחיר-תצרוכת וגם עקומות ביקוש, ולפיכך נראה שאנחנו יודעים כבר הכל. ובכל זאת, יש מה ללמוד מעיון טיפה מדוקדק יותר בשינויים הנוצרים משינוי מחיר(ים).

לשם השוואה נתחיל בשינוי הכנסה, שבו אין הסיפור כל כך מעניין. כבר ציירנו את עקומת ההכנסה-תצרוכת (ICC), המחברת נקודות אופטימליות על קווי תקציב שונים אך מקבילים:



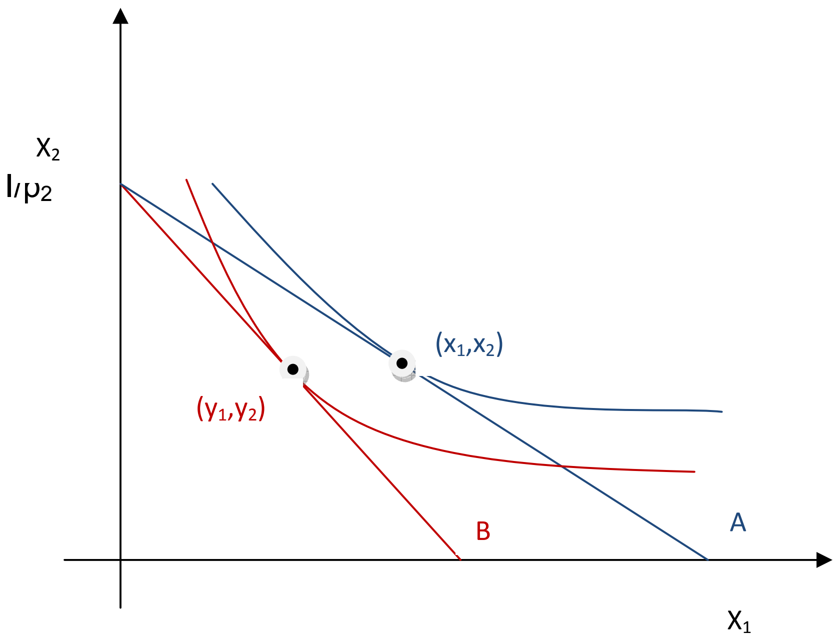
הסיפור הוא יחסית פשוט, מכיון ששני קווי התקציב זהים בשיפועם ונבדלים רק בגובהם. לכן ברור לנו מה יכול לגרום להבדלים בין הנקודות האופטימליות: גובה קו התקציב, היינו ההכנסה.

לעומת זאת, כשאנו דנים בשינוי מחיר, למשל של מוצר 1, מתקבל גרף מעין זה:

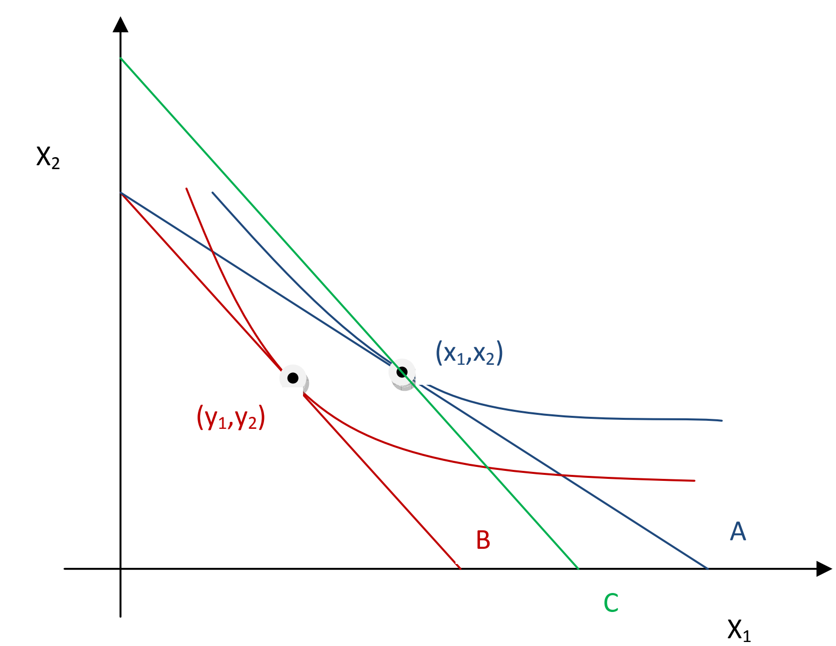


ושני קווי התקציב נבדלים בשיפועיהם. האם הם נבדלים ב"גובהם"? ובכן, קשה לומר. ה"גובה" מוגדר היטב (פחות או יותר) למערכת קווים מקבילים, אך כאשר הקווים אינם מקבילים כבר לא כל כך ברור מי גבוה ממי ובכמה. במקרה דנן, קו A נראה "מעל" קו B, כי בכל הרביע האי-שלילי הוא אכן גבוה יותר. אך בכמה? הרי הקווים נפגשים בנקודה $(0,I/p_2)$ – כך שבנקודה זו הפרש הגבהים ביניהם הוא אפס. נראה סביר להגדיר את הפרש הגובה באחת מהנקודות האופטימליות, שהרי אלו תיבחרנה בסופו של דבר. ואם נתמקד באחת מהן, נראה שיש לנו שני אפקטים הנובעים משינוי המחיר – שינוי יחסי המחירים, המתבטא בשינוי השיפוע של הקו, ושינוי ההכנסה האפקטיבית, המתבטא בשינוי גובה הקו. הבה ננסה להבין אפקטים אלה טוב יותר.

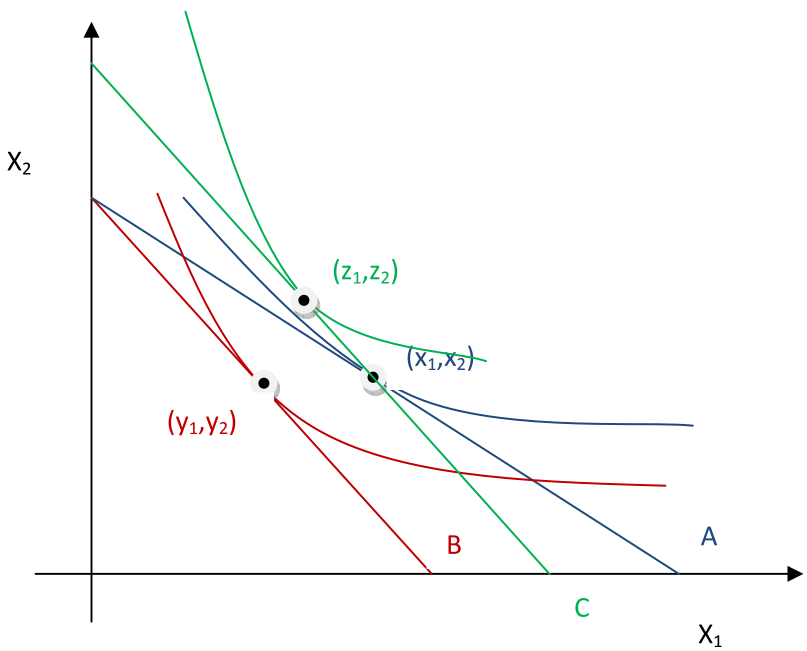
לצורך הענין, נניח שקו A הוא המקורי, עם נקודה אופטימלית (x_1,x_2), ושלאחר עליית מחירו של מוצר 1, עברנו לקו B, ועליו הנקודה האופטימלית (y_1,y_2).



נתמקד בשינוי במוצר 1, שמחירו השתנה. כדי להבין בעקבות מה השתנה x_1 ל- y_1, נגדיר ראשית את **אפקט התחלופה**. זהו השינוי בכמות המבוקשת של מוצר 1, שהיה נגרם אילו השינוי במחיר מוצר 1 היה מלווה בשינוי בהכנסה, שהיה משאיר את הנקודה (x_1,x_2) על קו התקציב. הווה אומר: נעביר דרך הנקודה המקורית (x_1,x_2) קו תקציב היפותטי, C, בעל השיפוע של קו התקציב החדש, B:



קו היפותטי זה, C, עובר דרך הנקודה המקורית (x_1,x_2), אך זו אינה בהכרח אופטימלית עבור קו זה. נהפוך הוא: יש לצפות שלא תהיה אופטימלית. אם העדפות הצרכן קמורות ממש, והנקודה המקורית היתה פתרון פנימי (לא נקודת קיצון), אזי "סיבוב" קו התקציב "סביב" הנקודה המקורית (x_1,x_2) יגרום לכך שהקו יחתוך את עקומת האדישות (שהשיקה לקו המקורי A). חיתוך זה יגרום לכך שנקבל את האופטימום החדש בנקודה שונה, נניח (z_1,z_2). נקודה זו תהיה על עקומת אדישות גבוהה יותר, מכיון שקו התקציב ההיפותטי C חותך את העקומה המקורית:



ואני יודע שהמרחק בין עקומות האדישות נראה טפשי וקטנוני, אבל בואו נדמיין שהוא גדול וחשוב. הנקודה המרכזית היא שאפקט התחלופה "נטו" הוא רק ההבדל בין z_1 ל- x_1. אפקט זה הוא שלילי: העלאת מחירו של מוצר 1 גורמת לכך שהצרכן ירצה פחות ממנו, או אולי אותה כמות בדיוק (למשל, אם לעקומות האדישות יש "שפיצים") – אך לא יותר ממנו. עובדה זו אמורה להיות ברורה מהגרף: "סיבוב" קו התקציב סביב הנקודה המקורית, כך שיהיה תלול יותר יכול לגרום לכך שכמות מוצר 1 תרד או תישאר קבועה, אך לא תעלה. (כל זאת בהנחות הרגילות של מונוטוניות וקמירות.) השינוי הנוסף שחל – הלוא הוא המעבר מכמות מבוקשת z_1 לכמות y_1 – היא תוצאה של העובדה שאיננו נמצאים על קו C (שהיה היפותטי, כזכור) אלא על הקו B (שהוא המציאות העגומה שיצרה עליית מחירו של מוצר 1). אך ההבדל בין שני קוים אלה הוא

רק בגובה ולא בשיפוע – הן קו B והן קו C צוירו לפי המחירים החדשים. כך שההפרש בין הכמויות z_1 ל- y_1 נובע אך ורק מ**אפקט הכנסה**.

וכך ניתן לרשום:

$$y_1 - x_1 = (z_1 - x_1) + (y_1 - z_1)$$

אפקט הכנסה + אפקט תחלופה = סך השינוי בכמות המבוקשת

זאת אומרת, אנו מפרקים את סך השינוי בכמות המבוקשת ממוצר 1, כתוצאה מהשינוי במחירו, לאפקט תחלופה, המודד את ההשפעה "נטו" של שינוי יחס המחירים בנקודה המקורית (x_1,x_2), ולאפקט הכנסה, המודד את ההשפעה "נטו" של שינוי המחירים על ההכנסה האפקטיבית של הצרכן, והשפעת שינוי הכנסה זה על הכמות המבוקשת: מכיון שהנקודה המקורית, (x_1,x_2), נמצאת מחוץ לקו התקציב החדש, B, הצרכן מרגיש עני יותר, משל היתה הכנסתו יורדת (ואכן, הכנסתו הריאלית ירדה).

באופן דומה, אם מחירו של מוצר 1 יורד, יתקבל אפקט הכנסה חיובי: הצרכן ירגיש עשיר יותר, ויגלה שהסל שהיה אופטימלי עבורו נמצא כעת בתוך מגבלת התקציב (ולא על קו התקציב החדש). במקביל, יהיה גם אפקט תחלופה: מוצר 1 זול יותר בהשוואה למוצר 2 מאשר קודם לכן, ועובדה זו מעודדת את הצרכן לצרוך יותר ממוצר 1 ופחות מ-2. קיצורו של דבר, גם כאשר יורד מחירו של מוצר 1 ניתן יהיה לפרק את ההשפעה על הכמות המבוקשת כדלעיל, לאפקט תחלופה ואפקט הכנסה.

מהם סימניהם של אפקטים אלה? כאמור, אפקט התחלופה לא יהיה חיובי בהנחות הרגילות (של קמירות ומונוטוניות): אם המחיר של מוצר 1 עולה, אפקט התחלופה לא יגרום לצרכן לבקש כמות גדולה יותר של מוצר זה (ואם מחירו של המוצר ירד, אפקט התחלופה לא יגרום להקטנת הכמות.) יתרה מזו, אם התחלנו עם פתרון פנימי ומתקיימת קמירות חזקה של העדפות הצרכן, אפקט התחלופה יהיה שלילי ממש. מה בדבר אפקט ההכנסה? האם הכמות המבוקשת ממוצר 1 תעלה או תרד כתוצאה מירידה בהכנסה? התשובה היא, כמו לעתים קרובות מדי, תלוי. אם המוצר נורמלי, הרי שירידת ההכנסה תגרום לירידה בביקוש. ואם המוצר נחות, ירידת ההכנסה תעלה את הביקוש, ולבסוף, ירידת ההכנסה לא תשפיע על הביקוש ממוצר נייטרלי. ולכן אפקט ההכנסה יכול להיות חיובי, שלילי, או אפס.

מה יהיה סימן השינוי הכולל? ובכן, עבור מוצר נורמלי אין קושי רב לקבוע סימן זה, מכיון ששני האפקטים פועלים באותו כיוון: אם מחיר המוצר עולה, אפקט התחלופה גורם לצרכן לבקש פחות (או לפחות לא יותר) מהמוצר, וכך גם אפקט ההכנסה. ולכן הכמות המבוקשת תרד. ובדיוק ההפך יקרה אם המחיר ירד: אפקט התחלופה ואפקט ההכנסה שניהם יצביעו על כך שהכמות המבוקשת צריכה לעלות. דבר דומה יקרה למוצר נייטרלי, שבו אפקט התחלופה ישחק לבדו בזירה. לגבי מוצר נחות, לעומת זאת, האפקטים יפעלו בכיוונים הפוכים: אם המחיר עולה, אפקט התחלופה יפעל להקטנה הכמות המבוקשת מהמוצר, אך ירידת ההכנסה האפקטיבית עבור מוצר נחות תתורגם <u>לעליה</u> בכמות המבוקשת. והמצב יתהפך עבור עליה במחיר.

מי ינצח? בדרך כלל אנו מצפים שאפקט התחלופה ינצח, כי העובדה האמפירית היא שאין כמעט מקרים שבהם עליה במחירו של מוצר מסוים גורמת לעליה בביקוש לאותו מוצר. הדבר אפשרי, ומוצרים כאלה נקראים **מוצרי גיפן (Giffen)** ע"ש הכלכלן שניתח את התופעה. מקובל לחשוב שהדוגמה הפחות-או-יותר יחידה של מוצר גיפן היא תפוחי אדמה באירלנד באמצע המאה ה-19, אך אמונה זו הועמדה בספק: הן מכיון שיש הטוענים שתפוחי האדמה המפורסמים לא היו מוצרי גיפן למרות הכל, והן משום שיש הטוענים שיש גם היום מוצרי גיפן אחרים (כמו אורז בחלקים מסוימים של סין). בקיצור, קשה לקבוע משהו בוודאות לגבי המציאות והעולם בודאי היה יפה יותר בלעדיה. אך הרעיון, אני מקווה, ברור.

(ואם לחזור על הערה שבודאי כבר שמעתם: כשאנו מדברים על מוצר גיפן אנו לא מתכוונים למוצרי ראווה, שבהם הביקוש יכול לעלות כתוצאה מעליית המחיר, אך התצרוכת האמיתית היא של האיתות החברתי, ולא של המוצר עצמו. כמו-כן, אנו לא כוללים בתופעה מקרים של אי ודאות, שבהם המחיר מאותת על איכות, ומחיר נמוך מדי יכול לגרום לביקוש נמוך מכיון שהצרכנים חושדים באיכות. הכוונה במוצרי גיפן למוצרים שתועלתם ידועה ואינה תלויה בסביבה החברתית.)

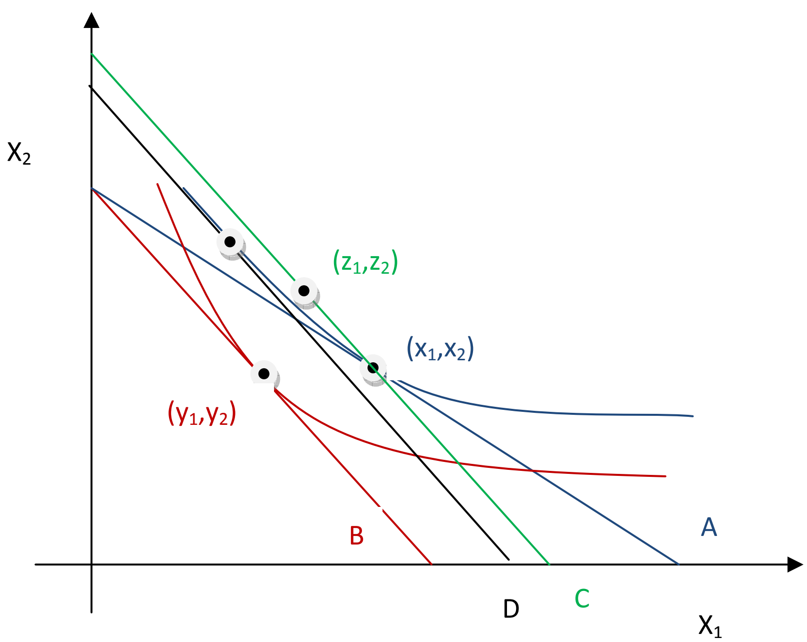
<u>פיצויי סלוצקי והיקס</u>

נניח כי ועד עובדים מנהל מו"מ עם הנהלת החברה על תוספת שכר שנועדה לפצות את העובדים על עליית מחירים. לצורך הענין, נניח שעלה מחירו של מוצר 1 ומוצר 2 נשאר במחירו הקודם. על פניו, זה נשמע הגיוני שהועד ידרוש העלאת שכר שתאפשר לעובדים לחזור ולצרוך את הסל

שנהגו לצרוך לפני עליית המחיר. תוספת הכנסה כזו, שתאפשר לצרוך אותו סל אך לא שום סל יקר ממנו, נקראת **פיצוי סלוצקי**.

הנהלת החברה יכולה לשלוף את הגרפים שלעיל, ולטעון שפיצוי סלוצקי בעצם יהיה פיצוי-יתר: פיצוי כזה הריהו בדיוק העלאת קו התקציב החדש, B, לקו התקציב C, שהיה היפותטי בניתוח לעיל אך יהפך למציאות אם יקבל ועד העובדים את תביעותיו. ומדוע יהיה זה פיצוי יתר? מכיון שאם אכן יתקבל פיצוי זה, אין סיבה שהעובדים יחזרו לצרוך את הסלים שצרכו בעבר. נתבונן בעובד מסוים, שהיה על קו התקציב שלו בנקודה (x_1,x_2). בהינתן קו התקציב C, אין סיבה שהעובד יחזור לאותה נקודה: הוא יעדיף לצרוך את הסל האופטימלי על קו C, הלוא הוא (z_1,z_2). וסל זה נמצא על עקומת אדישות <u>גבוהה</u> מאשר הסל המקורי. כך שאם ההנהלה תבטיח שאכן הסל הקודם אפשרי גם כעת, העובד ימצא את עצמו במצב טוב יותר מאשר לפני העלאת המחירים.

כנגד זאת, יכולה ההנהלה להעלות את רעיון **פיצוי היקס**, לפיו תועלה ההכנסה עד אשר תשיק לאותה עקומת אדישות עליה היה הצרכן לפני ההעלאה:



ולפיכך, כדי להשיב את העובדים לאותה רמת רווחה בה הם היו, נחוצה העלאת שכר נמוכה יותר מאשר ההעלאה הנחוצה כדי לאפשר להם לצרוך אותו סל שצרכו בעבר.

במציאות קשה מאוד לחשב פיצויי היקס. איננו רואים את פונקצית התועלת, ונסיונות למדוד אותה בעקיפין נוטים להיות תלויים במגוון הנחות. כמו-כן, נסיון למדוד את הפונקציה ע"י שאלונים יוצר בעיות תמריצים: אדם, היודע למה ישמשו תשובותיו וכיצד ינותחו, עומד בפני הפיתוי לתת תשובות שיובילו לפיצוי גדול יותר. לא נרחיב את הדיבור על נושאים אלה כאן, אך עוד תשמעו עליהם בהמשך הלימודים. לצרכינו נסתפק בהכרה שלא כל כך פשוט לדעת מהי פונקצית התועלת של אדם.

ומדוע בכל זאת אנחנו מזכירים את פיצוי היקס? מכיון שמסתתר מאחוריו מסר כללי וחשוב: כאשר אנו מנסים לתכנן מערכת כלכלית, יש לזכור שאנחנו יכולים לתכנן רק את תנאי ההתחלה, אך הסוכנים הכלכליים – צרכנים, פירמות – יגיבו לתנאי ההתחלה באופן אופטימלי מבחינתם. וכך אין זה מספיק להתבונן במצב הקיים ולחשוב אילו שינויים היינו רוצים לראות בו – עלינו לחשבו במונחי שיווי המשקל החדש שיווצר לאחר שנשנה תנאים מסוימים.

מדדי מחירים

האבחנה בין פיצויי סלוצקי והיקס קשורה גם בנושא מדידת השינוי במחירים. נניח שאנו מתחילים במחירים מסוימים, p_1,p_2 ועוברים לרשימת מחירים חדשה, p_1',p_2'. נניח גם כי רמת ההכנסה הנומינלית נותרה בעינה, I. לשם פשטות נניח שהעדפות הצרכן הן קמורות ממש (ומקיימות גם מונוטוניות ושאר ירקות), כך שלכל רשימת מחירים יש סל אופטימלי אחד בלבד. כך, במחירים המקוריים הסל האופטימלי הוא (x_1,x_2) ובמחירים החדשים – (x_1',x_2').

פי כמה עלו המחירים? זה תלוי, כמובן. מחירו של מוצר 1 עלה פי – (p_1'/p_1) ואילו מחירו של מוצר 2 פי- (p_2'/p_2). (שני היחסים הללו יכולים להיות גדולים, קטנים, או שווים ל- 1, והביטוי "עלו פי-..." צריך להיות מובן כמכיל גם את המקרה "עלו פי 0.8, יענו, ירדו.") פי כמה עלו "כל המחירים" או פי כמה עלה "המחיר הממוצע"? שאלה זו תלויה בכמויות הנצרכות. למשל, אם מחיר היהלומים עלה, אך אף אחד לא צורך יהלומים, אין טעם להתחשב בעליית המחיר הזו. כללית, נראה שיש לשקלל את המחירים בכמויות הנצרכות. למשל, אפשר לקחת את הסל המקורי, (x_1,x_2) ולהשתמש בו כרשימת משקלות. כך נקבל את **מדד המחירים של לספייר (Laspeyres):**

$$L = (p_1'x_1 + p_2'x_2) / (p_1x_1 + p_2x_2)$$

אך אפשר גם לקחת את הסל החדש, (x_1',x_2'), ולהשתמש דוקא בו. ואז מתקבל **מדד המחירים של פאשה (Paasche):**

$$P = (p_1'x_1' + p_2'x_2') / (p_1x_1' + p_2x_2')$$

במי נשתמש? כנראה במדד שיותר נוח לנו לפי צרכי השעה. מה שחשוב לענייננו הוא להבין את הבעייתיות שבסיכום שינויים במחירים ע"י מספר אחד: לא זו בלבד שעלינו לחשב ממוצע משוקלל, המשקלות ההגיוניים משתנים באופן אנדוגני:[10] שינוי המחירים אותו אנחנו מנסים למדוד משנה לנו גם את כלי המדידה שאיתו קיווינו לעבוד.

נסיים בהערה הקשורה לעקרון ההעדפה הנגלית. נניח שהסל האופטימלי השתנה (ז.א. ש- (x_1,x_2) שונה מ- (x_1',x_2')). נתבונן במדד לספייר. אם ערכו גדול מ-1, הרי ש-

$$L = (p_1'x_1 + p_2'x_2) / (p_1x_1 + p_2x_2) > 1$$

או

$$p_1'x_1 + p_2'x_2 > p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

ולכן הסל הקודם, (x_1,x_2), אינו אפשרי עוד במחירים החדשים. לעומת זאת, אם $L \le 1$, אזי הסל הקודם ניתן לרכישה גם במחירים החדשים. מכיון שאינו נרכש (ומכיון שהנחנו שהפתרון האופטימלי הוא יחיד!), אנו מסיקים שהסל החדש עדיף (ממש) על פני הקודם.

באותו אופן, אם מדד פאשה קטן מ-1, אזי

$$P = (p_1'x_1' + p_2'x_2') / (p_1x_1' + p_2x_2') < 1$$

או

[10] "אנדוגני" משמעו "פנימי למערכת" ונקבע בתוכה יחד עם המשתנים האחרים. לעומת זאת, "אקזוגני" משמעו "חיצוני למערכת" ונקבע ע"י גורמים שאינם תלויים במשתנים שאותם אנו לומדים. כך, למשל, רעידת אדמה תהיה שינוי אקזוגני. רמת המחירים במשק היא אנדוגנית. עם זאת, לא תמיד ההבחנה כל כך ברורה, מכיון שמטעמי נוחיות של הניתוח אנו יכולים להניח שמשתנים כלכליים מסוימים הם "מחוץ" למודל שלנו. כך, למשל, שיווי משקל חלקי (בשוק אחד) שעסקנו בו בקורס היסודות הניח שהמחירים בשווקים האחרים הם אקזוגניים, אך לעתים ניזכר שכל המחירים הם חלק משיווי משקל כללי, זאת אומרת שנהפוך את כולם לאנדוגניים.

$$p_1x_1' + p_2x_2' > p_1'x_1' + p_2'x_2' = I$$

ואז מסתבר שהסל החדש לא היה אפשרי במחירים הקודמים. אך אם $P \geq 1$, נקבל מסקנה הפוכה לפיה הסל החדש היה אפשרי במחירים הקודמים, ומכיון שלא נבחר, הסל הקודם עדיף (ממש) על פניו.

אם נשלב את שתי המסקנות הקודמות, נראה שלא ייתכן ש $L \leq 1$ וגם $P \geq 1$, כי לא ייתכן שהסל הקודם עדיף (ממש) על פני החדש וגם להפך. לעומת זאת, האפשרויות האחרות אינן סותרות דבר בהנחותינו (אנא ודאו זאת!) ובפרט, ייתכן בהחלט ש-

$$L > 1 > P$$

הווה אומר, ייתכן בהחלט שלפי הכמויות הקודמות המחירים "בסה"כ" עלו, על לפי הכמויות החדשות הם ירדו ("בממוצע"). – ועובדה זו נועדה להאיר את עינינו בנוגע לבעייתיות שבמדידת שינויים במחירים.

לבסוף, נציין שיש קשר בין דיון זה לפיצויי סלוצקי והיקס: בשני המקרים לב העניין הוא ששינויים במחירים מתורגמים גם, דרך אופטימיזציה הצרכנים, לשינויים בכמויות.

תרגילים: בשלב זה אתם אמורים להיות מסוגלים לפתור:

בעיות 12,13 בבחינה לדוגמה מס' 1

בעיה 13 בבחינה לדוגמה מס' 2

בעיות 14,15 בבחינה לדוגמה מס' 3

סיכום שיעור 9 ובו יסופר על היצע העבודה

אחד היישומים המעניינים של תורת הצרכן הוא להחלטה חשובה של הפרט: כמה לעבוד. היצע העבודה הוא מספר שעות העבודה שאנשים מציעים בשוק (בחלוקה למקצועות ויכולות, לפי רמת השכלה, נסיון וכו'). ההחלטה כמה שעות לעבוד, תתואר אצלנו ע"י בבואתה: ההחלטה כמה שעות **לא** לעבוד. שעה שבה אדם, שיכול היה לעבוד, בחר לא לעבוד, נחשבת לשעת פנאי שהאדם צורך. כך, במודל הבסיסי נחשוב על אדם הנולד עם 24 שעות פנאי ביום, ומתוכן הוא מחליט לצרוך מספר שעות ואת השאר – "למכור" בשוק העבודה.[11] מחירה של שעת פנאי, לפי הגיון זה, הוא שכר העבודה: ניצול של שעה נוספת לפנאי, היינו צריכת שעה, מקטין את ההכנסה בדיוק בשכר העבודה לשעה, W. ניתן גם לחשוב על האדם כאילו הוא פותח במכירת כל 24 שעותיו, מקבל הכנסה כשכר עבודה, 24W , ולאחר מכן הוא מחליט לצרוך פנאי, נניח L שעות ביום (כאשר $0 \le L \le 24$) ו"קונה" אותו בסכום כולל של WL. (L מסמן כאן פנאי, Leisure, למרות שגם עבודה, Labor, מתחילה ב- L, אז נא לא להתבלבל.)

כהרגלנו, אנחנו שומרים על המודלים פשוטים כדי להבין מה קורה באופן עקרוני. (וממילא אנחנו מאמינים במודלים יותר כמסגרות חשיבה מאשר כדברי אלוהים חיים.) וברוח מסורת זו, נקבץ אל כל שאר המוצרים – למעט פנאי – במוצר מצרפי אחד. נסמנהו Y ונניח שמחירו הוא p. זהו מעין "מדד מחירים" עם כל הבעייתיות של מושג זה (ר' סוף הפרק הקודם). חשוב שהוא כולל את כל המוצרים <u>למעט</u> פנאי. אם נניח שלצרכן אין כל הכנסה מלבד שכר העבודה, נקבל את מגבלת התקציב הבאה:

$$p\,Y + W\,L = 24\,W$$

שבה משתני ההחלטה הם Y ו- L, הלוא הם הכמויות שאותן בוחר האדם לצרוך מהמוצר המצרפי ומהפנאי, בהתאמה; מחיריהם של המוצרים הם p ו-W , בהתאמה, וסך ההכנסה הוא 24W.

אפשר להעביר אגפים ולרשום את מגבלת התקציב גם כ-

---

[11] כאן ובהמשך נתעלם מסופי שבוע, חגים וימי צומות. 24 השעות הן, אם כך, שעות מטאפוריות, וצריך לחשוב עליהם רק כהקדשת כל רגע אפשרי לעבודה.

$$p\,Y = W\,(24 - L)$$

וניתן להבין משוואה זו כך: אם הצרכן יצרוך L שעות פנאי ביום, הרי שיעבוד 24-L שעות. בשכר של W ₪ לשעה, 24-L שעות מניבות הכנסה של W(24-L), וזהו התקציב בצד ימין. ההוצאה על המוצר המצרפי Y, היא pY, וזהו הביטוי בצד שמאל.

לבסוף, אפשר טיפה לפשט את המשוואה אם נעבור מדיון בשכר נומינלי לראלי: בסך הכל, לא משנה לאדם כמה שקלים יקרקשו בכיסו, אלא מה יוכל לקנות בהם. לכן טבעי להגדיר את השכר הראלי כ-

$$w = W / p$$

שהוא מספר יחידות המוצר המצרפי שמניתן לקנות בזיעה שנוצרת בשעת עבודה אחת. ואז מגבלת התקציב ניתנת לרישום כ-

$$Y = w\,(24 - L)$$

לפני שנמשיך – והאמת היא שלא נותר לנו הרבה לומר – יש מקום לשתי הערות חשובות. האחת היא על צרות האופקים של המודל הנ"ל, והשניה על גדלותו והרעיונות הנפלאים הנחבאים בו.

<u>על מגבלות המודל</u>

יש מספר בעיות במודל לעיל. ראשית, אתם אולי מוטרדים מהעובדה שהשכר לשעה הוא קבוע. בפועל ניתן לקבל תוספת לשעות נוספות, אך, חמור מזה – בדר"כ לא ניתן לעבוד פחות ממשרה מלאה בשכר נתון. חלקי משרה הופכים להיות הרבה פחות משתלמים, ועובדה זו הופכת את בעית הצרכן ללא-קמורה: ייתכן שאדם יהיה אדיש בין עבודה במשרה מלאה לבין הימנעות מעבודה, אך עבודה בחצי משרה עלולה להיות גרועה משתי האופציות הקיצוניות.

בעיות אחרות, עקרוניות יותר, קשורות לצדדים הפסיכולוגיים והסוציולוגיים של שוק העבודה. למרות היופי והאלגנטיות של המודל הנ"ל (שכחתי לומר לכם שהוא יפה ואלגנטי, אבל בטח כבר שמתם לב), עבודה איננה סתם מוצר. כשאנשים יוצאים לשוק העבודה, בפרט בחברות תחרותיות, השכר משמש להם גם איתות על יכולתם כפי שהיא נתפסת ע"י השוק. ולכן הפרמטר w, שאמור להיות רק אחד ממאפייני הבעיה המגדירים את מגבלת התקציב, בעצם

משפיע על התועלת באופן ישיר: אנשים חווים הנאה, תחושת ערך וסיפוק, גאווה וכו' מערכו של w שלהם מעל ומעבר לכמות המוצר Y שהשכר w מאפשר להם לרכוש. כך שניתן היה לחשוב על השכר w שאחד ממרכיבי התועלת, מעבר למוצרים L,Y הנצרכים במובן הרגיל.

תופעה חשובה אחרת שהמודל הנ"ל מתעלם ממנה היא האפשרות שאדם נהנה מעבודתו. אנשי אקדמיה ואמנויות מתוארים כאנשים שבחרו את העיסוק האהוב עליהם כמקצוע. כמובן, נגני תזמורת צריכים לנגן גם אם תוקף אותם חשק עז להתעטש, ארכיטקטים מוצאים את עצמם ממתינים למשאית עם החצץ, ופרופסורים באוניברסיטה יושבים בוועדות ושואלים את עצמם איך זה קרה להם. ובכל זאת, חלק מהעבודה שלהם הוא עיסוק שהיו עושים ממילא בשעות הפנאי וללא כל תמורה. וגם נהגי מוניות וחנוונים יכולים להנות מהקשר עם הלקוחות וכו'. יתרה מזו, גם אם אין בעבודה שום הנאה, עבודות שונות נבדלות במידת חוסר הנעימות והמאמץ שהן גורמות. במודל שלעיל הפנאי שנמכר בשוק נעלם, ואינו מופיע בפונקצית התועלת כגורם כלשהו. וכך פינוי זבל ושמירה על חניון ייחשבו לשקולים כל עוד שכר העבודה שהם מניבים הוא זהה. (שאלה לדיון בשיעור חברה: איזו עבודה פחות סימפטית?)

לתופעות אלו יש השלכות מרחיקות לכת. כפי שאתם כבר יודעים, אחת מהבעיות הגדולות בכלכלה היא קשיחות השכר (wage rigidity): גם כאשר שוק העבודה במצב של עודף היצע, ויש אבטלה, המחיר אינו נוטה לרדת לרמת שיווי המשקל. על בעיה זו דיבר קיינס (Keynes), שטען שאין לחכות להתאמת השכר "בטווח הארוך" כי "בטווח הארוך כולם מתים", וחולל מהפכה מדעית ופוליטית בכלכלה. מדוע אין שכר העבודה יורד לאור אבטלה (הריהי עודף היצע)? הכלכלן Truman Bewley הקדיש ספר לתוצאות מחקר שערך, שבו פשוט הציג שאלה זו למנהלי חברות. התשובות הנפוצות לא יפתיעו אתכם: הפחתת שכר פוגעת במוטיבציה של העובדים, אם דרך פגיעה בערך העצמי שלהם ואם דרך מערכת היחסים שלהם עם המעסיק ותפיסתם כיצד מעריך המעסיק אותם. אחד מהמנכ"לים שרואיינו אמר שעדיף לפטר עובד מאשר לקצץ בשכרו "to get misery out the door".

ובכן, בתופעות אלה לא נדון כאן. אך יש לציין שאחד מהתתי-תחומים החשובים בכלכלה הוא כלכלת עבודה. המקצוע מכיר בכך שפנאי אינו מוצר ככל שאר המוצרים, ושכר עבודה אינו מחיר כשאר המחירים. בשלב זה של הקורס שלנו, אנחנו ננסה בכל זאת לראות איך המודל הפשוט שאיתו אנחנו משחקים הסמסטר בכל זאת תופס כמה תופעות מעניינות.

על רעיונות נפלאים

אחד הרעיונות הדגולים שהתגנב לנו לדיון דרך המודל לעיל הוא שההכנסה של הצרכן גם היא בעצם תלויה בפעילות השווקים ובמחירים. עד כה הגדרנו את ההכנסה ככמות כסף, סימנו אותה ב- I, אך לא שאלנו מאין בא הכסף ואיך נקבעת רמת הכנסה זו. עתה, משנשאלה השאלה, אין עוד להשיבה אל הבקבוק ויש להתעמת עימה: מן איפה הכסף?

ובכן, הרהור קל מראה שהכסף נובע מפעילויות כלכליות שונות. כמו שראינו לעיל, אדם יכול לעבוד ולקבל שכר עבודה. יכול להיות שיש ברשותו גם דירה או שתיים, והוא מקבל עליהן שכר דירה, ושכר דירה זה מהווה חלק מהכנסתו. וגם במקרה זה גובה ההכנסה יהיה תלוי בפעילות כלכלית – הביקוש לדירות לשכירות, ובעקבותיו גם גובה שכר הדירה. וייתכן שהאדם מחזיק במניות של חברות שונות, ואז הכנסתו תלויה ברווחי החברות, בסכומי דיבידנדים מחולקים וכו'.

אנו מציצים פה לחדר אפל ומסתורי שבו גר שיווי המשקל הכללי. להזכירכם: בקורס היסודות דנתם בשיווי משקל שנוצר בין היצע וביקוש, אך הדיון היה מוגבל לשוק אחד בלבד. כשמשהו קרה בשוק אחר, נטרדתם אחר כבוד והזזתם את העקומה המתאימה בשוק שעניין אתכם. הקדשתם זמן לאבחנה בין תזוזה על העקומה ותזוזה של העקומה (אבחנה חשובה מאוד!) אך בלב לבכם ידעתם שבחיים הכל קורה יחד, וכאשר המחיר בשוק שלכם זז לו על העקומה לקראת שיווי משקל חדש, בשווקים אחרים יש תזוזות של העקומות שגורמות להם להיות מחוץ לשיווי משקל, ויבוא יום והמחירים בשווקים ההם יזוזו, ויזיזו לנו את העקומות שלנו, ולא יהיה לדבר סוף.

אז האמת היא שאכן לא ברור לנו שיש לדבר סוף, במובן זה שאין לנו תוצאות כלליות על התכנסות לשיווי משקל בכל השווקים גם יחד. אך שיווי משקל כזה, הנקרא **שיווי משקל כללי**, ניתן להגדרה ואפילו ניתן להוכיח שהוא קיים בהנחות מסיומות. כדי להגדירו, צריך לבטא את הביקוש וההיצע בכל השווקים גם יחד, כתלות ברשימת המחירים, ולחפש רשימת מחירים שבה הביקושים וההיצעים משתווים בכל השווקים בו זמנית (ואולי בכמה שווקים יהיה עודף היצע, אך רק אם המחיר בשווקים אלה הוא אפס). בקורס זה אנחנו מנסים להבין צד אחד של השווקים – בינתיים הביקוש, ואח"כ גם קצת ההיצע – ולא בודקים מה קורה בשיווי משקל. בניגוד לקורס היסודות, הפעם אנחנו מסתכלים על כל השווקים יחד, ומנתחים את ביקוש הצרכן לכל אחד מהמוצרים כתלות במחירים של כל המוצרים ובהכנסה. בהמשך נצטרך לשאול מאין באים

המחירים וההכנסה. ובכן – המחירים יהיו מאפייני שיווי המשקל: שיווי משקל יוגדר כרשימת מחירים. וההכנסה תחושב בעזרת המחירים והפעילויות הכלכליות השונות.

במקרה הפשוט-יחסית של שיווי משקל ללא ייצור, נניח כי כל פרט "נולד" עם סל התחלי, או "מתת התחלי" (initial endowment), נסמנהו (e_1,e_2) – נקודה במישור המוצרים המוכר שלנו. רשימת המחירים הנתונה, p_1,p_2, תקבע לצרכן את הכנסתו: נוכל לחשוב על הצרכן כאילו היה מוכר את כל המוצרים שברשותו במחירים הקיימים, מקבל הכנסה

$$I = p_1e_1 + p_2e_2$$

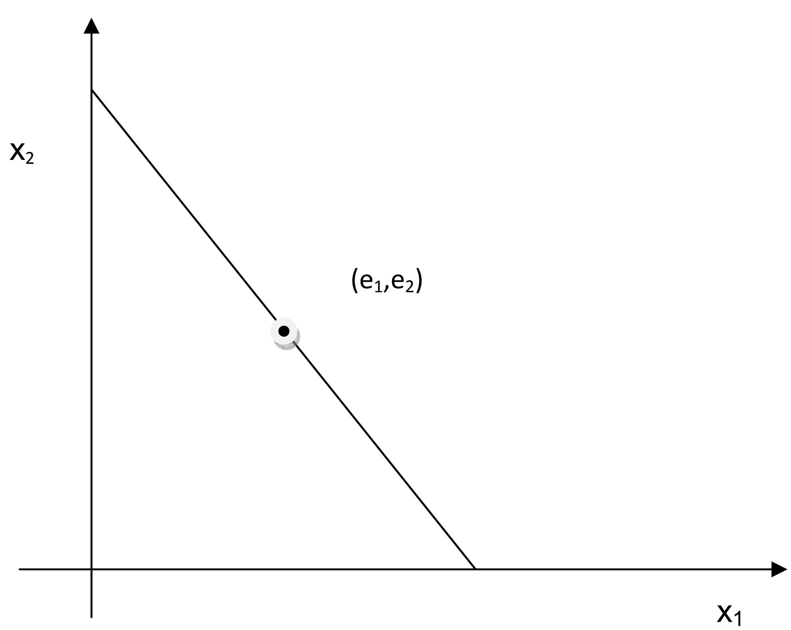
ואז מחפש נקודה אופטימלית על מגבלת התקציב:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

ונוכל גם להתעלם מההכנסה I, שהרי היא גודל מחושב, ולספר את הסיפור כך: האדם מקבל כנתון את רכושו ההתחלי, (e_1,e_2) ואת המחירים , p_1,p_2, ומחפש כמויות מבוקשות x_1,x_2 שתבאנה למקסימום את פונקצית התועלת בכפוף לאילוץ

$$p_1x_1 + p_2x_2 = p_1e_1 + p_2e_2$$

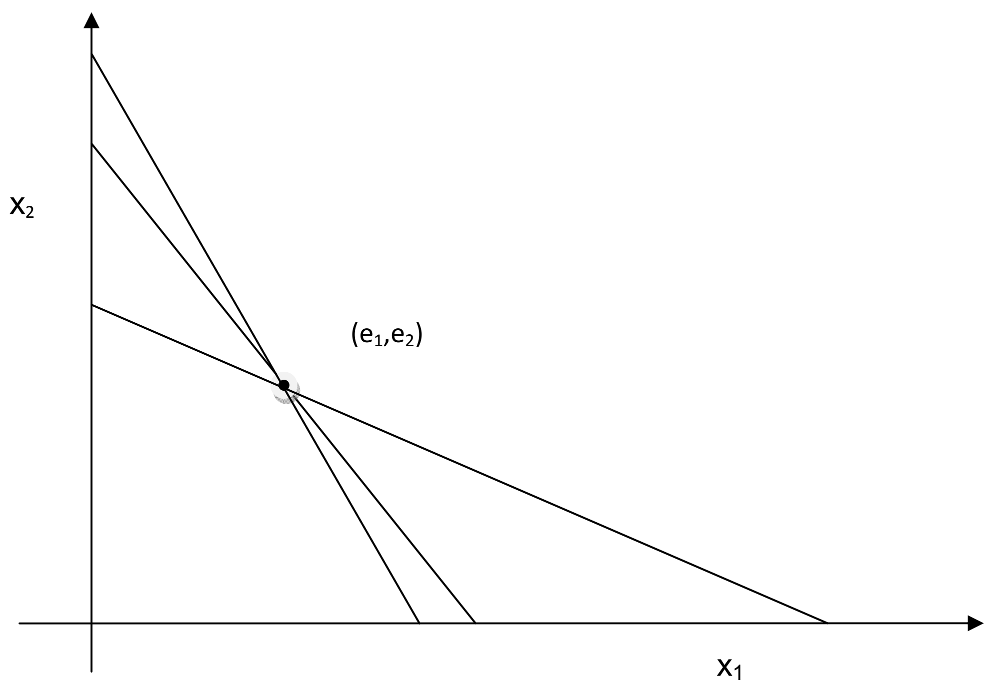
(בהנחות הרגילות של מונוטוניות, ועם המגבלות הרגילות של אי-שליליות.) וכך מתקבל קו תקציב שתמיד עבור דרך הנקודה (e_1,e_2):



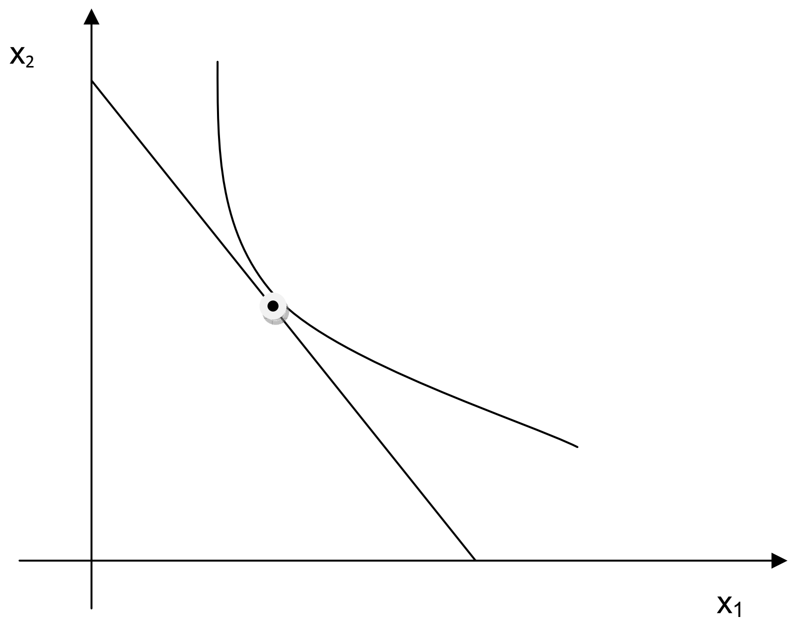
במודל זה אין עוד הכנסה – היא נקבעת ע"י המחירים. שינוי המחירים ישנה את קו התקציב. למעשה, כפי שניתן לראות מהמשוואה

$$p_1x_1 + p_2x_2 = p_1e_1 + p_2e_2$$

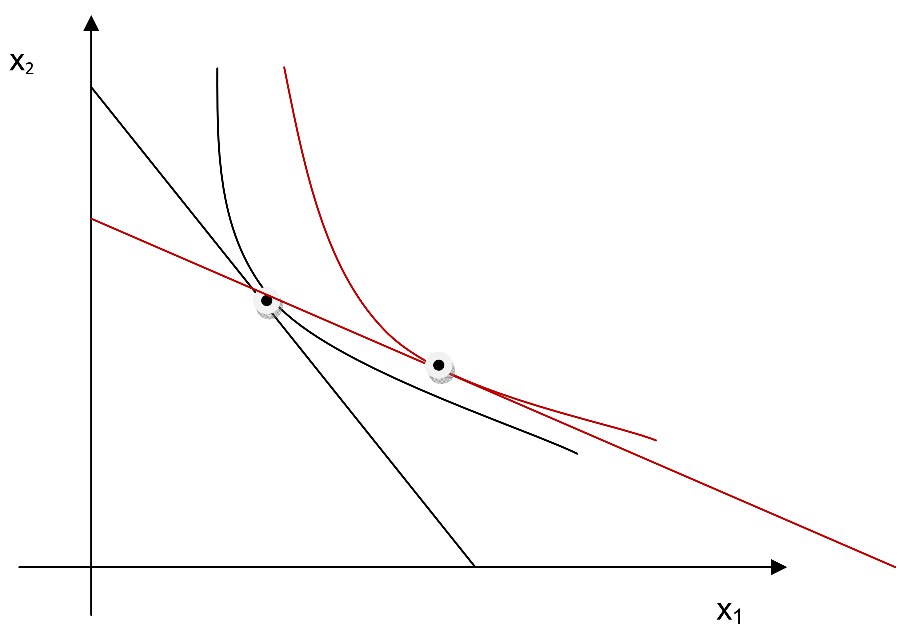
רק **יחס** המחירים חשוב לענייננו; הכפלת כל המחירים בקבוע חיובי כלשהוא תהיה שינוי נומינלי גרידא, מכיון שההכנסה, המחושבת מהמחירים, תוכפל באותו קבוע וכך נקבל אותו קו תקציב. לעומת זאת, שינוי יחסי המחירים יתן לנו מגוון קווי תקציב העוברים דרך אותה נקודה :



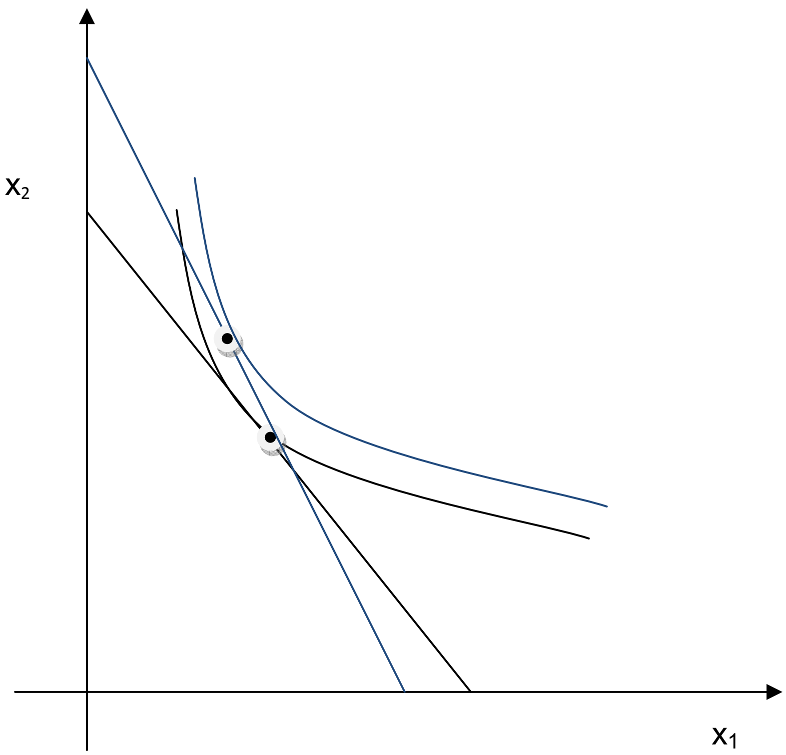
מה תהיה בחירת הצרכן? האם ימכור מוצר 1 ויקנה בכסף עוד ממוצר 2 או שמא להפך? התשובה נעוצה – איך לא – בהשוואת שיפועי עקומת האדישות לקו התקציב. נבחן את עקומת האדישות העוברת דרך הנקודה ההתחלית (e_1,e_2). נניח שההעדפות הן קמורות ממש, כך שיש רק קו ישר אחד המשיק לעקומה בנקודה שלנו:



ועתה נעביר את קו התקציב המוגדר ע"י המחירים, ועובר דרך (e_1,e_2). כמובן, ייתכן שהקו במקרה מתלכד עם המשיק המצויר לעיל. במצב זה הצרכן יהיה בנקודה אופטימלית, ולא ירצה לקנות או למכור לא ממוצר זה ולא מהשני. אך אם יחסי המחירים בשוק אינם זהים ליחסי הנגזרות החלקיות של הצרכן שלנו, נוכל לקבל מצב כגון זה:



ואז הצרכן ירצה לקנות מוצר 1 (זאת אומרת, הצרכן יופיע בשוק 1 בצד הביקוש) ולמכור מוצר 2 (יופיע בשוק 2 בצד היצע). ובמחירים אחרים, שבהם מחירו של מוצר 1 גבוה יותר באופן יחסי, נקבל גרף כגון:



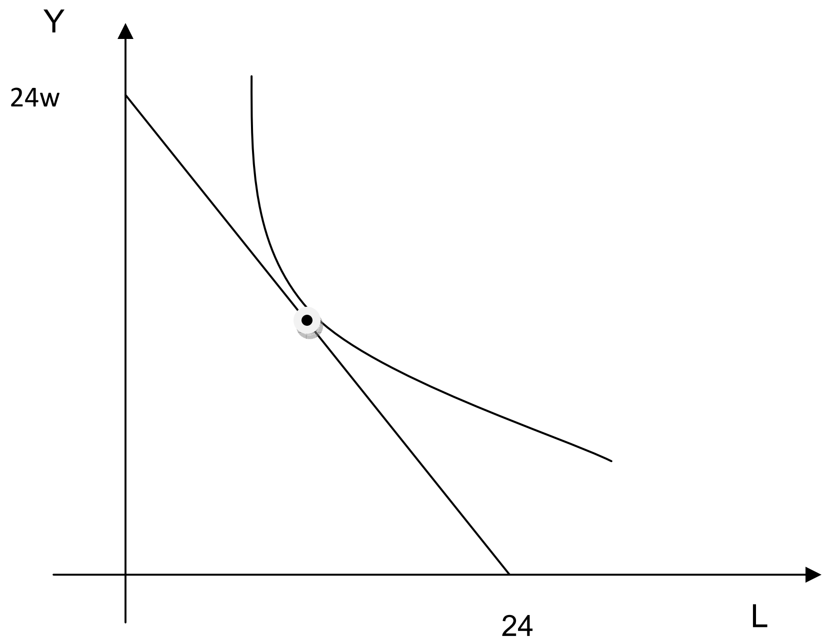
ואז הצרכן ירצה למכור מוצר 1 ולקנות מוצר 2 (יהיה בצד ההיצע בשוק 1 ובצד הביקוש בשוק 2).

<u>חזרה לשוק העבודה</u>

נחזור, אפוא, לאדם שמתבונן במישור (L,Y) (פנאי ושאר מוצרים), והמתת התחילי שלו הוא (24,0). הוא רואה לפניו שכר ראלי w, שמגדיר משואת תקציב

$$Y = w\,(24 - L)$$

ומוצא נקודה אופטימלית על קו זה:



ואם, למשל, יש לפרט פונקצית תועלת Cobb-Douglas כך ש-

$$u(L,Y) = \alpha \log(L) + (1-\alpha)\log(Y)$$

הפתרון האופטימלי יהיה

$$wL = \alpha\, 24w$$

או

$$L = 24\,\alpha$$

הווה אומר, המקדם α יהיה חלק הזמן שאותו יצרוך הפרט כפנאי, כאשר הוא עובד $24(1-\alpha)$ שעות ביום בממוצע, וצורך כמות מוצר מצרפי של $w24(1-\alpha)$. זה לא ממש מפתיע אותנו שהיצע העבודה לא תלוי בשכר במקרה זה: אם אנחנו משנים את w, קו התקציב עדיין יעבור דרך הנקודה (24,0), שהיא המתת ההתחלי. הקו ישתנה רק בכך שיהיה לו שיפוע שונה. למה הדבר דומה? משל היינו משנים רק את מחירו של המוצר השני, Y. זאת מכיון ששינוי השכר w משפיע באותו אופן הן על מחיר הפנאי והן על ההכנסה: המשוואה

$$p\,Y + W\,L = 24\,W$$

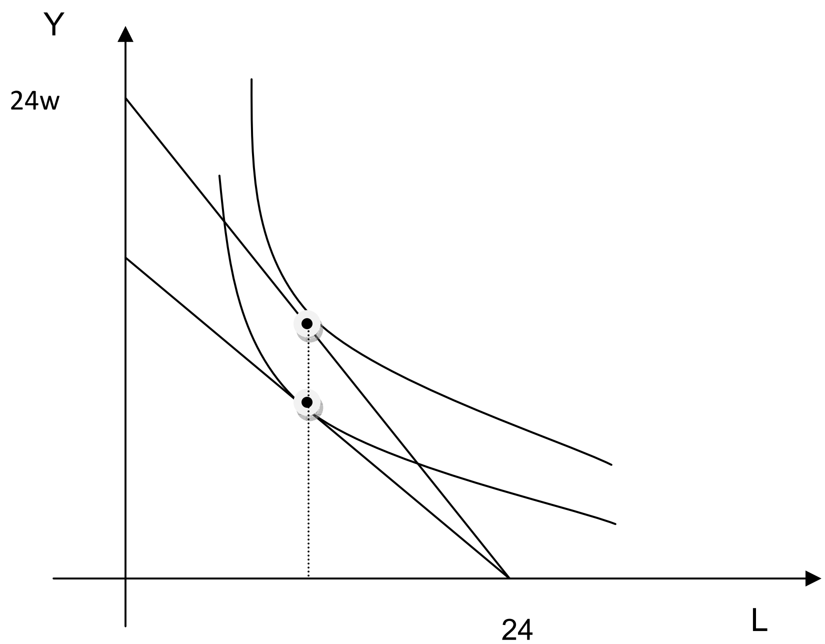
ניתנת לרישום גם כ-

$$(p/W)\,Y + L = 24$$

או

$$(1/w)\,Y + L = 24$$

ולכן שינוי השכר W – או השכר הריאלי w – כמוה כשינוי מחירו של המוצר המצרפי Y, והשארת מחירו של הפנאי קבוע. **ובגרף:**

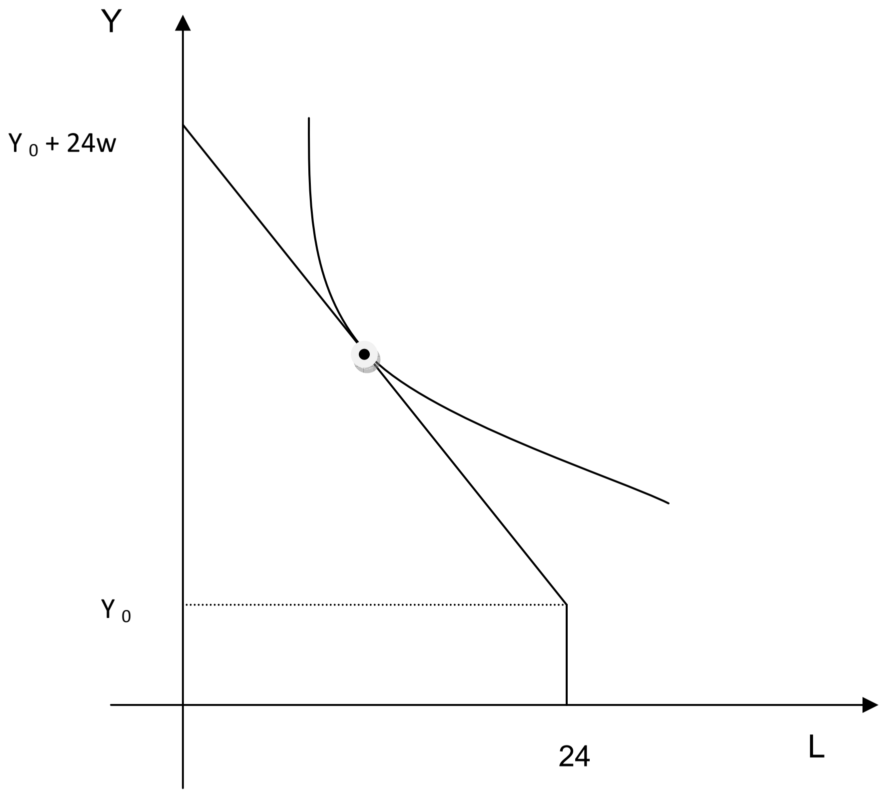


והרי אנו יודעים כבר שבמקרה של תועלת Cobb-Douglas עקומת מחיר-תצרוכת היא קו ישר המקביל לציר שמוצר שמחירו השתנה (או: גמישות המחיר הצולבת היא אפס). מסתבר שהפרט דלעיל יציע אותה כמות עבודה (ויצרוך אותה כמות פנאי) בכל שכר עבודה. עקומת היצע העבודה (המתארת את הכמות המוצעת כפונקציה של השכר) תהיה, אם כן, קשיחה לחלוטין. **זה לא לגמרי ריאלי, ולא משהו שנזקוף לזכות פונקצית Cobb-Douglas. עם זאת, תוצאה מעט**

שונה תתקבל אם נוסיף לפרט גם הכנסה ממקור אחר, כמות מסוימת של המוצר המצרפי, Y_0, המובטחת לו גם אם לא יעבוד כלל. אזי מתקבל קו התקציב

$$p\,Y + W\,L = 24\,W + p\,Y_0$$

ובגרף



אם הפתרון האופטימלי (עבור $u\,(L,Y) = \alpha \log(L) + (1-\alpha) \log(Y)$) הוא פנימי (וזה כבר לא מובטח), הוא יקיים

$$WL = \alpha\,(24W+pY_0)$$

או

$$L = \alpha 24 + (\alpha/w)Y_0$$

-- אך ייתכן שהפתרון יהיה גם בנקודת הקיצון $(24,Y_0)$ ואז תנאי ההשקה לא בהכרח יתקיים בו.

תרגילים: בשלב זה אתם אמורים להיות מסוגלים לפתור:

בעיה 14 בבחינה לדוגמה מס' 1

בעיות 14,15 בבחינה לדוגמה מס' 2

בעיות 16,17 בבחינה לדוגמה מס' 3

סיכום שיעור 10 ובו יסופר על בעיות בחירה על פני זמן

במהלך הקורס עלתה מדי פעם השאלה, מה גורם לצרכן לבזבז את כל הכנסתו, האם הוא או היא לא דואגים ליום המחר, מי יפרנס אותם לעת זקנה וכו'. ועניני על שאלה זו באמירה שאם אנו מתעניינים בחסכון, יש להוסיף "תצרוכת מחר" כאחד המוצרים, או, אם תרצו, להוסיף לכל מוצר גם אינדקס של זמן תצרוכת, וכך לקבל בעיה שיש בה אמנם יותר משתנים, אך שהיא דומה לבעיה בה אנו דנים כל הקורס.

ועתה הגיעה השעה לעשות זאת בצורה קצת יותר מדויקת. כהרגלנו, אנו מפנים כל פעם את הזרקור לכיוון אחד ומתירים את שאר הנושאים בעלטה, במידה רבה כדי שנוכל לצייר גרפים דו-ממדיים. אז הפעם נניח שבכל תקופה נצרך רק מוצר אחד – אפשר לחשוב עליו כעל מוצר מצרפי, או על סכום הכסף שבו נקנה מוצר זה – ונתמקד בתחלופה שבין תקופות. מגבלת המימדים של הלוח תחייב אותנו לצייר רק שתי תקופות – "היום" ו"מחר" – אך הפעם זה יכול להיות טיפה פשוט מדי, ולכן חלק מהדיון ננהל עם יותר מאשר שתי תקופות.

ובכן: נניח כי יש מספר תקופות המסומנות ב- $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ ואפשר גם לדון במקרה האינסופי (שבו t ממשיך לרוץ אל עבר האופק ללא חסם T סופי). למקרה האינסופי יש מספר יתרונות. ראשית, זה לא ממש משמח לחשוב שנמות מתישהו, אפילו אם T גדול. זה נראה הרבה יותר נחמד לעבוד במודל סטציונרי, שבו לאחר כל מספר תקופות האופק הנותר נראה אותו דבר.[12] למשל, הרבה יותר קל לנו לבזבז זמן על כל מיני פעילויות, כגון שיעור זה, אם אנחנו מאמינים שתוחלת החיים בסוף השיעור זהה לזו שהיתה בתחילת השיעור. זה כנראה לא יכול להיות ממש נכון, אבל כקירוב זה לא רע. שנית, אם האופק סופי, מודל הגיוני עלול להכניס כל מיני שיקולים של "אינדוקציה-לאחור". למשל, אם כולנו יודעים שעוד 50 ביליון שנים לא יהיו חיים על כדור הארץ, וכולנו יודעים שכולנו יודעים זאת, וכולנו יודעים שכולנו יודעים שכולנו יודעים זאת וכו', נגלה שלא יהיה לכסף ערך כבר עכשיו. זאת משום שביום שכולם יודעים שהוא היום האחרון אין סיבה לאף אחד לקבל כסף תמורת מוצרים או שירותים, כי לא יהיה לו מתי להשתמש בכסף זה. ומכיון שכולם יודעים זאת, גם יום קודם לכן אף אחד לא יהיה מוכן לקבל

[12] "סטציונריות" היא תכונה של מודלים דינמיים, שבהם מספר פרמטרים מספיקים לתאר כל מה שמשפיע על התהליך. בפרט, משך הזמן שחלף מתחילת התהליך לא יהיה חשוב כל עוד נדע פרמטרים אחרים. הגדרה זו מקבלת משמעות אם הפרמטרים הנדונים יכולים לקבל מספר סופי של ערכים (בניגוד לזמן, המקבל מספר ערכים לא חסום).

כסף, כי כל אחד יודע שלמחרת, למרות שכולם עוד יהיו בחיים, אף אחד לא ימכור דבר תמורת הכסף. וכך באינדוקציה אנו ממשיכים ליום שלפני יום זה, ובסוף מגיעים להווה. לעומת זאת, אם נניח שאופק הזמן הוא אינסופי, לפחות לאנושות כולה (ולאו דוקא לפרטים בודדים), ניתן להסביר מדוע פרטים רציונליים מוכנים להפרד ממוצרים או לספק שירותים עבור פיסות נייר או רישומים עלומים בבנק: הם מאמינים שתמורת הכסף יוכלו לקבל מוצרים ושירותים בעתיד, וכל עוד האחרים אף הם מאמינים כך, יש לאמונה זו גם תוקף. אך כדי שלאמונות אלה יהיה תוקף גם היום, גם מחר וגם אחר-כך, נדרש מספר אינסופי של תקופות. מסתבר שבמצב זה המודל האינסופי, למרות שהוא נשען על הנחה לא נכונה, יכול לתת תחזיות טובות יותר מהמודל הסופי, הבנוי על הנחה נכונה. עוד סיבה, פחות חשובה, לנתח מודלים עם אופק זמן אינסופי היא שלפעמים אופק אינסופי מפשט את הרישום המתמטי ואפילו כמה מהחישובים. ולבסוף, המקרה של T אינסופי יכול לתאר מקרה של T סופי ע"י השלמת התקופות $T+1,T+2,\ldots$ ע"י סדרת אפסים. אחרי כל ההתנצלויות הללו, נניח, ש- T הוא אינסוף לצורך הנוסחאות, ובגרפים ממילא נצטרך להסתפק ב- $T=1$ (כאשר תקופה 0 היא "היום" ותקופה 1 היא "מחר").

הצרכן בוחן אלטרנטיבות המבטיחות זרם תצרוכת: בתקופה t הוא יקבל כמות c_t של המוצר המצרפי, או, לשם פשטות, כמות c_t של כסף שבו ייקנה המוצר המצרפי. וכך אלטרנטיבה היא

$$c = (c_0,c_1,c_2,\ldots)$$

עתה עלינו לברר מהן העדפות הצרכן ומהי הקבוצה האפשרית, ונוכל לחזור לטריטוריה המוכרת והאהובה שלנו.

<u>העדפות על פני זמן</u>

איך בוחר הצרכן בין שתי אלטרנטיבות, $c = (c_0,c_1,c_2,\ldots)$ ו- $d = (d_0,d_1,d_2,\ldots)$? מקובל להניח שלצרכן יש פונקצית תועלת חד-תקופתית u שממנה נגזרת פונקצית תועלת רב-תקופתית U כדלקמן:

$$U(c) = U(c_0,c_1,c_2,\ldots) = \sum_{t=0,1,\ldots} \delta^t u(c_t)$$

ואם תרצו ניתן להכפיל את הנוסחה בצד ימין בקבוע החיובי $(1-\delta)$. זהו ענין אסתטי גרידא: הכפלה ב- $(1-\delta)$ תבטיח, שאם בכל תקופה מתקבלת אותה רמת הכנסה (או אותה כמות של מוצר מצרפי), נניח x, אזי הערכת הסדרה כולה היא זהה להערכה החד-תקופתית:

$$U(x,x,x,\ldots) = (1-\delta) \sum_{t=0,1,\ldots} \delta^t u(x) = u(x)$$

מספר הנחות נחבאות בנוסחה זו: ראשית, שהערכת זרם ההכנסות היא סיכומית על פני תקופות זמן, ז.א. שניתן לייצגה ע"י סכום של פונקציות, כאשר כל אחד מתארת את ההעדפות על פני הכנסה בתקופה מסוימת בלבד. שנית, הנוסחה מניחה שהפונקציה החד-תקופתית u אינה משתנה מתקופה לתקופה, וזוהי אותה u המוכפלת במקדם הנכיון δ^t בתקופה t. שלישית, הנוסחה מניחה שיחס התחלופה בין כל שתי תקופות סמוכות הוא זהה: למשל, אם אנו אמורים לקבל שקל אחד בתקופה t, והתקבול נדחה לתקופה (t+1), הרי שתרומתו של השקל ל- U קטנה מ- $\delta^t u(x)$ ל- $\delta^{(t+1)}u(x)$ ז.א. מוכפלת ב- δ. אך זהו אותו מקדם δ לכל t.

לבסוף, אם אנו מניחים שהפונקציה החד-תקופתית u היא קעורה, הרי שהעדפות הצרכן יקיימו את הנחת הקמירות שלנו. שימו לב שקעירות הפונקציה u מבטאת העדפה להחלקת תצרוכת על-פני זמן: נניח ראשית שאין מקדם נכיון (δ=1), ונניח ש- T סופי רק כדי שהטור לא יתבדר לנו. במצב זה, העברת תקבולים מתקופות "טובות" לתקופות "רעות" תעלה את הסכום, והחלוקה האופטימלית של סכום כסף נתון בין התקופות היא חלוקה שווה.

כאן אתם אמורים להיזכר ביוסף שיעץ לפרעה לחסוך תבואה בשבע השנים הטובות כדי להשתמש בה בשבע השנים הרעות. בבראשית פרק מ"א מסופר שיוסף, המפרש את חלום פרעה, מסכם בעצה ידידותית:

> וְעַתָּה יֵרֶא פַרְעֹה, אִישׁ נָבוֹן וְחָכָם; וִישִׁיתֵהוּ, עַל-אֶרֶץ מִצְרָיִם. יַעֲשֶׂה פַרְעֹה, וְיַפְקֵד פְּקִדִים עַל-הָאָרֶץ; וְחִמֵּשׁ אֶת-אֶרֶץ מִצְרַיִם, בְּשֶׁבַע שְׁנֵי הַשָּׂבָע. וְיִקְבְּצוּ, אֶת-כָּל-אֹכֶל הַשָּׁנִים הַטֹּבוֹת, הַבָּאֹת, הָאֵלֶּה; וְיִצְבְּרוּ-בָר תַּחַת יַד-פַּרְעֹה, אֹכֶל בֶּעָרִים--וְשָׁמָרוּ. וְהָיָה הָאֹכֶל לְפִקָּדוֹן, לָאָרֶץ, לְשֶׁבַע שְׁנֵי הָרָעָב, אֲשֶׁר תִּהְיֶיןָ בְּאֶרֶץ מִצְרָיִם; וְלֹא-תִכָּרֵת הָאָרֶץ, בָּרָעָב.

יש אומרים שהוא היה הכלכלן הראשון, אך בפרק הבא נראה שיעקב אביו קדם לו.

ייתכן שחושיכם המחודדים שואלים האם הפונקציה u באמת קעורה, והאם יש משמעות לשאלה זו, או שמא היא רק קוואזי-קעורה? ובכן, יש להודות שהסימון מעט מבלבל: בנוסחה לעיל u (קטן) היא פונקציה של ההכנסה בתקופה מסוימת, c_i, ולא של כל זרם ההכנסות $c=(c_0,c_1,c_2,\ldots)$ – השתמשנו בסימון U (גדול) לפונקציה זו. הקעירות של u היא ברת-

משמעות: בדרך-כלל, כאשר אנו מייצגים העדפות על-ידי סכום של פונקציות, הפונקציות תהיינה יחידות עד כדי טרנספורמציות לינאריות, כאשר מותר לנו "להזיז" כל פונקציה בקבוע משלה (היינו, לחבר או להחסיר קבוע) ולהכפיל את כולן בו-זמנית באיזשהו קבוע חיובי (המשותף לכולן). אם, למשל, נחליף את הפונקציה u (קטן) ב- log(u) או ב- u^3, סכום הפונקציות על פני תקופות זמן שונות יגדיר העדפות שונות מאשר הסכום המקורי. אם זה לא ממש ברור, התבוננו במקרה T=1, היינו, שתי תקופות בלבד, δ=1, והפונקציה u(x)=x. הסכום

$$U(c_0,c_1) = u(c_0) + u(c_1)$$

מגדיר העדפות שונות לחלוטין מאשר

$$V(c_0,c_1) = \log[u(c_0)] + \log[u(c_1)]$$

ושני יחסי ההעדפה הנ"ל שונים מההעדפות המוגדרות ע"י

$$W(c_0,c_1) = [u(c_0)]^3 + [u(c_1)]^3$$

הפונקציה U, לעומת זאת, ניתנת להחלפה בטרנספורמציה מונוטונית שלה בלי לשנות את ההעדפות. ובדוגמה לעיל, מקסימיזציה של

$$U(c_0,c_1) = u(c_0) + u(c_1)$$

שקולה למקסימיזציה של

$$\log[U(c_0,c_1)] = \log[u(c_0) + u(c_1)]$$

(בהנחה ש-U חיובית וה- logמוגדר היטב) וגם למקסימיזציה של

$$[U(c_0,c_1)]^3 = [u(c_0) + u(c_1)]^3$$

לשון אחר: העובדה שהפונקציה u (קטן) אינה משמשת רק לדירוג סלי תצרוכת בתקופה מסוימת, אלא שסכומים שלה משמשים לדירוג זרמים של תצרוכת על פני זמן הופכת את הפונקציה u ל"יחידה יותר": יש לנו פחות חופש בבחירת הפונקציה, מכיון שאין זה מספיק שסל מועדף יותר יהיה בעל רמת תועלת גבוהה יותר: אנו נדרשים גם לוודא שסכום של סלים על פני שתי התקופות ידרג זוגות סלים באופן זהה. לעומת הפונקציה החד-תקופתית u, הנסכמת על

פני תקופות, הפונקציה הרב-תקופתית U משמשת רק לדירוג (זרמים של תצרוכת) ואין אנו סוכמים את ערכיה. לכן U אורדינלית, אך u לא. (למעשה, u קרדינלית, ופרט למקרים "מנוונים", לא ניתן להחליף את u אלא בטרנספורמציה לינארית עולה של עצמה, ויתרה מזו – המקדם המכפיל אותה צריך להיות זהה בכל תקופה.)

אם כל הפונקציות שאנו סוכמים (במקרה זה – כפולות שונות של אותה פונקציה u) הן קעורות, הרי שסכומן הוא פונקציה קעורה (כפונקציה של כל וקטור המשתנים), אך מה שחשוב לנו הוא שהיא קוואזי-קעורה, ולכן שההעדפות קמורות.

כאשר יש מקדם נכיון, זאת אומרת, כאשר $\delta<1$, הפתרון האופטימלי לחלוקת סכום כסף בין התקופות איננו באופן שווה, ותקופות מוקדמות יותר יקבלו תקבולים גבוהים יותר מתקופות מאוחרות יותר, כך שמכפלת מקדם הנכיון (בחזקה המתאימה) בתועלת u השולית יהיה שווה לכל התקופות. (זאת בהנחה של פתרון פנימי.)

יש הצדקות אקסיומטיות לכל ההנחות הללו, הווה אומר, רשימת אקסיומות, כמו שלמות וטרנזיטיביות של יחס ההעדפה, שגוררת את העובדה שההעדפות ניתנות לייצוג בצורה זו. לא נכנס לעומק הנושא, אך נציין את האקסיומה שעומדת בבסיס ההנחה שמקדם הנכיון מתקופה אחת לתקופה הבאה הוא קבוע.

לצורך זה נפצח בדוגמה. מה תעדיפו לקבל מבין שתי האפשרויות הבאות:

א. 100 ₪ היום

ב. 120 ₪ בעוד שבוע ?

ועתה בחרו בין זוג האפשרויות הבאות:

ג. 100 ₪ בעוד 50 שבועות

ד. 120 ₪ בעוד 51 שבועות ?

לרוב, כל הנשאלים מעדיפים את (ד) על פני (ג): מדובר בהבדל שבין 50 ו-51 שבועות, שהם ממילא כמעט שנה, ובשעה שההפרש בזמן נראה זניח, ההפרש בתשלום איננו זניח: 120 ₪ הם יותר מ- 100 ₪. לעומת זאת, בין (א) ל-(ב) לרוב אין תמימות דעים. לענייננו, נניח שחלק

משהנשאלים העדיפו את (א) על פני (ב) ואת (ד) על פני (ג). נובע מכך, שהעדפותיהם של נשאלים אלה אינן ניתנות לתיאור ע"י הנוסחה

$$U(c) = U(c_0,c_1,c_2,\dots) = \sum_{t=0,1,\dots} \delta^t u(c_t)$$

וזאת מדוע? נדמיין שני זרמי תקבולים: בראשון, c, כל התקבולים הם אפס למעט תקופה t, שבה מתקבלים 100 ₪. בשני, d, כל התקבולים הם אפס למעט תקופה (t+1), שבה מתקבלים 120 ₪. נניח לשם פשטות כי u(0)=0. הזרם c יועדף על-פני הזרם d אם ורק אם

$$U(c) = \sum_{t=0,1,\dots} \delta^t u(c_t) > U(d) = \sum_{t=0,1,\dots} \delta^t u(d_t)$$

או

$$\delta^t u(100) > \delta^{(t+1)} u(120)$$

אך אי-שוויון זה שקול ל-

$$u(100) > \delta u(120)$$

– אי-שוויון שאינו תלוי ב- t. כך, מי שאכן מקבל החלטות על פני זמן באופן שניתן לתאור ע"י מקסימיזציה של הנוסחה לעיל, חייב להעדיף את (א) על פני (ב) אם ורק אם הוא מעדיף את (ג) על פני (ד).

מה ההגיון, אם כך, בנוסחה? האם יש משהו פסול בהעדפות (א)>(ב) ו- (ג)<(ד)? אולי. בואו ננסה: נניח שהעדפותי הן אכן כנ"ל. אני עומד בפני בחירה בין (ג) ל-(ד) ואומר לעצמי שעדיף להמתין עוד שבוע ולקבל 20% יותר, היינו, לבחור ב-(ד). זו בחירתי ואני משבח את עצמי על חוש החסכון המפותח שלי, על יכולתי לדחות סיפוקים ועל אחריותי באופן כללי. וכך אני ממתין והשבועות נוקפים. לאחר 50 שבועות, אני מתבונן שוב בשתי האלטרנטיבות, אלא שבינתיים "50 שבועות" הפכו להיות "עכשיו", ו-"51 שבועות" – "עוד שבוע". זאת אומרת, שאם אני מסתכל על שארית זרם התקבולים, (ג) ו-(ד) הפכו ל-(א) ו-(ב) בהתאמה. אך אני מעדיף את (א) על פני (ב). זאת אומרת, שכאשר יחלפו 50 השבועות הראשונים, אתחרט על כוונותיי הטובות להמתין שבוע נוסף, ואם האפשרות עדיין בידי – ייתכן שאתפתה לא להמתין כפי שתכננתי אלא לקחת את 100 השקלים כבר "עכשיו" (בשבוע ה-50).

לשון אחר: בדוגמה זו, מי שמעדיף (א) על פני (ב) אך (ד) על פני (ג) אינו מקיים **עקביות דינאמית (dynamic consistency)**: הוא יבחר תוכנית פעולה מסוימת בהתחלה, אך בשלב מסוים של ביצועה הוא יעדיף להחליף את התוכנית המקורית. (למעשה מסתתרות כאן עוד מספר הנחות, למשל, שהבחירה בין זרמי תקבולים תלויה אך ורק בזרמים עצמם, ולא בזמן שבו הם מתקבלים, וכן לא בהיסטוריה, היינו בתחילית התקבול שכבר חלפה.) כל נוסחת נכיון שבה יהיה מקדמי נכיון (δ) שונים מתקופה לתקופה לא תקיים עקביות דינאמית בנקודה מסוימת. ולכן, עקביות דינאמית מצדיקה את הנוסחה המקובלת בכלכלה, שבה מקדם הנכיון הוא פונקציה מעריכית בזמן – δ^t עבור δ כלשהו.

מכיון שיש מספר לא מבוטל של אנשים שבוחרים (א) על פני (ב) אך (ד) על פני (ג), אתם רשאים לשאול מה הטעם בנוסחה שלנו. ובכן, עלינו להבחין בין שימוש נורמטיבי לתיאורי. בצד הנורמטיבי, אין להתרגש מכך שיש אנשים שאינם מקיימים אקסיומה מסוימת. נהפוך הוא: תיאוריה נורמטיבית שממילא מתאימה למציאות אינה שימושית. רק כשתיאוריה נורמטיבית מבחינה שלא כולם מתנהגים כפי שהיא מציעה, היא ששה אלי קרב ומקווה לשכנע אנשים להתנהג אחרת מאשר הם נוהגים כעת. השאלה הנורמטיבית היא, אפוא, לא האם אנשים ממילא מקיימים הנחה מסוימת, אלא האם הם <u>היו רוצים</u> לקיימה, וכאן העקביות הדינאמית משכנעת רבים שלפחות נורמטיבית, הנוסחה בעלת מקדם הנכיון הקבוע היא ראויה ונכוחה.

לצרכים תיאוריים, הפרות הנוסחה הפשוטה הם בעייתיות. בפרט, מסתבר שהפרות אלו קשורות למגוון בעיות החלטה הדורשות שליטה עצמית. למשל, נניח שאני מנסה להפסיק לעשן. לא כל כך מתחשק לי להפסיק, וזה די קשה, ולכן אני מחליט לא להפסיק היום. זאת אומרת שאני מעדיף לעשן היום ולהפסיק החל ממחר מאשר להפסיק החל מהיום. אני מקבל החלטה להפסיק לעשן ביום 20=t, ולא יום אחד מאוחר יותר. זאת אומרת, כרגע, בזמן 0=t, אני מעדיף לעשן 20 יום ואחר-כך להפסיק מאשר להפסיק רק ביום ה-21. אך לאחר 20 יום חזרתי לבחירה שבין היום למחר, ואני עלול לא להפסיק לעשן כפי שהבטחתי לעצמי. והוא המצב בהתחלת הדיאטה ולימודים לקראת המבחן וכו'. ודוגמה כלכלית חשובה וכואבת היא חסכון: יש לנו פיתוי להחליט להתחיל לחסוך בעתיד, אך כשהעתיד הזה הופך להווה, לעדכן את תאריך תחילת החסכון.

מכיון שאנשים רבים מגלים קשיים בהפעלת שליטה עצמית כגון זו, יש מקום לערער על ריבונות הפרט ולשאול, האין לכפות עליו בחירות שבאופן אידאלי היה מבצע בעצמו. למשל, איסור על

שימוש בסמים. או חיוב חסכון לפנסיה. ואכן, גם מדינות ליברליות למדי מגבילות את חופש הפרט בנושאי חסכון לפנסיה, כאשר חלק מההצדקה להגבלת חירויות הפרט הם הקשיים שיש לאנשים לשמור על עקביות דינאמית.

ובמה נשתמש במודלים שלנו? ובכן, הבה נתחילה עם הנוסחה הקלאסית. כשתגדלו תיחשפו גם למודלים של כלכלה התנהגותית שבהם מקדם הנכיון מתקופה אחת לבאה אינו קבוע. המודל הפופולארי ביותר מסוג זה נקרא "מודל β-δ" (ולעתים מתייחסים אליו תחת הכותרת "העדפות היפרבוליות", למרות שהשניים אינם זהים), והוא מניח את הפונקציה הבאה:

$$U(c) = U(c_0,c_1,c_2,\dots) = u(c_0) + \beta\sum_{t=1,\dots} \delta^t u(c_t)$$

כאשר $0<\beta,\delta<1$. וכל ההבדל בין מודל זה למודל הקלאסי הוא בשלב הראשון: יחס המקדמים בין תקופה 0 לתקופה 1 הוא $\beta\delta$, ואילו יחס המקדמים בין כל שתי תקופות עוקבות מאוחרות יותר הוא רק δ.

אולם הבה נחזור אל בעיות שאפשר לצייר, הלוא הן המקרה $T=1$. ובבעיות אלו בסך הכל יש מקדם נכיון אחד (ולא ניתן אפילו לשאול אם הוא משתנה מתקופה לתקופה). ולכן אנו מקבלים את הפונקציה

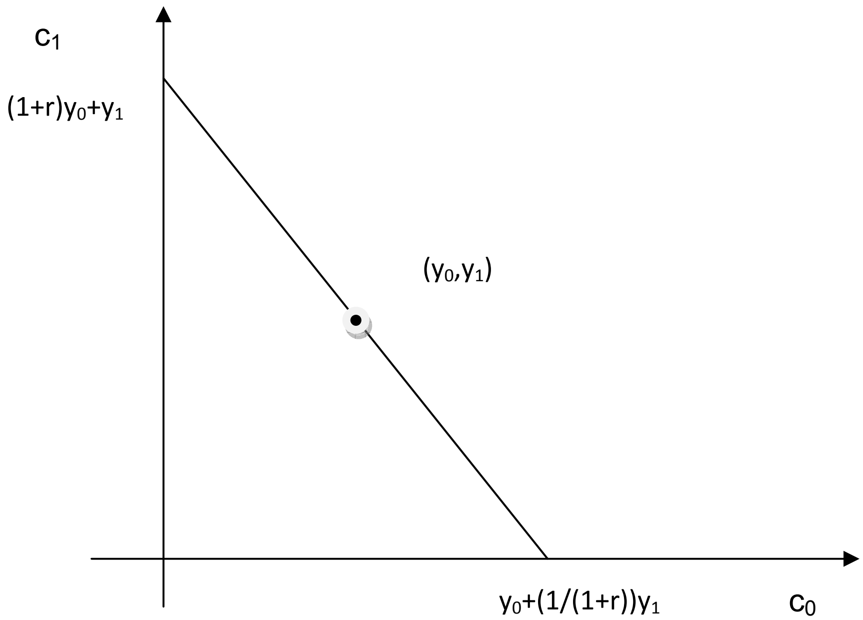
$$U(c) = U(c_0,c_1) = u(c_0) + \delta u(c_1)$$

<u>**קבוצת התקציב**</u>

מהן האפשרויות העומדות בפני הפרט? נניח שעומדת לרשותו הכנסה y_0 בתקופה 0 והכנסה y_1 בתקופה 1. אם אין לו אפשרות להעביר הכנסה מתקופה לתקופה, קבוצת התקציב שלו היא פשוט הנקודה (y_0,y_1) (או, בהנחה של free disposal, נקודה זו וכל מה שלמטה ומשמאל לה). במקרה זה גם לא יהיה קשר מעניין בין התקופות, וניתן לפתור את בעיה הצרכן בכל תקופה לחוד. אך במציאות יש אפשרות להעביר כסף בין תקופות: מההווה לעתיד ע"י חסכון ומהעתיד להווה ע"י הלוואות.

נניח ראשית שיש שוק הון משוכלל המאפשר העברת הכנסה מתקופה לתקופה באותו שער רבית r. היינו, שקל המושקע היום יניב $(1+r)$ שקלים עוד שנה, ושקל הנלווה היום ידרוש החזר של $(1+r)$ שקלים עוד שנה. בהנחה זו אנו מקבלים קו תקציב ישר ופשוט: הרינו שוב במצב שבו

לצרכן יש מתת תחילי – הלוא הוא (y_0,y_1), והוא עומד בפני קו תקציב המוגדר ע"י סל זה והמחירים היחסיים:



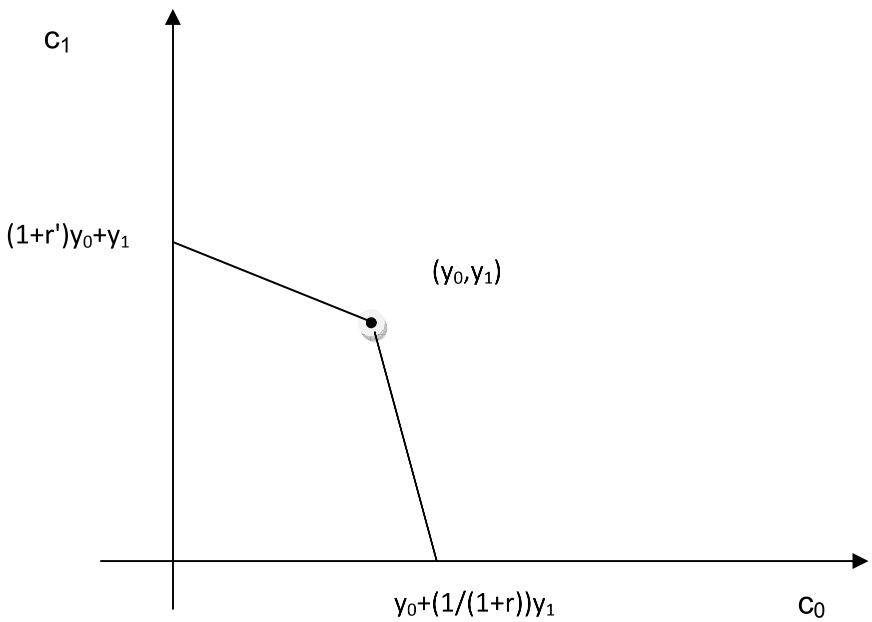
אם הצרכן יחליט לנצל את כל הכנסתו היום (בתקופה $t=0$), יוכל להשתמש בהכנסה הקיימת, y_0, וגם ללוות סכום נוסף כנגד הכנסה עתידית. כמה יוכל ללוות? מכיון שיהיו לו עוד y_1 שקלים מחר (בתקופה $t=1$), יוכל ללוות עד $(1/(1+r))y_1$ שקלים (שמחר יהיו שווים בדיוק y_1). סה"כ יעמדו לרשותו היום $y_0+1/(1+r))y_1$ שקלים.

אם, לעומת זאת, הצרכן ירצה לנצל את כל הכנסתו מחר, החשבון יהיה דומה: y_0 השקלים שקיימים היום, אם ייחסכו, יניבו רבית ויצמחו ל – $(1+r)y_0$ שקלים מחר. בנוסף ל- y_1 שיתווספו מחר, הצרכן יגיע להכנסה כוללת (מחר) של $(1+r)y_0+y_1$ שקלים. בין שתי נקודות קיצוניות אלו, כל קומבינציה לינארית היא אפשרית וכך מתקבלת קבוצת התקציב שלעיל, ונוסחת קו התקציב היא

$$(1+r)c_0 + c_1 = (1+r)y_0 + y_1$$

בחיים העגומים שלנו שער הרבית אינו זהה כאשר אנו לווים וכאשר אנו מלווים (חוסכים). טיול קצר ברחבי העיר ומבט על כמה מבנייני הבנקים מעיד שכנראה יש הבדל בין הרביות. (טוב, נו, זה לא ממש הוכחה: ייתכן שהבנקים מרוויחים כסף רק מהשקעת כספי החוסכים בפירמות

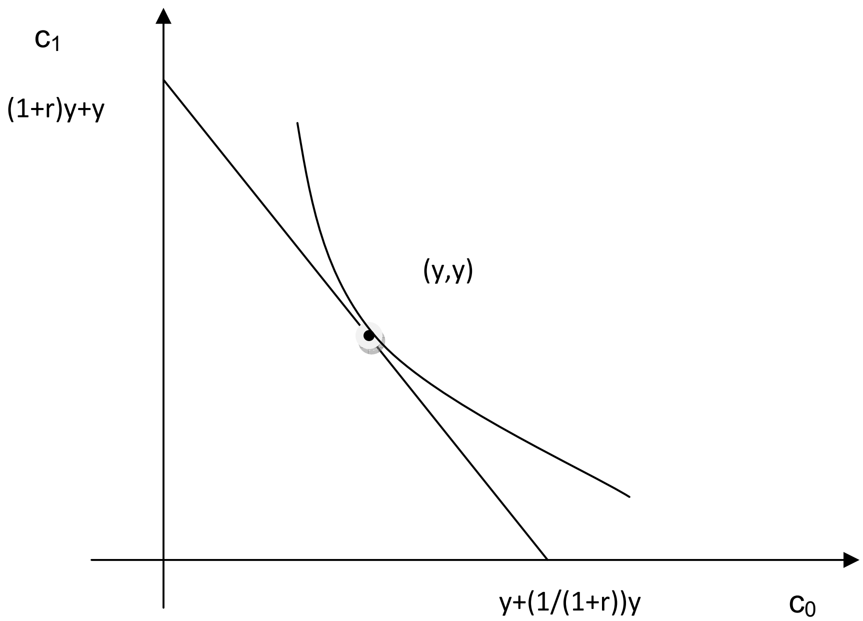
יצרניות שעתידות להניב רווחים הרבה. אז כדי להוכיח את אי-הסימטריה בין הרביות כדאי לדבר עם שני פקידים בבנק, פעם כחוסכים ופעם כלווים.) ואז מתקבלת קבוצת תקציב המוגדרת ע"י שני קטעים, שניהם יוצאים מהנקודה ההתחלית (y_0,y_1) אך שיפועיהם שונים:



כאשר r היא הרבית שאנחנו משלמים כאשר אנו לווים מהבנק, ואילו 'r (המקיימת r'<r) היא הרבית אותה אנו מקבלים כשאר שנו מפקידים בבנק את חסכונותינו. וחסד גדול עושים עמנו הבנקים כאשר הם נותנים לנו רבית נמוכה מזו אותה הם גובים מאתנו, שהרי כך הם מבטיחים שקבוצת התקציב נשארת קמורה.

<u>בחירה אופטימלית</u>

ולא נותר לנו אלא לחבר בין ההעדפות לקבוצת התקציב כדי לחפש נקודות אופטימליות. נתחיל במצב שבו שער הרבית זהה לחסכון ולהלוואה. נניח גם שהכנסות הצרכן קבועות, היינו, ש- $y_0=y_1=y$:



מהו השיפוע של עקומת האדישות בנקודה (y,y)? נשים לב שהפונקציה שלנו היא סיכומית:

$$U(c) = U(c_0,c_1) = u(c_0) + \delta u(c_1)$$

ולכן יש לה נגזרות חלקיות פשוטות וחביבות:

$$U_0 = U_0(c_0,c_1) = u'(c_0)$$

$$U_1 = U_1(c_0,c_1) = \delta u'(c_1)$$

ויחס הנגזרות הוא

$$U_0/U_1 = u'(c_0)/ \delta u'(c_1)$$

אלא שבנקודה בה אנו דנים, $(c_0,c_1)=(y,y)$ נקבל $u'(c_0)=u'(c_1)$ ולכן

$$U_0/U_1 = 1/\delta$$

ואילו קו התקציב ניתן ע"י

$$(1+r)c_0 + c_1 = (1+r)y_0 + y_1$$

כך שיחס המחירים הוא

$$(1+r)/1 = 1+r$$

נניח ש-

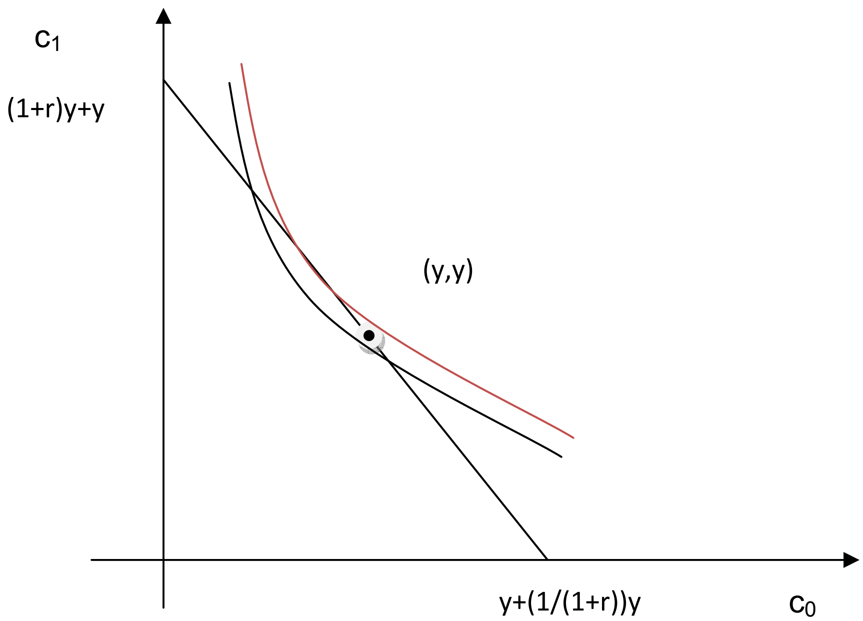
$$1+r = 1/\delta$$

שוויון זה אומר שבנקודה (y,y) יש השקה בין עקומת האדישות לבין קו התקציב כמתואר בגרף לעיל. אפשר לדמיין את הצרכן חושב לעצמו, "שמא כדאי לי להעביר שקל מתצרוכת היום לתצרוכת מחר? הרי השוק מבטיח לי רבית של r, כך ששקל זה יהיה שווה יותר מחר. אלא מאי" – ממשיך הצרכן להרהר – "אני הרי מעדיף לצרוך היום מאשר מחר, ושקל מחר שווה לי רק $\delta<1$ שקלים היום. כך ש- $(1+r)$ השקלים שאקבל מחר יהיו שקולים ל- $(1+r)\delta=(1/\delta)\delta=1$ שקלים היום. מכאן, שלא ארוויח דבר מחסכון זה." ובאופן דומה, אם יחשוב הצרכן ללוות על חשבון הכנסתו העתידית, יגלה ששקל נוסף היום ידרוש ממנו לוותר על $(1+r)=1/\delta>1$ שקלים מחר, וסכום זה מחר גורע מהתועלת $\delta(1/\delta)=1$ שזה בדיוק התוספת לתועלת שיניב שקל נוסף היום. במצב זה ניתן לחשוב שיחס ההמרה בין שקל היום לשקל מחר המאפיין את הצרכן – δ – הוא בדיוק יחס ההמרה שבו "בחר" השוק, היינו $1/(1+r)$. אם היה השוק מורכב אך ורק מצרכנים בעלי מקדם נכיון δ, היה אפשר לצפות לשער רבית זה, ולא היה מתקיים מסחר מכיון שכל הגורמים בשוק היו מעריכים הווה ועתיד באותו אופן.

אם, לעומת זאת,

$$1+r > 1/\delta$$

אזי השוק מעריך את ההווה יותר מאשר הצרכן: השוק מוכן לתת $(1+r)$ שקלים מחר כנגד כל שקל היום, ואילו הצרכן מבקש רק $1/\delta$ שקלים מחר כנגד שקל היום. במצב זה ירצה הצרכן להלוות כסף, זאת אומרת יבחר לחסוך:



ועקומת האדישות הגבוהה יותר תשיק לקו התקציב בנקודה המקיימת

$$c_0 < y \;; \qquad c_1 > y$$

וליתר דיוק

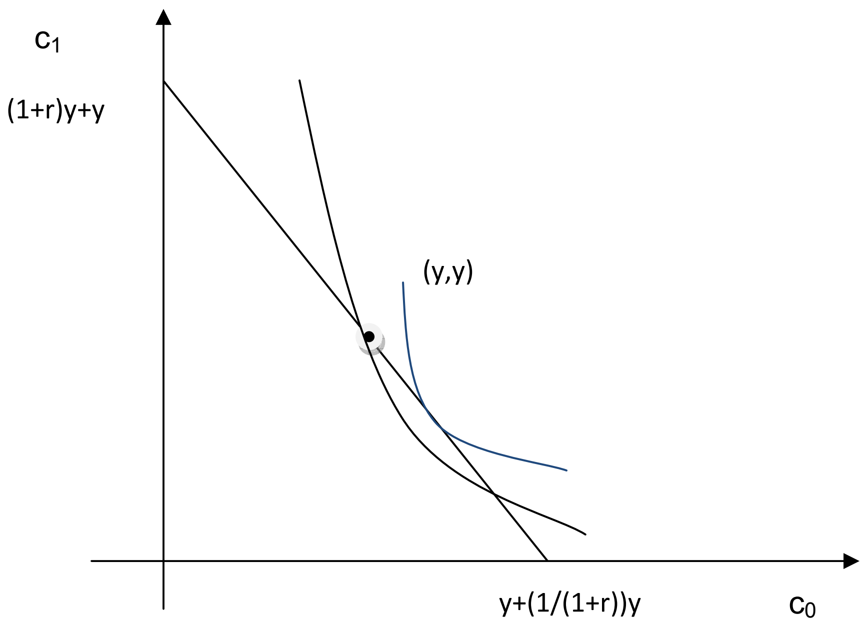
$$c_1 - y = (1+r)\,(y - c_0) > 0$$

מה ימנע מהצרכן להמשיך ולהלוות, ולחסוך את כל הכנסתו בתקופה 0, לפי הגיון דומה? ובכן, בל נשכח שהחשבון הנ"ל התבסס על ההנחה שאנחנו בנקודה $c_0=c_1=y$. לאחר שהצרכן החליט לחסוך סכום מסוים, כבר איננו באותה נקודה: c_0 ירד ו- c_1 עלה. מכיון ש- u פונקציה קעורה, הנגזרת ב- c_0 עלתה וזו ב- c_1 ירדה. ולכן יש לצפות לכך שהצרכן יפסיק להלוות לשוק. אינטואיטיבית, כאשר הצרכן כבר חוסך הרבה, c_0 נמוך וכל שקל "שווה" יותר במונחי תועלת, כך שקשה יותר להיפרד מהשקל הזה, ואפילו אם יוכפל ב- (1+r), תרומתו השולית לתועלת בתקופה 0 גדולה מתרומתו לתועלת, לאחר ההכפלה ב- (1+r), בתקופה 1.

המצב יהיה, כמובן, הפוך אם יתקיים אי השוויון

$$1+r < 1/\delta$$

במצב זה השוק מעריך את ההווה פחות מאשר הצרכן: השוק מוכן לתת רק (1+r) שקלים מחר כנגד כל שקל היום, ואילו הצרכן חושב ששקל דהיום מקביל ל- 1/δ שקלים מחר. במצב זה ירצה הצרכן ללוות כסף:



ועקומת האדישות הגבוהה יותר תשיק לקו התקציב בנקודה המקיימת

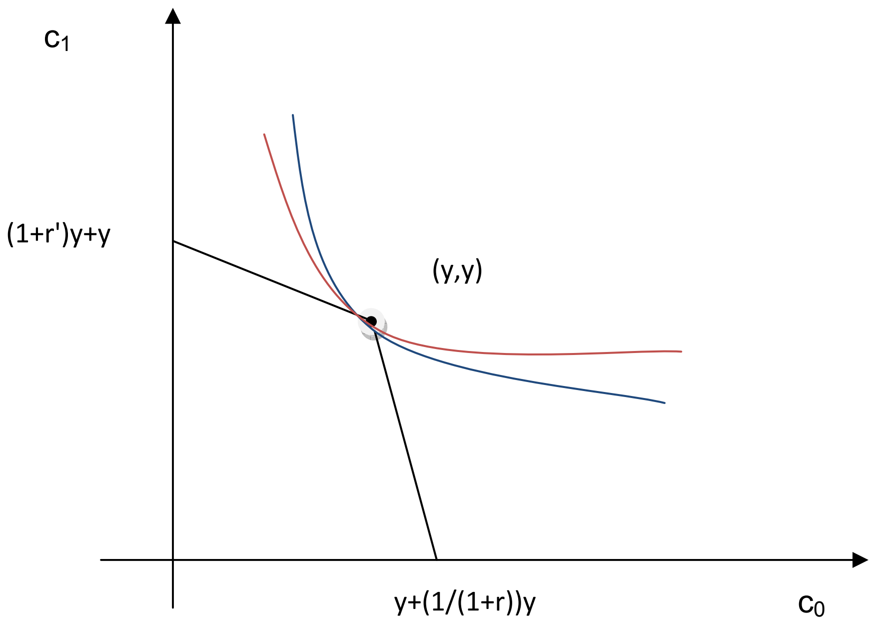
$$c_0 > y \; ; \qquad c_1 < y$$

ויתקיים

$$y - c_1 = (1+r)\,(c_0 - y) > 0$$

והצרכן ילווה היום וישלם את חובו בעתיד. גם כאן, הצרכן יחליט להמשיך ללוות רק אם אי השוויון ימשיך להתקיים כאשר יחס התועלות שוליות (שהיה 1 בנקודה (y,y)) נכנס לתמונה.

מכל הסיפור הנ"ל אפשר לקבל את הרושם שהצרכן כמעט תמיד יעשה משהו – יחסוך או ילווה, כי העדר פעילות בשווקי ההלוואות יכול לקרות רק במקרה המאוד-מיוחד שבו 1+r = 1/δ. אך אם נזכור שהרביות בשני צדי השוק שונות, נראה שיותר סביר למצוא צרכנים שאינם רוצים לא מדובשו ולא מעוקצו של שוק ההלוואות:



-- עקומות אדישות עם שיפועים רבים ומגוונים יכולות ל"השיק" לקבוצת התקציב בסל ההתחלי (y,y).

תרגילים: בשלב זה אתם אמורים להיות מסוגלים לפתור:

בעיות 15,16 בבחינה לדוגמה מס' 1

בעיות 16,17 בבחינה לדוגמה מס' 2

בעיה 18 בבחינה לדוגמה מס' 3

סיכום שיעור 11 ובו יסופר על בעיות בחירה בתנאי אי ודאות

נושא נוסף אשר ניסה מדי פעם להרים את ראשו במהלך הדיונים, אך אשר הצלחנו להתחמק ממנו באלגנטיות מעוררת הערכה, הוא אי-ודאות. למשל, כאשר דנו במוצרים שהביקוש אליהם עולה בעקבות עליית מחירם, רצינו להפריד בין מוצרי גיפן "אמיתיים" לבין אפקטים של אי ודאות והאיתות שהמחיר יכול להוות. כדי לנתח תופעה זו, אנו נדרשים למודל שבו הצרכן אינו יודע בדיוק מה איכות המוצר אותו הוא מקבל, הווה אומר, מודל שבו יש אי-ודאות לגבי ערכו האמיתי של המוצר, או לגבי משך הזמן שבו המוצר יעבוד וכו'. אך אי ודאות קיימת גם במקרים אחרים. למשל, כשאנו סוחרים בשווקים פיננסיים. או קונים ביטוח לרכב, או ביטוח בריאות. או מתכננים חסכון לעת זקנה, אך לא בטוחים כמה שנים עוד נחיה. או כשאנו מחליטים ללמוד מקצוע בלי לדעת מה יהיה הביקוש בשוק כאשר נסיים בשעה טובה את חוק לימודינו. למעשה, יש מעט מאוד החלטות שבהן אין אי ודאות כלל – אפילו כשאנחנו מזמינים חומוס בקפטריה יש מקום לספק לגבי איכותו או לגבי אורך התור וכו'. קיצורו של דבר, אי ודאות היא נושא שקשה להתעלם ממנו.

בפרק הקודם הבטחתי שאספר כיצד קדם יעקב ליוסף בנו ככלכלן חלוצי. ובכן, בבראשית ל"ב מסופר על הפגישה בין יעקב לעשיו. כזכור, יעקב קנה מעשיו את הבכורה, אך כדי להשלים עסקה מפוקפקת זו הוא היה צריך להתחפש לעשיו כדי לקבל את הברכה מיצחק אביהם, שהיה כבר עיוור בשלב זה. עשיו היה די שבור כשגילה שברכת אביו ניתנה ליעקב, מה גם שהברכה (שנועדה לו) הבטיחה שהבן המבורך יהיה גביר לאחיו ושישתחוו לו בני-אימו. היו ליעקב, אם כך, סיבות טובות לחשוש מהפגישה עם עשיו. ואז הסיפור ממשיך:

> וַיִּשְׁלַח יַעֲקֹב מַלְאָכִים לְפָנָיו, אֶל-עֵשָׂו אָחִיו, אַרְצָה שֵׂעִיר, שְׂדֵה אֱדוֹם. וַיְצַו אֹתָם, לֵאמֹר, כֹּה תֹאמְרוּן, לַאדֹנִי לְעֵשָׂו: כֹּה אָמַר, עַבְדְּךָ יַעֲקֹב, עִם-לָבָן גַּרְתִּי, וָאֵחַר עַד-עָתָּה. וַיְהִי-לִי שׁוֹר וַחֲמוֹר, צֹאן וְעֶבֶד וְשִׁפְחָה; וָאֶשְׁלְחָה לְהַגִּיד לַאדֹנִי, לִמְצֹא-חֵן בְּעֵינֶיךָ. וַיָּשֻׁבוּ, הַמַּלְאָכִים, אֶל-יַעֲקֹב, לֵאמֹר: בָּאנוּ אֶל-אָחִיךָ, אֶל-עֵשָׂו, וְגַם הֹלֵךְ לִקְרָאתְךָ, וְאַרְבַּע-מֵאוֹת אִישׁ עִמּוֹ. וַיִּירָא יַעֲקֹב מְאֹד, וַיֵּצֶר לוֹ; **וַיַּחַץ אֶת-הָעָם אֲשֶׁר-אִתּוֹ, וְאֶת-הַצֹּאן וְאֶת-הַבָּקָר וְהַגְּמַלִּים--לִשְׁנֵי מַחֲנוֹת. וַיֹּאמֶר, אִם-יָבוֹא עֵשָׂו אֶל-הַמַּחֲנֶה הָאַחַת וְהִכָּהוּ--וְהָיָה הַמַּחֲנֶה הַנִּשְׁאָר, לִפְלֵיטָה.**

ומדוע היה יעקב כלכלן? האם משום שלקח דבר במרמה? חלילה וחס, יש כלכלנים ישרים והגונים. האם משום שהתחנף לחזק הימנו? לא ולא – יש כלכלנים גאים ועצמאיים. יעקב מקבל כאן – והפעם בדין – את הבכורה הכלכלית מכיון שהוא המציא את רעיון פיזור הסיכון. מכיון שאינו יודע היכן יתקוף עשיו, הוא מעדיף לחלק את הסיכון, ובכך הוא מגדיל את ההסתברות שאחד משני החצאים יוכה, אך מקטין את ההסתברות שכל המחנה יאבד. פרט המעדיף את תוחלתו של משתנה מקרי בוודאות על פני המשתנה המקרי עצמו ייקרא **שונא-סיכון**, וניתן לחשוב על התנהגותו של יעקב כשונאת-סיכון במקרה זה.

ההיסטוריה של תורת קבלת ההחלטות היא סיפור מרתק בפני עצמו. צעד מרשים מאוד ביצע בלייז פסקל (Blaise Pascal), מתמטיקאי, פיזיקאי ופילוסוף שחי (לא כל כך הרבה) בצרפת במאה ה-17. הוא אחת הדמויות הבולטות בהמצאת ההסתברות ומושג התוחלת. אלה הומצאו בהקשר של משחקי מזל, שבהם ההסתברויות ידועות, או לפחות ניתנות לחישוב ע"י מי שלקח קורס בהסתברות (או מי שהמציא תורה זו). אך פסקל, שהפך בשלב מסוים של חייו לאדוק מאוד באמונתו והתעסק בעיקר בתיאולוגיה, פרץ דרך חדשה והרחיב את מושג ההסתברות ב"הימור" המפורסם שלו. בקטע קצר זה, פסקל מנסה לשכנע שומע היפותטי מדוע כדאי לו לנהל חיים שיהפכו אותו, עם הזמן, למאמין. יש לציין שעצם הצגת השאלה היא התפתחות מדהימה. קצת לפניו, דקרט, וקצת אחריו, לייבניץ, עדיין ניסו להוכיח שאלוהים קיים, לכאורה ללא להניח דבר. התעסקות זו היתה מקובלת גם בימי הביניים, והיא הצמיחה רעיונות גדולים ויפים, כמו הדיון בספק של דקרט, הלוא הוא ה cogito ergo sum המפורסם (שנכתב גם בצרפתית אבל בלטינית הוא מצלצל יותר טוב). עם זאת, היום קשה לקבל טיעונים אלה ורובם נשמעים קצת כמו אקרובטיקה מנטאלית, המערבת מגוון מונחים שאינם מוגדרים היטב עם טיעונים שאינם בהכרח נובעים מההנחות. (לזכות דקרט ניתן לומר שדי ברור מכתביו שהוא פחד שגורלו יהיה כגורל גלילאו, וכדי לעסוק במדע בשקט היה חשוב לו לא להסתבך עם הכנסיה. אם חטא, לא חטא בהכרח בחוסר הגיון אלא בנכונות לעגל פינות לפני ששרפה על המוקד מוצעת לו כאלטרנטיבה מוחשית.) על רקע זה, די מדהים לקרוא שבאותה תקופה פסקל, שהיה עצמו מאמין אדוק, שינה את השאלה – במקום לשאול האם אלוהים קיים, הוא שאל האם כדאי להאמין באלוהים, וגם היה רגיש מספיק לרציונליות של הבחירה באמונה: הוא מבהיר שהשאלה אינה האם לבחור להאמין כעת, אלא האם לנהל אורח חיים שיהפוך את האדם למאמין בבוא הזמן.

וטיעונו של פסקל בזכות האמונה הוא שאפשר לחשוב על שני מצבים, שנקרא להם "מצבי טבע" או "מצבי עולם": או שאלוהים קיים, או שלא. וניתן לחשוב על שתי פעולות אפשריות: לבחור (לנהל אורח חיים שיגרום לנו) להאמין, או לא. כך, פסקל מתאר במילים **מטריצת החלטה** שנראית בגדול כך:

מצב טבע 1	מצב טבע 2	
תוצאות		**פעולה א**
		פעולה ב

הרעיון הבסיסי במטריצה זו הוא ההפרדה בין מה שנתון לשליטת המחליט ומה שלא. החלטות אפשריות הן הפעולות המתוארות ע"י שורות במטריצה. נסיבות שונות שעולות להיווצר, אך שאינן בשליטת המחליט, מתוארות כ"מצבי טבע", וכל אחד מהם מקביל לעמודה במטריצה. הפעולה ומצב הטבע קובעים יחד את התוצאה המתקבלת. לתוצאות נייחס תועלת, המתארת את מידת רציותן, ולמצבי הטבע – הסתברות, המתארת את מידת סבירותן. ההפרדה המקובלת עלינו בין הרצוי למצוי מחייבת שהערכת ההסתברות של מצבי הטבע השונים תהיה בלתי תלויה במידת רציותן של התוצאות הקשורות למצבים אלה, ולהפך: הערכת רציות התוצאות לא תושפע ממידת הסבירות של מצבי הטבע שבהן הן קורות.

ובמקרה של פסקל, יש שני מצבי טבע – בהתאם למצב קיום האל, שעליו אין למחליט שליטה. ויש גם שתי פעולות אפשריות: לבחור להפוך למאמין או לא, שעליהן יש למחליט שליטה. (נניח כרגע לבעיות של רצון חופשי. אמנם ניתן להתלות באמירה, "הכל בידי שמים חוץ מיראת שמים", אך אין ממש צורך להיכנס לנושא – בעית ההחלטה מניחה שיש החלטה. גם אם ההחלטה שתתקבל בסופו של דבר נגזרה מראש, מאוד סביר שנגזר מראש שהמחליט ירגיש כאילו הוא מחליט ושיצייר מטריצות החלטה כעין זו.)

ראשית, פסקל טוען שאין לאדם מה להפסיד מבחירה באמונה: אם אלוהים לא קיים, לא קרה כלום, אך אם אלוהים קיים, מובטח למאמין העולם הבא, וזהו בבחינת תשלום אינסופי. לכן, הוא

טוען, עדיף להאמין. אולי הטיעון לא לגמרי משכנע, אך חשוב לשים לב: פסקל מציג כאן את המושג של **בחירה שלטת (dominant):** מה שלא יהיה מצב הטבע, אפשרות אחת טובה לפחות כמו השניה, ובמצבים מסוימים היא טובה ממש. זה מזכיר את מושג השליטה על-פי פארטו: אם נחליף את מצבי הטבע בפרטים שונים בחברה, הרי שזהו אותו מושג בדיוק.

וכאן אני מניח שרבים מכם מרגישים מרומים: הא כיצד האמונה היא אלטרנטיבה שלטת? האין עלות לאמונה? הרי האמונה אוסרת עלינו מגוון חוויות שחלקן מענגות למדי. יתרה מזו, אם אין עלות לאמונה, מה היא כבר שווה? סתם להגיד שיש אלוהים, זה הרי כל אחד יכול. ובכן, פסקל ממשיך את טיעונו. למרות שחייו האישיים היו כנראה נזיריים למדי (הוא לא הצטרף למנזר, אך אחותו היתה במנזר Port-Royal והוא היה קרוב אליהם) – הוא מודה שיש עלות באמונה, בויתור על תענוגות העולם הזה. אך כאן מגיעה הנקודה העיקרית: מכיון שהתענוגות המזומנים לו לאדם בעולמנו הם סופיים, ומכיון שהחיים בעולם הבא הריהם תשלום אינסופי, טוען פסקל, מספיקה הסתברות קטנה מאוד לכך שאלוהים יהיה קיים כדי שיהיה עדיף לבחור באמונה. המטריצה שפסקל מתאר נראית בערך כך:

אלוהים לא קיים	**אלוהים קיים**	
0	∞	**להפוך למאמין**
c		**להפוך ללא-מאמין**

כאשר c הוא גודל חיובי אך סופי, והוא מתאר את העונג שאפשר להשיג בעולמנו זה אם אנו משוחררים מכבלי האמונה. במטריצה השארתי תא אחד ריק: מה קורה ללא-מאמין אם אלוהים בסופו של דבר קיים? לעתים קרובות נוטים למלא בתא זה ערך של $-\infty$, המתאר את שריפת החוטאים בגיהנום. אך פסקל עצמו לא ממש דיבר על הנושא, והטיעון שלו תקף גם אם נשים

שם תשלום סופי. כנראה שהיה לו גם חוש לא רע לשיווק: שיווק חיובי, אומרים לנו החוקרים דהיום, עובד טוב יותר משלילי. כך או כך, למרות שפסקל אינו אומר במפורש שהוא משתמש במושג התוחלת (שהוא עצמו המציא בהקשר אחר), הכוונה די ברורה: גם אם ההסתברות של מצב הטבע "אלוהים קיים" היא קטנה מאוד, אך חיובית, $p>0$, **תוחלת התועלת** של הפעולה "להפוך למאמין" גדולה מזו של הפעולה "להפוך ללא-מאמין". הווה אומר: פסקל מציע שנייחס לכל מצב טבע הסתברות, ולכל תוצאה – תועלת. בהינתן אלה, כל פעולה הופכת להיות משתנה מקרי שמגדיר לנו התפלגות של ערכי התועלת שיכולים להתקבל מהפעולה. רעיון המקסימיזציה של תוחלת התועלת הוא לחשב לכל פעולה את התוחלת של המשתנה המקרי הנ"ל – תוחלת התועלת שלה – ולבחור בפעולה הממקסמת גודל זה.

לפני שניפרד מפסקל, נציין שוב שהטיעון מאוד חדשני. הוא איננו בהכרח משכנע, בעיקר מכיון שיש אלוהויות אפשריות רבות. בפאריס של המאה ה-17 לא היו הרבה אלטרנטיבות לאל הקתולי.[13] אך כיום יש גם לאל המוסלמי לא מעט תומכים, וכאשר מכניסים עוד אל לתמונה, ומסתבר שמה שדורש אל אחד הוא חטא בל יכופר בעיני האחר, הטיעון מתמוטט. עם זאת, השאלה שפסקל הציג היתה מודרנית, בהירה, וחדשנית. ובדרכו לענות עליה, הוא המציא כמה מושגים חשובים: מטריצת ההחלטה, רעיון השליטה של אלטרנטיבה אחת על אחרת, עקרון תוחלת התועלת ועוד לפחות רעיון אחד שימתין להזדמנות אחרת. כמו-כן, יש לשים לב שפסקל הציע כאן גם את רעיון **ההסתברות הסוביקטיבית:** מכיון שאין לנו הסתברויות נתונות לקיומו של אלוהים (וגם לא ניתן לתת להסתברות פרשנות של שכיחות יחסית במקרה זה), פסקל מדבר על הסתברויות סוביקטיביות, שיכולות להשתנות ממקבל החלטות אחד למשנהו. ההסתברות אינה נתונה ואינה ניתנת לחישוב כמו במצב של משחקי מזל, מטבעות, קוביות, קלפים וכיו"ב. אך הכלי המתמטי של תורת ההסתברות יכול לשמש לנו דרך לתפוס את מידת הסבירות של מאורעות שונים בעינינו שלנו, ולנסות לקבל החלטות באופן יותר מסודר בעזרת כלי זה.

רעיון תוחלת התועלת עלה שוב בכתביו של דניאל ברנולי (Daniel Bernoulli), שהציע את מקסימיזציה תוחלת התועלת (ב-1738), כמודל המתאר התנהגות של פרטים בתנאי סיכון. הוא אף טען שפונקצית התועלת מכסף היא לוגריתמית:

---

[13] למרות שפסקל עצמו היה שייך לזרם שכמעט לא היה קתולי, ואחז בתפיסות שלא היו לרוח הכנסייה. היום, אגב, לא ניתן למצוא את מנזר Port Royal מכיון שהאפיפיור הורה להחריב אותו, וזה קרה לא הרבה אחרי מותו של פסקל.

$$u(x) = \log(x)$$

כי פונקציה זו מקיימת את התנאי האינטואיטיבי שהתועלת השולית מהכסף עומדת ביחס הפוך לכמות הכסף שברשות הפרט. (זכרו – מדובר במאה ה-18, ואף אחד לא שאל למה בדיוק הכוונה ב"תועלת השולית".) ברנולי דן בתוחלת התועלת באופן מוגבל יותר מאשר פסקל, בשני מובנים: ראשית, אצל ברנולי התוצאות הן סכומי כסף ואילו אצל פסקל יש תוצאות כלליות יותר, כגון חיים לאחר המוות; ושנית, ברנולי דן במצבים של הסתברויות ידועות, "אובייקטיביות", ואילו פסקל תקף בעיה שההסתברויות בה אינן ידועות ולכן הן יכולות להיות רק סוביקטיביות. מצד שני, ברנולי היה מאוד מפורש בהצעת הרעיון של מקסימיזציה של תוחלת התועלת.

ואז עברו מאתיים שנים שקטות, עד אשר מספר חוקרים באמצע המאה ה-20 נתנו ביסוס אקסיומטי לתורת תוחלת התועלת.[14] הווה אומר: הם תיארו אקסיומות על התנהגות הפרט, כגון שלמות וטרנזיטיביות, השקולות לכך שהפרט מתנהג כאילו שהוא ממקסם תוחלת של פונקצית תועלת מסוימת. תרגיל זה בוצע בשתי גרסאות: **בתנאי סיכון**, כאשר ההסתברויות נתונות, **ובתנאי אי ודאות**, כאשר ההסתברויות אינן נתונות. במקרה הראשון, כשיש הסתברויות, העדפות הפרט יגלו לנו רק את פונקצית התועלת שלו, ובמקרה השני, כשאין אפילו הסתברויות, ההעדפות מגלות לנו גם את פונקצית התועלת וגם את ההסתברות הסוביקטיבית.

כפי שאפשר לנחש, ההנחות של תורת תוחלת התועלת גם הן, כמו כל הנחה אחרת על התנהגות הפרטים, זכו לביקורת נוקבת. עבודותיהם של כהנמן וטברסקי תקפו את התורה באופן ישיר (אך הם לא היו הראשונים[15]), וגם הציעו תורה חלופית. הדיונים בשאלה זו הם עדיין מאוד ערים, ואנחנו לא ננסה להיכנס אליהם בשלב זה. נתחיל בהבנה קצת יותר טובה של התורה הקלאסית.

נניח שיש מספר מצבי טבע $1,\ldots,n$, ושאלטרנטיבה מסוימת x מבטיחה תוצאה x_i במצב טבע i. כהרגלנו, אנו מנסים לפשט את הדברים עד כמה שאפשר, אז נניח ש- x_i הוא סכום כסף, המייצג איזשהו מוצר מצרפי שנקנה בכסף זה. אנו מניחים שלמצב טבע i יש הסתברות p_i, כך ש-

$$\sum_{i=1,\ldots,n} p_i = 1$$

[14] השמות הבולטים בהקשר זה הם: Frank Ramsey, Bruno de Finetti, John von Neumann & Oskar Morgenstern, Leonard Savage.

[15] דוגמאות להפרות של תורת תוחלת התועלת ניתנו בשנות ה-50 ע"י Maurice Allais בהקשר של החלטות בתנאי סיכון ובשנות ה-60 ע"י Daniel Ellsberg בתנאי אי ודאות.

$$p_i \geq 0$$

לפרט יש פונקציית תועלת u, והוא בוחר אלטרנטיבה x המביאה למקסימום את **תוחלת התועלת**

$$EU(x) = \sum_{i=1,\ldots,n} p_i u(x_i)$$

באשר EU מייצג את המלים Expected Utility ומי שחושב על האיחוד האירופי פשוט מבולבל.

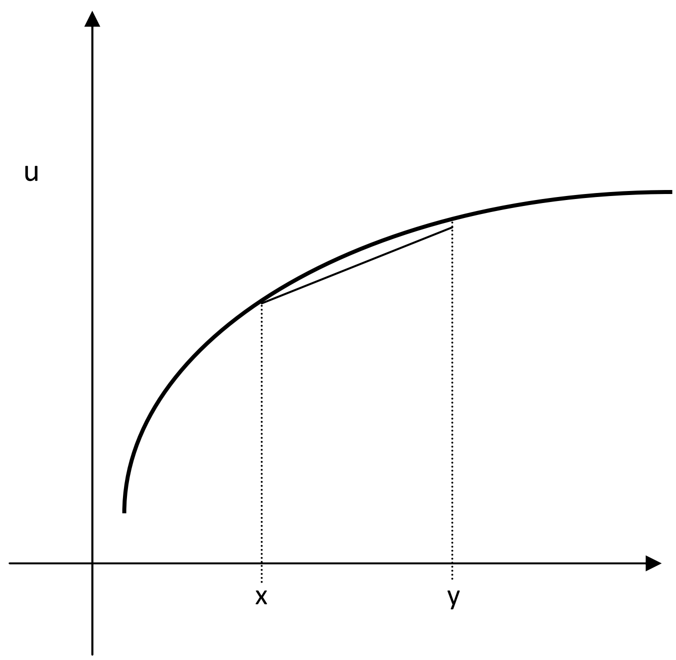
כמו במקרה של העדפות על פני זמן, גם כאן אנחנו מניחים שהפרט מדרג אלטרנטיבות "מורכבות" (שם – זרם הכנסות, כאן – הכנסה לכל מצב טבע) ע"י <u>סכום משוקלל</u> של <u>אותה פונקציית תועלת</u>. במקרה של העדפות על פני זמן, משקלה של תקופה t, שהיה δ^t, מדד את חשיבותה בעיני המחליט: ככל שהתקופה רחוקה יותר בעתיד, משקלה פוחת. במקרה שלנו, המשקל של מצב טבע מסוים מבטא את סבירותו. ככל שמצב הטבע נראה למחליט סביר יותר, ואז הסתברותו p_i גבוהה יותר, כך תגדל ההשפעה של ההכנסה באותו מצב טבע על ההחלטה הכללית.

<u>קעירות u ושנאת סיכון</u>

כמו במקרה של העדפות על פני זמן, גם במקרה של אי ודאות מקובל להניח שפונקציית התועלת u היא קעורה. הדיון בפונקציות קעורות כבר בישר לנו שסכום של פונקציות כאלה ייתן העדפות קמורות. מה משמעות הנחת הקעירות במקרה שלנו? הדמיון להעדפות על פני זמן מספק רמז: שם קעירות u (החד-תקופתית) בטאה העדפה להחלקת תצרוכת על פני זמן. במקרה שלנו, קעירות u (הפועלת על ההכנסה במצב טבע מסוים) תבטא העדפה להחלקת הכנסה על פני מצבי טבע, וליתר דיוק ל<u>שנאת סיכון</u>.

נגדיר את המושג: פרט נקרא **שונא סיכון** אם, לכל משתנה מקרי X המקבל ערכים כספיים, הפרט ימצא את תוחלת המשתנה, E(X), טובה לפחות כמו המשתנה עצמו. זאת אומרת, הפרט יעדיף להיפטר מסיכון אם הוא יכול לשמור על אותה תוחלת הכנסה. שנאת סיכון במובן החזק מוגדרת באותו אופן, כאשר ההעדפה אמורה להיות חזקה, וזאת ניתן לדרוש לכל משתנה מקרי בעל שונות חיובית. (אם מדובר במשתנה מקרי ששונותו אפס, הרי שהוא "מנוון", ובעצם אינו משתנה מקרי אלא קבוע. במצב זה הוא מקבל ערך יחיד בהסתברות 1, וערך זה יהיה גם התוחלת, כך שהפרט יהיה אדיש בין ה"משתנה" לבין תוחלתו.)

מסתבר שבהנחה של מקסימיזציה של תוחלת התועלת, שנאת סיכון שקולה לקעירות הפונקציה u (ושנאת סיכון במובן החזק – לקעירות במובן החזק). נדגים זאת במקרה פשוט. ראשית, נזכיר לעצמנו שקעירות של פונקציה אומרת שגרף הפונקציה נמצא מעל (או לפחות לא מתחת) לכל מיתר שניתן להגדיר עליו:



נניח כעת כי לפרט מציעים הימור "הוגן" (המוגדר כהימור שתוחלתו אפס): הוא יכול להרוויח או להפסיד 100 ₪ בהסתברות 50%-50%. נניח עוד שלפרט יש סכום כסף התחלי (וודאי, ללא סיכון) W. אם יקבל את ההימור, הכנסתו תהיה משתנה מקרי X, המקבל את הערך (W+100) בהסתברות 50%, ואת הערך (W-100) בהסתברות 50%. אם ידחה את ההימור, יישאר בוודאות עם הכנסתו הנוכחית, W, שהיא גם התוחלת של המשתנה המקרי המוצע לו:

$$E(W+X) = 0.5(W+100) + 0.5(W-100) = W$$

לפי ההגדרה של שנאת סיכון, הפרט יבחר לוותר על ההימור. זאת אומרת, הוא יעדיף לקבל W בוודאות.

נתרגם העדפה זו למונחי תוחלת התועלת. הבחירה בהימור תתן תועלת $u(X)$, היינו משתנה מקרי, המקבל את הערך $u(W+100)$ בהסתברות 50%, ואילו את הערך $u(W-100)$ בהסתברות המשלימה, 50% במקרה זה. כך, תוחלת התועלת של ההימור היא

$$E[u(W+X)] = 0.5\cdot u(W+100) + 0.5\cdot u(W-100)$$

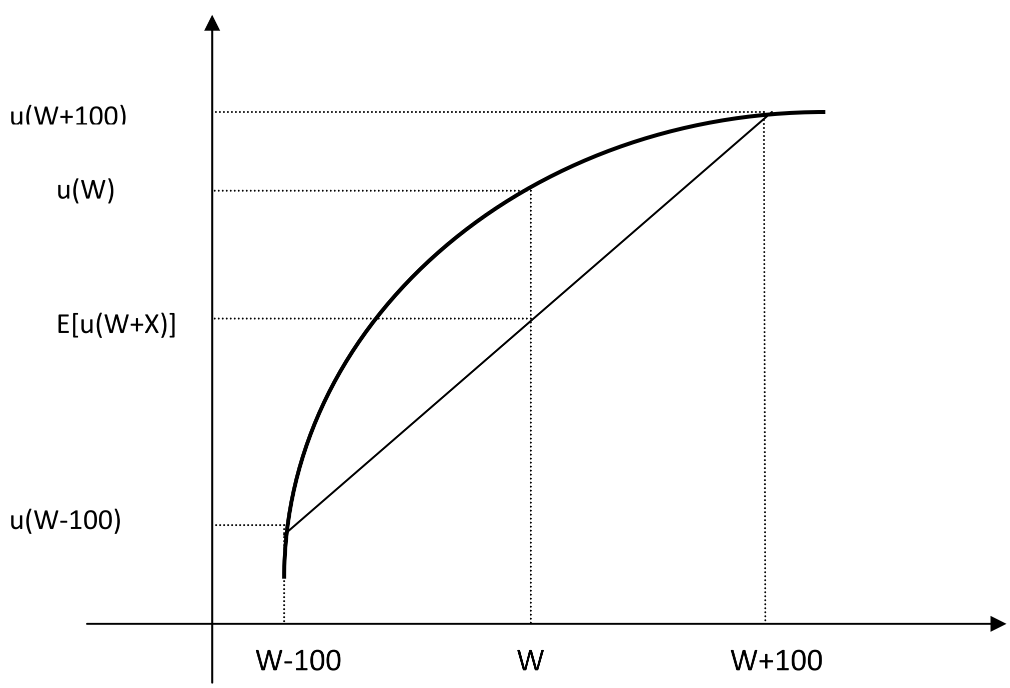
בשעה שתוחלת התועלת של האופציה הבטוחה היא

$$E[u(W)] = 1\cdot u(W) = u(W)$$

ולכן שנאת סיכון גוררת שלכל הכנסה התחלית W ולכל גובה הימור x, תוחלת התועלת מההימור נמוכה מהתועלת של התוחלת: היא

$$E[u(W+X)] = 0.5\cdot u(W+100) + 0.5\cdot u(W-100) \le u(E[X]) = u(W)$$

וקל לראות שאי-שוויון זה יתקיים לפונקציה קעורה:



שימו לב שתוחלת התועלת, שהיא ממוצע 50%-50% בין התועלת הגבוהה, $u(W+100)$, לבין התועלת הנמוכה, $u(W-100)$, נמצאת על הקטע המחבר את הנקודות

$$(W-100 , u(W-100)) \quad , \quad (W+100 , u(W+100))$$

והיא מקבילה לנקודה שהיא באמצע הקטע, מעל W.

ולמעשה אפשר לראות מהציור שפונקציה קעורה תבטיח גם דחיה של הימור הוגן שאיננו מבוסס של הסתברויות 50%-50% (למשל, הימור שבו יש סיכוי גדול יותר לרווח, אך גובה הרווח נמוך מגובה ההפסד האפשרי באופן שהתוחלת נשארת אפס). קצת יותר קשה לראות, אך זה עדיין נכון שאותה תופעה תעמוד בעינה אם מדובר במשתנה מקרי המקבל יותר משני ערכים. וגם ההפך נכון: אם הפרט שונא סיכון, הפונקציה u המתארת את בחירותיו דרך נוסחת תוחלת התועלת תהיה קעורה, כפי שניתן לראות לעיל.

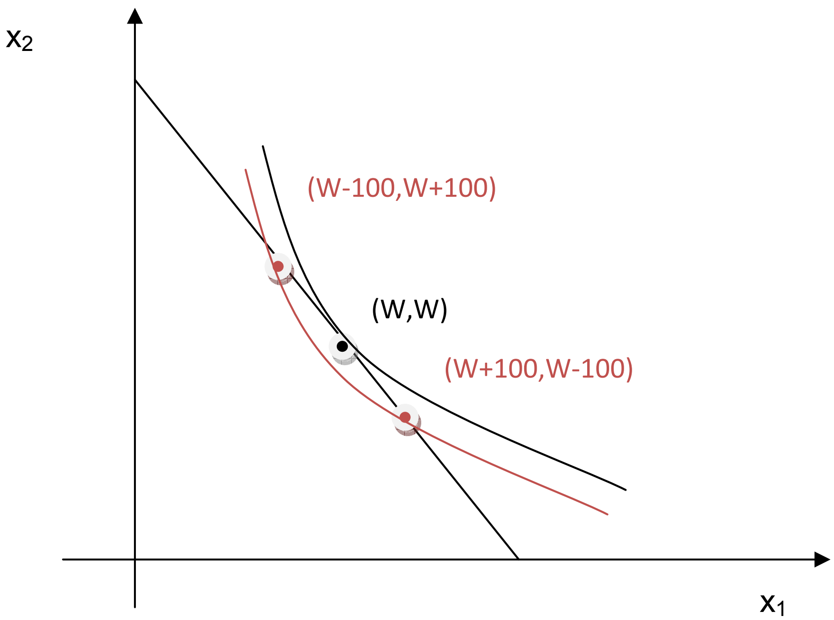
למעשה, **אי שוויון Jensen** מאפיין פונקציה קעורה כפונקציה u שעבורה תוחלת התועלת לעולם אינה עולה על תועלת התוחלת, היינו, שלכל משתנה מקרי X, היא מקיימת

$$E[u(X)] \leq u(E[X])$$

וזוהי בדיוק ההגדרה של שנאת סיכון.

<u>תיאור גרפי במישור המוצרים</u>

כדאי לראות כיצד הניתוח הנ"ל מתייחס לבעית הצרכן הישנה והאהובה שלנו. לצורך זה נתאר את ההכנסה בכל מצב טבע כ"מוצר" נפרד ונקדיש לו ציר משלו. כרגיל, נרד מיד לשני מימדים כדי שנוכל להבין מה אנחנו רואים. נניח, אפוא, שני מצבי טבע, ונתאר אלטרנטיבה $x=(x_1,x_2)$ כנקודה במישור המוצרים, כאשר כל "מוצר" הוא הכנסה במצב טבע מסוים.



בגרף לעיל מתוארות שלוש נקודות על קו התקציב. האמצעית היא הנקודה בה נמצא הפרט, כשלרשותו W ₪, ללא תלות במצב הטבע. כך, הוא מחזיק בסל (W,W). ההימור של 100 ₪, נניח על הטלת מטבע, מציע לו לעבור לנקודה בה יהיו לו 100 ₪ יותר במצב טבע מסוים, נניח מצב 1, ו-100 ₪ פחות במצב השני. אלטרנטיבה זו מציעה את הסל (W+100,W-100).
לצורך התיאור הגרפי נצייר גם את האלטרנטיבה ההפוכה: הימור על הצד השני של המטבע, שיתן 100 ₪ פחות במצב טבע 1 ו-100 ₪ יותר במצב טבע 2, היינו, את הסל (W-100,W+100). מכיון שהמטבע אמור להיות הוגן, ולכל אחד ממצבי הטבע יש הסתברות זהה של 50%, הגיוני להניח שהפרט יהיה אדיש בין שני ההימורים (על "עץ" או על "פלי"), ולכן ציירנו את הנקודות (W+100,W-100),(W-100,W+100) על אותה עקומת אדישות. אך קמירות ההעדפות, הנובעת מקעירות הפונקציה u, אומרת שנקודת האמצע, (W,W), היא רצויה לפחות כמו שתי הנקודות הללו, ובהנחה של קמירות חזקה – אף רצויה יותר מהן.

<u>בעית ביטוח</u>

עם כל הכבוד ליופייה של הקמירות, מנין לנו שאנשים אכן נוטים להיות שונאי סיכון? תשובה מקובלת היא שאנשים קונים ביטוח לדירה, רכב, וכיו"ב. במצב זה, לרוב, אנחנו מניחים שהפרט משלם לחברת הביטוח פרמיה העולה על תוחלת הנזק. למשל, נניח שיש לי רכב ששוויו 100 אלף ₪. הסיכוי שייגנב או ייהרס במהלך שנה הוא, נניח, 2%. כך, תוחלת הנזק היא 2,000 ₪. אך הפרמיה השנתית היא 3,000 ₪, כך שאני משלם יותר מאשר את תוחלת הנזק.

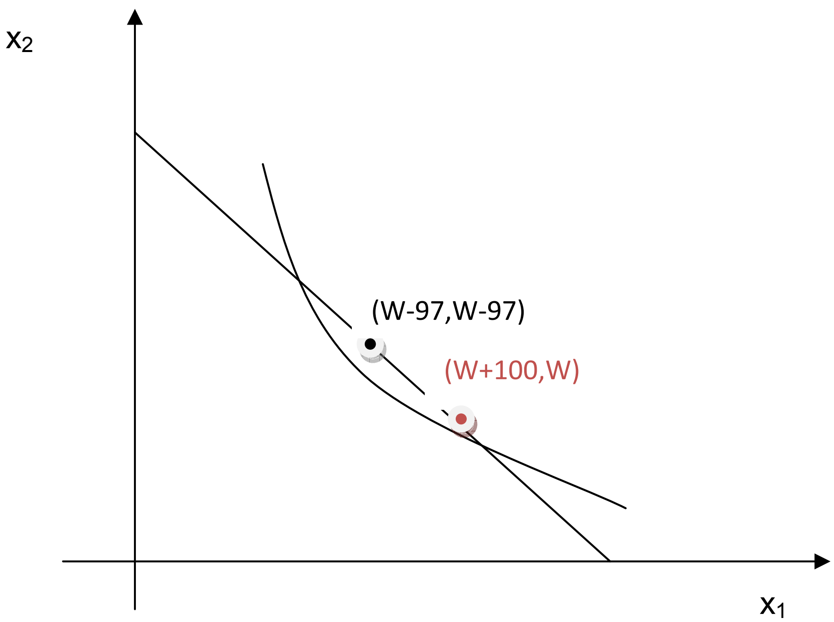
רגע, רגע, מאין הוצאתי את המספרים הללו? שווי הרכב וגובה הפרמיה נתונים, אך מה בדבר ההסתברות לנזק? אולי היא גבוהה מ-3%? התשובה היא שאין זה סביר, כי במצב זה חברת הביטוח תפסיד כסף עלי ועל שכמותי: חברת הביטוח מבטחת מספר רב של לקוחות, ותביעותיהם אמורות להיות שוות התפלגות ובלתי תלויות. כך, לצידה של חברת הביטוח עומד **חוק המספרים הגדולים**: למרות שאינה יודעת מי ממבוטחיה יגיש תביעה, יש לה מעט מאוד ספק לגבי גובה התביעה <u>הממוצע</u>. חברת ביטוח שטועה בהערכת הסיכונים סופה שתפשוט את הרגל. יש להניח שהחברות שעדיין מסביבנו אינן טועות ברוב המקרים.

ועוד "רגע, רגע": אם חברת הביטוח בעצם יודעת את התביעה הממוצעת, מדוע שלא אעשה כך אף אני? ובכן, התשובה היא שאני לא גדול – יש לי מכונית אחת בלבד ולכן חוק המספרים הגדולים לא אומר דבר לגבי. כשמדובר במספר קטן של משתנים מקריים, גם הממוצע שלהם יהיה בעל שונות לא זניחה. חוק המספרים הגדולים מבטיח התכנסות לממוצע, בהסתברות 1, <u>כאשר מספר המשתנים שואף לאינסוף</u>. אמנם גם עבור מספר סופי של משתנים אפשר לקבל חסמים על ההסתברות שהממוצע יהיה רחוק מהתוחלת, אך כשמספר המשתנים אינו גדול החסמים לא יבטיחו הרבה. ולכן אני זקוק לביטוח כל עוד מספר הרכבים שברשותי קטן. ואכן, אם היו לי רכבים הרבה, והנזקים הצפויים להם היו בלתי תלויים, לא היה זה הגיוני לבטח את כולם – עדיף היה להסתמך על חוק המספרים הגדולים ולהיות חברת הביטוח של עצמי.

אגב, חברת הביטוח זקוקה, כדי להתעלם מהסיכון, לא רק למספרים גדולים אלא גם לשתי ההנחות שהוזכרו: המשתנים המקריים צריכים להיות בלתי תלויים ובעלי התפלגות זהה. שתי ההנחות ניתנות להחלשה באופן מאוד משמעותי, אך לא ניתן פשוט להיפטר מהן. למשל, חברת ביטוח המבטחת אך ורק בתים בקליפורניה כנגד רעידות אדמה לא יכולה להסתמך על חוק המספרים הגדולים. גם אם מספר המשתנים גדול, היותם תלויים (ומתואמים זה עם זה באופן חיובי) משאירה אי-ודאות לא זניחה לגבי גובה התביעה הממוצע. וכמובן שאי אפשר להסתמך על חוק המספרים הגדולים אם המשתנים בעלי תוחלות שונות, כי אז לא ברור לאיזו תוחלת אמור לשאוף הממוצע.

הבה נבחן את בעית הביטוח במישור המוצרים. נניח שמצב טבע 1 הוא המצב שבו לא נגרם נזק למכוניתי, ובמצב טבע 2 הלכה המכונית בדרך כל גלגל. כך, אני מתחיל עם סל שאיננו על אלכסון הוודאות: במצב טבע 1 יש לי הכנסה גבוהה יותר מאשר במצב טבע 2. נניח ש- W הוא גובה רכושי ללא המכונית, כך שהסל ההתחלי הוא (W+100,W). נניח עוד, לשם פשטות,

שהביטוח הוא מלא וללא השתתפות עצמית. (היעדר השתתפות עצמית יוצר בעית תמריצים, אך נתעלם ממנה כרגע.) וכך, קניית הביטוח מגדירה סל אפשרי (W+97,W+97) שבו בכל מצב טבע – בין אם מכוניתי נגנבת או נהרסת ובין אם לאו, שווי נכסיי הוא W+97. בגרף הבא מתואר מצב שבו ההחלטה האופטימלית היא לרכוש ביטוח, מכיון שהנקודה (W+97,W+97) נמצאת על עקומת אדישות גבוהה יותר מהמקורית, (W,W+100).



<u>הימורים ושאר ירקות</u>

ומה קורה כשאדם מחליט להמר בקזינו? במצב זה הוא מתחיל בנקודה שהיא על קו הוודאות, ובוחר לעבור לנקודה שאיננה על הקו. זו, כשלעצמה, אינה תופעה נדירה: אם אותו ברנש היה קונה מניה של חברת היי-טק, גם היה עובר ממצב שהכנסתו ידועה למצב שבו איננה ידועה. אלא שבמקרה ההשקעה אנו נוטים להאמין שיש תוחלת רווח חיובית, או שכך לפחות מאמין המשקיע. (וכך יכול להאמין גם המהמר על מרוצי סוסים, למשל.) לעומת זאת, בהימורים בקזינו ההסתברויות ידועות, ולרוב אינן לטובת המהמר. כיצד אני יכול לטעון טענה גורפת כזו? שוב, בזכות חוק המספרים הגדולים: הקזינו משחק כנגד הרבה מהמרים, ויכול להיות די בטוח שהתשלום הממוצע למהמר יהיה מאוד קרוב לתוחלת התשלום. כך, אם תוחלת זו נמוכה מדמי ההשתתפות, הקזינו ירוויח כסף כמעט בוודאות. (ולעומת זאת, המהמר הבודד אינו יכול לסמוך על חוק המספרים הגדולים ולכן הוא עומד בפני אי ודאות.) ולכן אנו מסיקים שככלל, משחקי

הקזינו הם בעלי תוחלת שלילית, ולכן שונא סיכון לא ירצה לשחק בהם אם יש לו גם אפשרות לדבוק בסל תחילי שהוא ודאי.

אך במקום שנאת סיכון אפשר להניח אהבת סיכון, שלפיה הפרט תמיד מעדיף את המשתנה המקרי על פני תוחלתו. התנהגות זו תתאים לפונקציה u קמורה. ההעדפות שהיא תיצור תהיינה לא קמורות, בדרך כלל, ותהיה להן נטייה לבחור נקודות אופטימליות קיצוניות, המקבילות להעברת הכנסה ממצב טבע שבו ההכנסה נמוכה למצב טבע שבו היא גבוהה.

ולבסוף, מה בדבר אנשים שמבטחים את בתיהם אך בו-זמנית קונים כרטיסי הגרלה או משחקים בקזינו? ובכן, הסבר מסוים ניסה להניח שפונקצית התועלת שלהם, u, היא קמורה בקטעים מסוימים אך קעורה באחרים. אך הסבר זה אינו ממש משכנע, כי אם היה נכון, פרט שהיה מתעשר היה מפסיק לבטח את רכושו אך ממשיך להמר, ולא ברור שזה מתאים למה שאנחנו רואים סביבנו. ההימורים כנראה מוסברים ע"י שילוב של שתי תופעות: ההנאה שאנשים שואבים מעצם המשחק, או מפנטזיות על הרווחים הצפויים להם, והעובדה שאנשים אינם קולטים היטב כמה קטנות יכולות להיות הסתברויות.

כהנמן וטברסקי פיתחו תורה אלטרנטיבית, הקרויה Prospect Theory, השונה מתורת תוחלת התועלת בשני היבטים עיקריים: ראשית, היא מניחה שאנשים נותנים לתוצאות משקלות שאינם בהכרח זהים להסתברותם. בפרט, מקובל להניח שכאשר נאמר לאדם שההסתברות לתוצאה מסוימת היא מספר קטן מאוד (אך חיובי), האדם מגיב כאילו היה המספר גבוה יותר. שנית, תורה זו מבחינה בין רווחים והפסדים, וטוענת שהיחס לסיכון אינו בהכרח זהה בשני התחומים (שמוגדרים על-ידי "נקודת ייחוס", שמעליה נמצאים הרווחים ומתחתיה ההפסדים).

תרגילים: בשלב זה אתם אמורים להיות מסוגלים לפתור:

בעיות 17,18 בבחינה לדוגמה מס' 1

בעיות 18,19 בבחינה לדוגמה מס' 2

בעיה 19 בבחינה לדוגמה מס' 3

סיכום שיעור 12 ובו יסופר על הפירמה

ובכן, הגיעה העת לדבר קצת על הפירמות. מקובל להניח שלוש הנחות בסיסיות על הפירמה בשוק תחרותי, המקבילות להנחות שכבר דנו בהן בתורת הצרכן: ראשית, הפירמה מביאה את רווחיה למקסימום בהינתן הטכנולוגיה ותנאי השוק; שנית, הטכנולוגיה מקיימת מספר הנחות, לרבות קמירות הקבוצה האפשרית; ושלישית, הפירמה מניחה שהמחירים אינם בשליטתה.

ההנחה האחרונה – שהפירמה היא price taker – תוסר בבוא היום. עוד נדון (אם גם לא בקורס זה) במונופול, שיכול להשפיע על המחירים בשוק, ולוקח זאת בחשבון בקביעת היקף הייצור שלו. דיון דומה יתקיים גם במונופסון – קניין יחיד בשוק, אם כי תופעה זו פחות נפוצה. כמו-כן, אם יש שלוש פירמות בשוק מסוים, אף אחת מהן אינה מונופול, אך סביר להניח שכל אחת מהן משפיעה על המחיר, ויחד הן מהוות אוליגופול. קיצורו של דבר: ההנחה השלישית הנחה של שוק תחרותי, ובמיקרו 3 נסיר אותה וננתח שיווי משקל ע"י פתרון בעיות אופטימיזציה דומות, בהן המחירים יכולים להיות תלויים בכמויות המוצעות או המבוקשות ע"י מחליט בודד.

ההנחה השניה – שהטכנולוגיה מקיימת תנאים מתמטיים מסוימים – ניתנת לערעור. למרות האינטואיציה של מושג הקמירות, זהו תנאי שאפשר לעבוד גם בלעדיו, במחיר לא מבוטל של נוחות מתמטית, אך יחסית ללא זעזועים קונספטואליים מוגזמים.

ההנחה הראשונה היא הקשה מכולן לבליעה. הפירמה ממקסמת רווח? האמנם? הנחה זו מקבילה להנחה שהצרכן ממקסם תועלת. גם שם ההנחה נשמעה מוזר, אך לאחר שהבנו שמדובר ב"מתנהג כאילו" או "מקבל החלטות באופן הניתן לתיאור ע"י פונקצית תועלת כלשהי", ראינו שההנחה אינה כל כך מופרכת. אך בתורת הפירמה אין לנו גמישות רבה מדי בקביעת פונקצית המטרה של הפירמה – פונקציה זו היא הרווח וזהו.

הקשיים בהנחה זו מרובים. ראשית, פירמות אינן ממקסמות רק רווחים, הן דואגות לנתח השוק שלהן, לתדמית שלהן בעיני עובדים ולקוחות, וכו'. ניתן לטעון שכל הקריטריונים הללו בסופו של דבר מתורגמים לרווח: "נתח שוק" ישפיע על הרווח בעתיד; "תדמית" תשפיע על המכירות בהווה ובעתיד, וכו'. אך הדרך בה "נתח שוק" משפיע על מכירות בעתיד הוא מעורפל למדי, וקשה לכמתו. על אחת כמה וכמה קשה לכמת את התדמית והשפעתה על המכירות. ולכן הפירמות

לעתים קרובות לא יכולות להימנע מהגדרת מטרות-עזר אלה. שנית, לא ברור שה"פירמה" היא יחידת קבלת החלטות מונוליתית. הפירמה מורכבת מאנשים שונים, בעלי תפיסות ותוכניות שונות, ובעלי אינטרסים אישיים כגון הג'וב הבא שלהם. כאשר ארגון גדול בסופו של דבר מקבל החלטות, לא ברור שהן ניתנות לתיאור כמקסימיזציה של משהו. ושלישית, לא ברור שהפירמה יודעת מה בדיוק הרווח שלה, שלא לדבר על מה יהיה הרווח אם תנקוט במדיניות שיווק מסוימת.

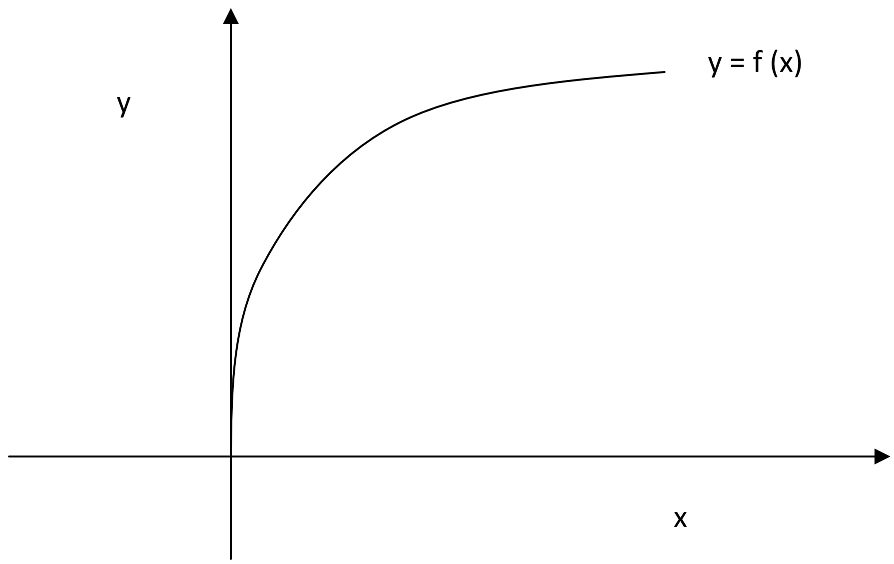
ובכל זאת, יש ענין במודל הקלאסי, שבו הפירמה ממקסמת רווח. פירמות למטרת רווח אינן יכולות להתמיד בהפסדים לאורך זמן ולהרגיש מרוצות עם עצמן. ואדם העובד בפירמה, יהיו שיקוליו אשר יהיו, לא יוכל לתמוך במדיניות מסוימת בטענה המפורשת שהיא תקטין רווחים. ולכן מקסימיזציה של רווח יכולה לשמש כקירוב, אם גם ראשוני ולא מושלם, לתיאור התנהגות הפירמה. נתבונן, אפוא, במודל הפירמה הקלאסי וננסה ללמוד ממנו את התובנות שהוא מציע.

<u>הקבוצה האפשרית</u>

אנחנו מניחים, כאמור, שהפירמה מעוניינת למקסם רווח במחירים נתונים ובהינתן הטכנולוגיה שלה. נתחיל במודל פשוט שבו יש תשומה מסוג אחד – נסמנה x – ותפוקה מסוג אחד, y. אפשר לחשוב על x כשעות עבודה ועל y כעל התוצר, למשל, כמות הפירות הנקטפים מהעץ כפונקציה של הזמן המושקע בטיפוס על העץ וניעור הענפים. וכמו שכבר גילו לכם, מקובל להניח **תפוקה שולית פוחתת**: בשעת העבודה הראשונה אפשר לקטוף פירות רבים מהענפים הנמוכים. (מכירים את הביטוי low-hanging fruit ? – הכוונה היא בדיוק להישגים הראשונים ה"נקטפים" בקלות ע"י מי שזכה להיות הראשון בתחום.) בשעת העבודה השניה כבר צריך להתאמץ יותר, ובעשירית כבר מטפסים על ענפים ממש גבוהים בשביל פרי בודד ובוסרי. לכן, תוספת התוצר (הגידול ב- y) כתוצאה מתוספת קבועה בתשומה (גידול של יחידה ב- x) פוחתת. ואם נסמן את התוצר כפונקציה של התשומה,

$$y = f(x)$$

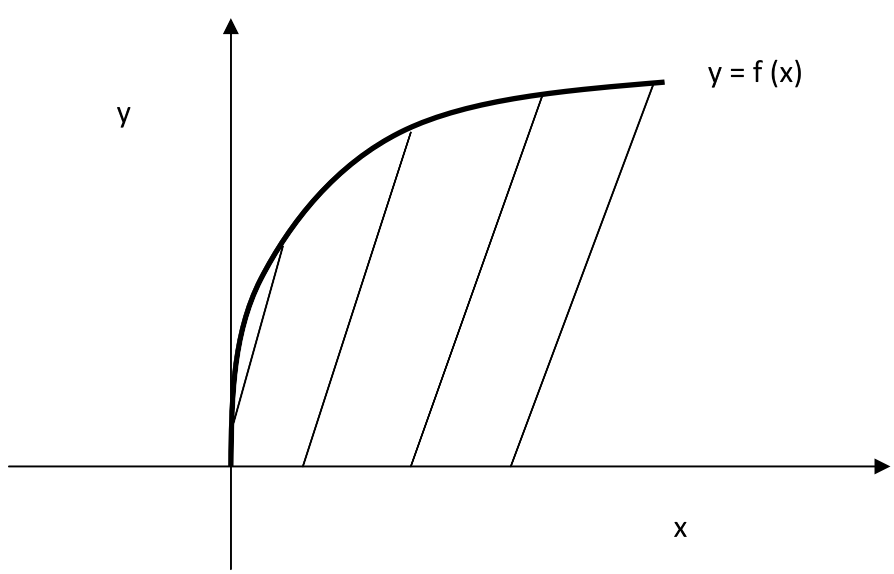
תהיה הפונקציה f **קעורה**, בעלת תועלת שולית (f') פוחתת (היינו, f''<0):



ומתוך ראייה היסטורית (שזוכרת מה למדנו על פונקציות קעורות וגם יודעת לאן אנו חותרים), נתאר גרפית את כל הזוגות (x,y) האפשריים. מכיון שמותר גם לזרוק תוצר, מדובר בכל הנקודות (x,y) כך ש-,

$$y \le f(x)$$

זאת אומרת, בשטח החסום מתחת לגרף הפונקציה f:

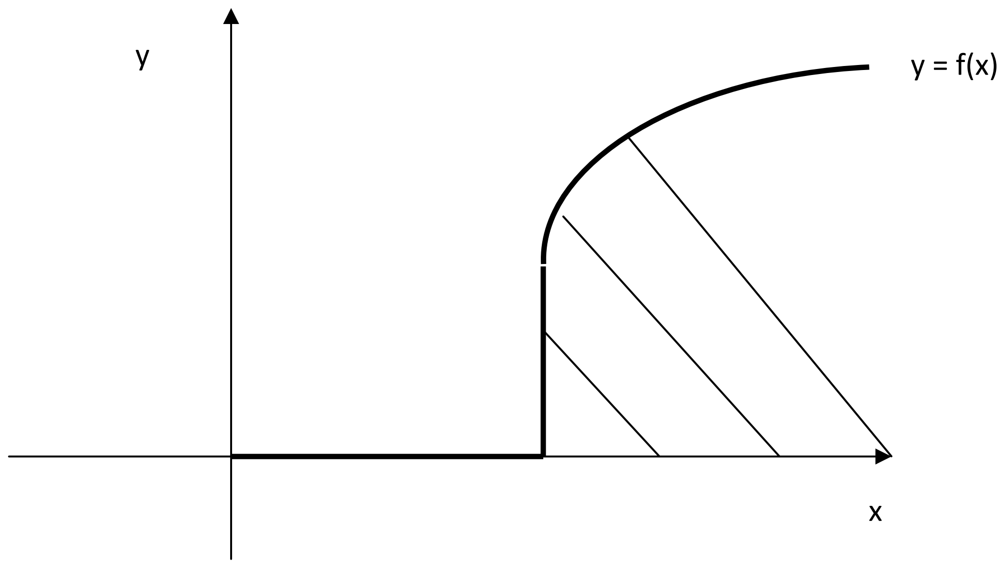


וכזכור, פונקציה היא קעורה אם ורק אם הקבוצה שנמצאת מתחת לגרף הפונקציה היא קמורה. לשון אחר: הנחת **התפוקה השולית הפוחתת** מתורגמת להנחה ש**הקבוצה האפשרית** (של זוגות תשומה-תפוקה) היא **קמורה**.

שימו לב: הנחת הקעירות של הפונקציה f פשוטה יותר לפירוש מאשר ההנחה המקבילה על פונקצית התועלת בתורת הצרכן, מכיון שהתפוקה – רמת התוצר y – היא גודל מדיד. בניגוד למושג התועלת, שהתחבטנו רבות שמשמעותו המדעית/אמפירית ובדרכים למדוד אותו, התוצר הוא גודל מדיד – אם מדובר במוצר פיזי, ניתן למדוד אותו (ק"ג של קמח או מספר טלוויזיות), ואם מדובר בשירותים, ניתן לפחות למדוד את היקפם כפי שהוא נרשם בספרי החשבונות. כך או כך, אין לנו קושי להבין את משמעות הפונקציה f ואת ההנחה שהיא קעורה.

הנחת הקמירות של הקבוצה האפשרית, או קעירות פונקצית הייצור f, סבירה למדי אם מדובר בברנש שניגש לעץ ומתחיל לנענע את ענפיו. אך אם יחליט אותו ברנש להכין לעצמו כלי עבודה המורכב ממקל שבראשו נעוץ מסמר, הרי שיכלה חלק מהשעה הראשונה בהכנת מכשיר מתוחכם זה, ולא יאסוף פירות בזמן הכנת המכשיר. אם, למשל, הכנת המכשיר גוזלת שעה אחת, יסתבר שבשעה הראשונה התפוקה היא אפס, אך היא גבוהה יותר בשעה השניה. הווה אומר: התפוקה השולית אינה פוחתת בכל התחום. וזאת מכיון שיעיל יותר להשקיע זמן בהכנת תנאי העבודה, באופן שישתלם בהמשך אך לאו דווקא בטווח הקצר.

אך אם זה מצבו של פרט בודד הקוטף פירות מעץ, צאו וחשבו מה קורה בפירמה מודרנית, המשקיעה בהקמת מפעל, רכישת מכונות, הכשרת עובדים, מחקר ופיתוח, סקרי שוק וכו'. יש לפירמה, אם כך, הוצאות רבות שהן, לפחות בטווח הקצר, **הוצאות קבועות**: הן אינן תלויות בכמות המיוצרת, אך הן נחוצות לייצור, וחלקן הכרחיות אפילו לייצור היחידה הראשונה. אם ניקח בחשבון הוצאות קבועות אלו, נגלה שהנחת קעירות הפונקציה f אינה מתקיימת. אם x מציין תשומה – שעות עבודה, או הון המוקדש לייצור – אזי סביר שנקבל גרף מטיפוס



שמגדיר פונקציה שאיננה קעורה (ואשר הקבוצה שמתחתיה אינה קמורה).

כשהייתי סטודנט, בילינו כמה שבועות טובים בניתוח ההוצאות המשתנות וההוצאות הקבועות, ההוצאות המשתנות הממוצעות וההוצאות הקבועות הממוצעות, והשוואתן להוצאות המשתנות השוליות (שהן גם סך ההוצאות השוליות, מכיון שבהוצאות הקבועות הגידול השולי הוא אפס על-פי הגדרתן). גם כיום יש ספרי לימוד שמקדישים לנושא תשומת לב רבה, אך אינני יכול לומר שיש כאן איזשהו רעיון עמוק. האבחנה בין הוצאות משתנות וקבועות היא ממילא די מעורפלת, כאשר טווח הזמן הנדון יגדיר מה נחשב לקבוע ומה למשתנה. למשל, מספר המכונות הקיימות על רצפת הייצור הוא נתון בטווח הקצר, אך בטווח הארוך ניתן לשכור עוד שטח ייצור ולרכוש עוד מכונות. חברה זקוקה לרואי חשבון ולעורכי דין, בלעדיהם לא ניתן להתחיל לתפקד, ובטווח הקצר מספרם נתון. אך הרחבת היקף הפעילות בשלב מסוים תחייב הרחבה של היחידות החשבונאיות והמשפטיות. ייתכן שהשגת הרשיונות לפעילות הייצור דורשת תשלום שוחד לכמה פקידים, והשוחד איננו תלוי בהיקף הפעילות הראשונית, אך ייתכן שהצלחה רבה מדי בשוק תזכיר לפקידים שגם להם מגיע משהו. קיצורו של דבר – האבחנה בין "קבוע" ל"משתנה" אינה מאוד חדה. עם זאת, חשוב לזכור שהנחת הקמירות שלנו (או הקעירות של פונקצית הייצור) איננה מאוד סבירה בייחוד ליד רמת תוצר אפס. זהו, אמרנו את זה, ועכשיו אפשר לחזור להניח קמירות של הקבוצה האפשרית.

<u>העדפות הפירמה</u>

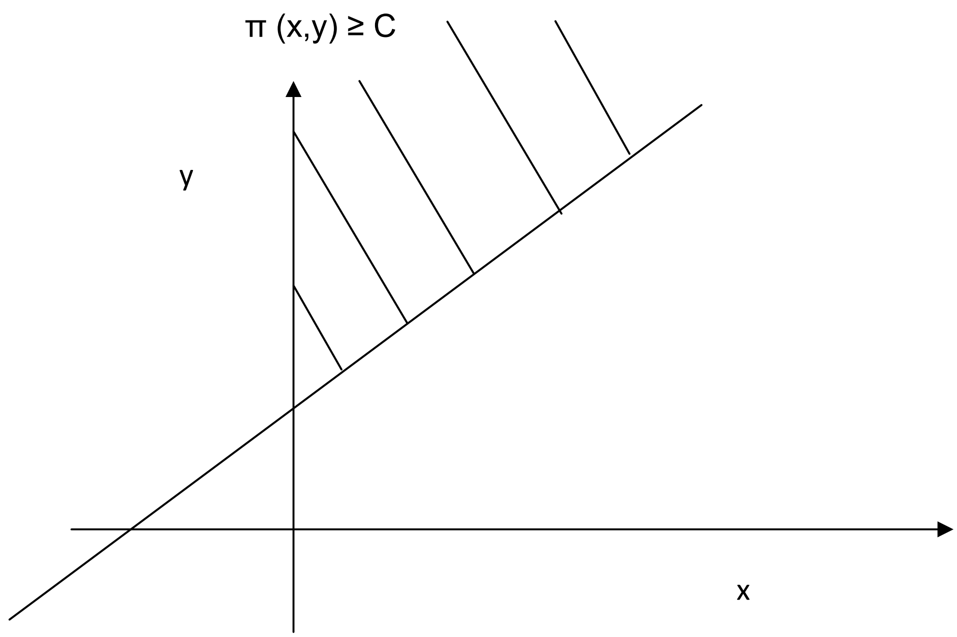
טוב, לאחר כל ההתנצלויות לעיל, נניח פשוט שהפירמה רוצה להביא למקסימום את הרווח שלה. אם מחיר התשומה הוא p_x ומחירו התפוקה הוא p_y, הרווח של פירמה הקונה x יחידות תשומה ומוכרת y יחידות תפוקה הוא

$$\pi\ (x,y) = p_y y - p_x x$$

זוהי, כמובן, פונקציה לינארית במשתנים (x,y), כל עוד אנו מניחים שהמחירים נתונים ואינם תלויים בכמויות x,y. ניתן לתאר גרפית את הקבוצות הרצויות: אלו הן זוגות (x,y) המשיגות רמת רווח מסוימת ומעלה. למשל, אם נקבע יעד של רווח C, הקבוצה

$$\{\ (x,y) \mid \pi\ (x,y) \geq C\ \}$$

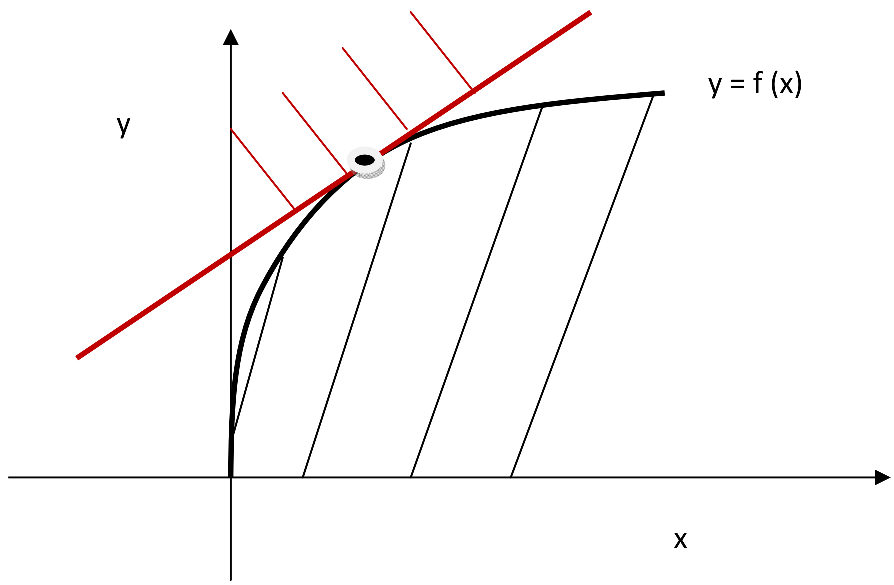
נראית כך:



וכמובן, הקבוצות הרצויות לפירמה (עבור רמות שונות של רווח, היינו, ערכים שונים של C) הן **קמורות**.

<u>בחירה אופטימלית של הפירמה</u>

הנחנו כל כך הרבה הנחות, חלקן היו צפרדעים קשות לבליעה ובלתי ניתנות לעיכול – הגיע הזמן שתהיה לנו קצת נחת. ומקור הנחת הוא שבעית הפירמה אינה שונה בהרבה מבעית הצרכן: מדובר באופטימיזציה קמורה: הן הקבוצה האפשרית והן הקבוצות הרצויות קמורות, ולכן אם נמצא נקודת השקה נהיה מבסוטים עד הגג. זאת אומרת, נחפש נקודה שדרכה אפשר להעביר ישר, כך שהקבוצה האפשרית בצידו האחד וקבוצה רצויה מסוימת בצידו השני:



איך נמצא נקודה זו? בהנחה שפונקצית הייצור f גזירה, אפשר לנסות אותו תרגיל השוואת שיפועים שהוכיח עצמו של-כך יפה בבעית הצרכן. בסה"כ הבעיות דומות מאוד, בהחלפת תפקידים בין הקבוצה הרצויה והמצויה: בבעית הצרכן, הקבוצה המצויה הוגדרה ע"י מחירים נתונים ולכן ע"י קו ישר, והקבוצה הרצויה היתה קמורה, לרוב קמורה ממש, בגלל הנחותינו על ההעדפות, ובפרט בגלל הנחת התועלת השולית הפוחתת. בבעית היצרן התחלפו היוצרות: הקבוצה הרצויה מוגדרת ע"י מחירים נתונים, ולכן ע"י קו ישר, ואילו הקבוצה האפשרית היא קמורה, לרוב קמורה ממש, בגלל הנחותינו על הטכנולוגיה, ובפרט בגלל הנחת התפוקה השולית הפוחתת. אך הרעיון הבסיסי הוא אותו רעיון, וכל מה שלמדנו על אופטימיזציה קמורה תקף גם כאן – אופטימום מקומי יהיה גם אופטימום גלובלי, הוא יהיה יחיד אם אחת הקבוצות קמורה ממש, ניתן יהיה להגיע אליו ע"י שיפורים קטנים וכו'.

מסיבות אלו, בחיפוש אחר אופטימום בבעית היצרן ננסה להשוות שיפועים. במקרה שלנו שיפוע פונקציה הייצור נתון על-ידי נגזרתה (אם זו קיימת):

$$dy/dx = f'(x)$$

ואילו שיפוע הקו, לאורכו הרווח קבוע,

$$\pi\ (x,y) = p_y y - p_x x = c$$

מקיים

$$p_y dy - p_x dx = 0$$

או

$$dy/dx = p_x/p_y$$

כך שהשוואתם תיתן

$$p_x/p_y = f'(x)$$

או

$$p_x = f'(x)p_y$$

וזהו תנאי פשוט לפירוש כלכלי: מצד שמאל רשום מחירו של גורם הייצור x, הלוא הוא העלות השולית שלו (שהיא קבועה בהנחה של מחירים קבועים). מצד ימין רשום שוויה (השקלי) של התפוקה השולית של אותו גורם ייצור: $f'(x)$ הוא מספר יחידות התוצר שתתקבלנה אם נגדיל את כמות גורם הייצור ביחידה אחת, ומחירו של התוצר, p_y, מתרגם את כמות התוצר הנוספת הזו לשקלים של רווח. קיצורו של דבר: התנאי הנ"ל משווה עלות שולית בשקלים (משמאל) להכנסה שולית בשקלים (מימין). אם אגף ימין גדול מאגף שמאל, היחידה השולית מניבה יותר מאשר היא עולה, ועדיף להגדיל את כמות התשומה (להגדיל את x); ואם אגף שמאל גדול מאגף ימין, היחידה האחרונה עולה יותר מאשר היא מניבה, ועדיף בלעדיה. (וכמו בבעית הצרכן, זהו רק תנאי סדר ראשון; הוא מספיק לאופטימליות אם הקמירות מתקיימת, אך לאו דוקא באופן כללי, והוא איננו הכרחי לאופטימליות, כמו במקרה של פתרון בנקודת קיצון.)

ואפשר גם לקבל אותה תוצאה מניתוח הלגראנז'יאן: לבעיה

$$\text{Max } p_y y - p_x x$$

$$\text{s.t. } y=f(x)$$

מתאימה פונקצית לגראנז'

$$L(x,y,\lambda) = p_y y - p_x x - \lambda[y - f(x)]$$

בעלת הנגזרות החלקיות (לפי x ו- y בלבד – כבר למדנו להתעלם מהנגזרת לפי משתנה-הדמי λ, שהרי השוואתה לאפס רק תספר לנו שהאילוץ אמור להתקיים):

$$dL/dx = -p_x + \lambda f'(x)$$

$$dL/dy = p_y - \lambda$$

השוואתן לאפס תיתן

$$\lambda f'(x) = p_x$$

$$\lambda = p_y$$

ולכן

$$p_x = f'(x)p_y$$

<u>בחירת תוכנית ייצור אופטימלית</u>

הניתוח דלעיל הניח שיש רק תשומה אחת, וזה היה נוח לתיאור גרפי. בפועל יש, כמובן, תשומות רבות, ולעתים גם מספר תפוקות שנובעות מאותו תהליך ייצור. ומכיון שתשומות בכל זאת שונות מתפוקות, צריך לדון לפחות בשתי תשומות, או שני גורמי ייצור. (דיון דומה יידרש גם לשתי תפוקות, או שני מוצרים סופיים, אך נשאיר אותו ליום שבו תהיו ממש משועממים.)

נניח, אפוא, ש- x_1 מסמן את כמות גורם הייצור 1, ו- x_2 – את כמות גורם ייצור 2. הכמות המיוצרת, y, ניתנת ע"י

$$y = f(x_1,x_2)$$

באשר f פונקציה קעורה (כפונקציה של שני משתנים). בפרט, התפוקה השולית של כל אחד מגורמי הייצור פוחתת.

כעת נשאלות שתי שאלות: (1) כמה יחידות y לייצר? ו- (2) באיזו קומבינציה של גורמי הייצור לייצר את כמות y שנבחרה?

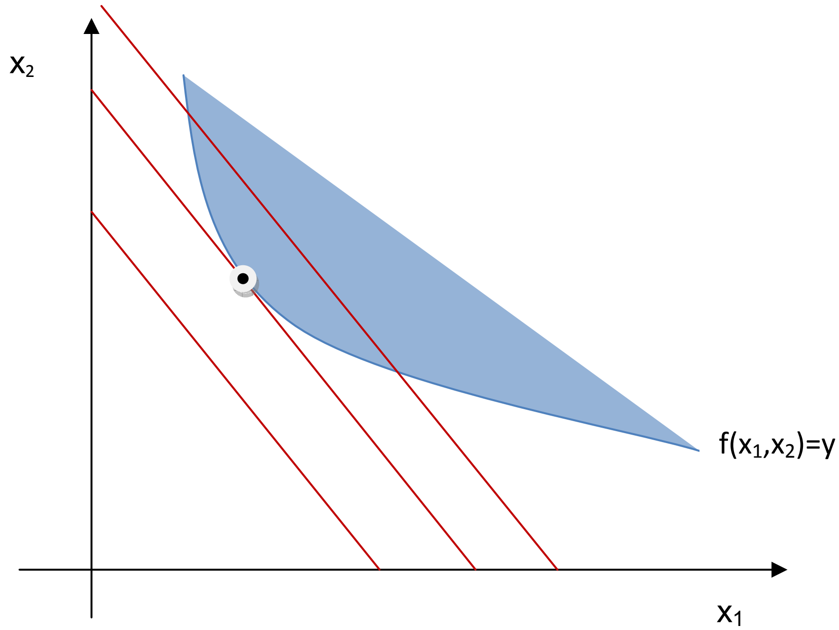
החידוש לעומת המקרה הקודם הוא בשאלה (2). הבה נתמקד בה. נניח שהחלטנו לייצר כמות y. (כמובן, ההחלטה על כמות זו תהיה תלויה בעלות הייצור, וזו עדיין לא ברורה לנו כי לא החלטנו על קומבינצית גורמי הייצור האופטימלית. עם זאת, התרגיל בעל ערך: אם נדע מה תכנית הייצור האופטימלית לכל רמת תוצר y, נוכל אחר-כך לקבוע גם רמה זו באופן אופטימלי.)

נניח שמחירו של גורם ייצור $i=1,2$ הוא p_i. מהי קומבינצית x_1,x_2 האופטימלית לייצור כמות y של התוצר? הפעם ננסה לפתור בעיה של מזעור העלות:

$$\text{Min } p_1x_1 + p_2x_2$$

$$\text{s.t. } f(x_1,x_2) = y$$

ותיאורה הגרפי הוא:



הקבוצה האפשרית היא כל הנקודות (x_1,x_2) שמבטיחות כמות תוצר של y או יותר – ואלו הן הנקודות שנמצאות מעל לעקומה שוות-התוצר $f(x_1,x_2)=y$.

כל קו ישר מתאר נקודות (x_1,x_2) שהן שוות-עלות, ומקיימות

$$p_1x_1 + p_2x_2 = c$$

עבור קבוע c שונה. אם נבחר c נמוך מדי, לא יהיה לו חיתוך עם הקבוצה האפשרית – לא ניתן יהיה להגיע לרמת התוצר הנדרשת בעלות זו. אם נבחר c גבוה מדי, כך שהקו הנ"ל ייכנס לתוך הקבוצה האפשרית, לא נהיה באופטימום, כי יהיה ניתן לחסוך בהוצאות. ולכן האופטימום יתקבל – איך לא – בנקודת ההשקה המתוארת לעיל.

אם הפונקציה f דיפרנציאבילית ונחמדה, ניתן יהיה למצוא את נקודת ההשקה ע"י השוואת שיפועים – כאשר השיפוע של עקומת הייצור הוא יחסי התפוקות השוליות, והשיפוע של קו העלות הוא יחסי המחירים של גורמי הייצור. וכך נקבל את תנאי השוליות הבא:

$$p_1/p_2 = f_1/f_2$$

או

$$f_1/p_1 = f_2/p_2$$

ושוב התנאי הראשון מתקבל מהגיאומטריה והשוואת השיפועים, בשעה שלתנאי השני יש משמעות כלכלית ברורה יותר: באגף שמאל נקבל את תוספת התוצר ש"יקנה" לנו שקל המוצא על גורם ייצור 1, ובאגף ימין – תרומתו של שקל המוצא על גורם ייצור 2 לתוספת בתוצר. אם השוויון הנ"ל אינו מתקיים, נרצה להעביר שקל אחד (או כמה אגורות) מההוצאה של גורם ייצור אחד למשנהו.

לבסוף, נציין שגם את תנאי השוליות הנ"ל אפשר, כמובן, לקבל מניתוח פונקצית לגראנז' המתאימה, וגם משמעותו היא, כרגיל, כמשמעות התנאים מסדר ראשון, לטוב ולרע.

<u>ואם במכה אחת</u>

את גדולתו של לגראנז' נבין כשננסה לפתור בעיות סבוכות יותר, שקשה יותר לתאר גרפית או לפתור באופן אינטואיטיבי. במקרה שלנו, אם נרצה לפתור בעת ובעונה אחת את שתי השאלות לעיל – כמה לייצר ובאיזה אופן, הרי אנו צריכים לבחור ערכים לשלושה משתני החלטה, x_1,x_2,y כך שנביא למקסימום את הרווח

$$p_y y – p_1x_1 – p_2x_2$$

בכפוף לאילוץ

$$f(x_1,x_2) = y$$

ואז נרשום פונקצית לגראנז'

$$L\ (x_1,x_2,y,\lambda) = p_y y – p_1x_1 – p_2x_2 – \lambda[y – f(x_1,x_2)]$$

בעלת הנגזרות החלקיות (לפי x_1,x_2 ו- y בלבד):

$$dL/dx_1 = – p_1 + \lambda f_1$$

$$dL/dx_2 = – p_2 + \lambda f_2$$

$$dL/dy = p_y - \lambda$$

השוואתן לאפס תיתן

$$\lambda f_1 = p_1$$

$$\lambda f_2 = p_2$$

$$\lambda = p_y$$

ומכאן ניתן לגזור הן את תנאי השוליות לבחירה אופטימלית בין גורמי הייצור,

$$f_1/p_1 = f_2/p_2$$

והן את השוויון בין ערך תפוקתו השולית של כל גורם ייצור למחירו (היינו, לעלותו השולית):

$$p_1 = p_y f_1$$

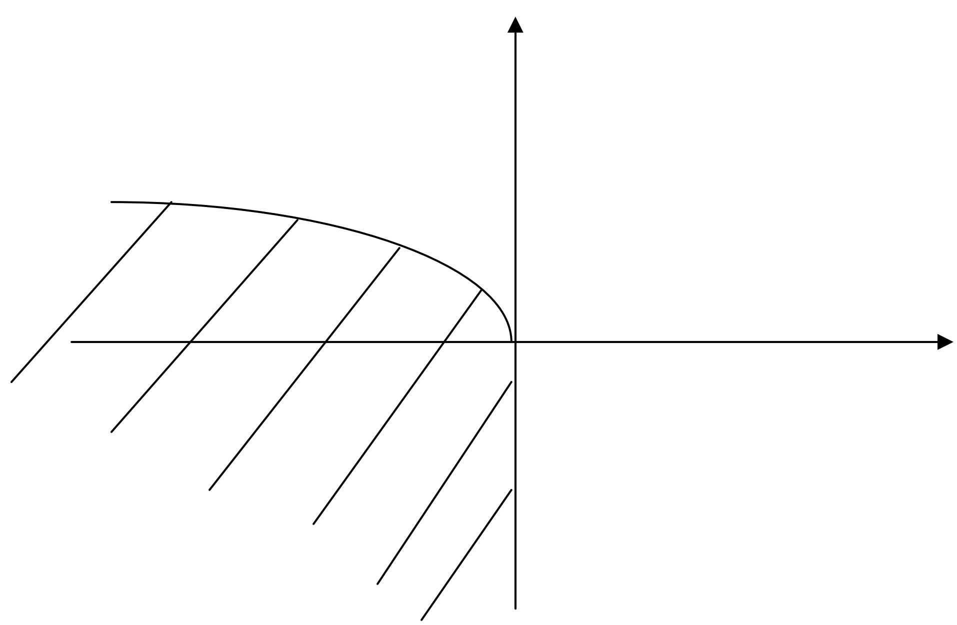
$$p_2 = p_y f_2$$

<u>מקרים כלליים יותר</u>

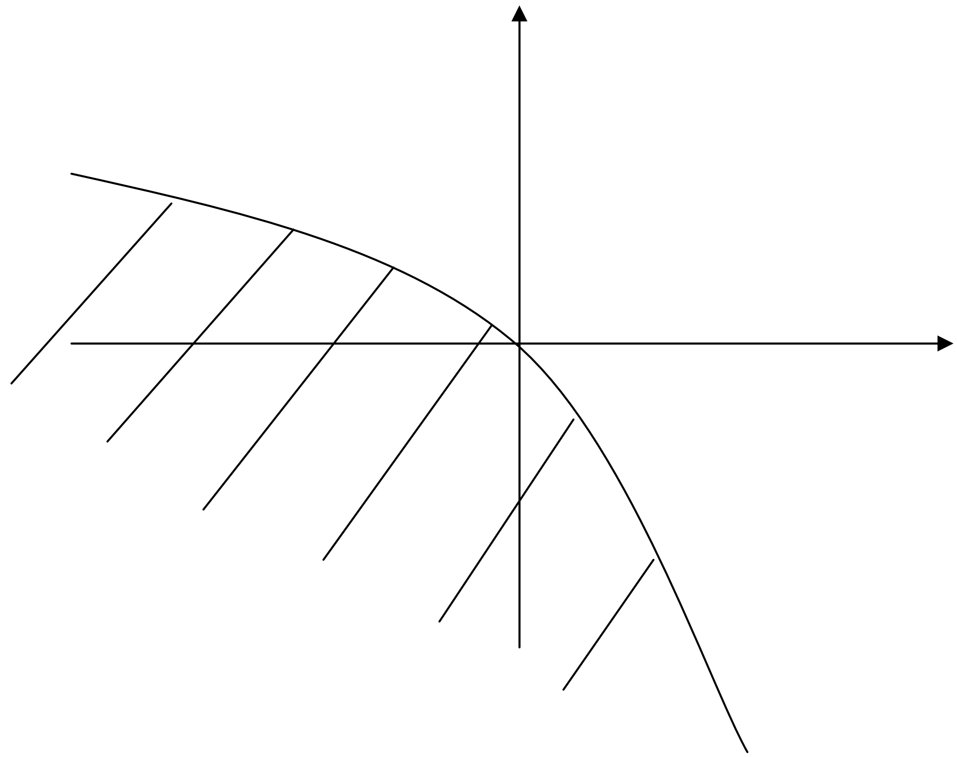
הניתוח דלעיל ניתן להרחבה לכל מספר גורמי ייצור ללא כל קושי. עם קצת יותר דמיון, ניתן לחשוב איך תראה הבעיה אם הפירמה מייצרת מספר מוצרים בו-זמנית (כמו מספר סוגים של משקה קל, או מספר מודלים דומים של מכוניות). אך באופן כללי יותר ניתן גם לשאול מאין באים גורמי הייצור, ואולי הפירמה תרצה לייצרם במקום לקנותם, ובאופן דומה – אולי במקום למכור את התוצר כדאי יותר להשתמש בו כתשומה לתהליך ייצור נוסף? ויתרה מזו – יכולים להיות מצבים שבהם לא ברור מי קודם למי בשרשרת הייצור, זאת אומרת שניתן לייצר מוצר 1 ממוצר 2 וגם להיפך. למשל, מכולות של אוניות משא נוצרו מארגזי מטען של משאיות בתום מלחמת העולם השניה – כשהיו יותר מדי משאיות ולא היה בהן צורך, ארגזיהן שינו ייעוד, ופירמה שקודם לכן ייצרה משאיות (תוך שימוש במכולות) יכלה למצוא עצמה מפרקת משאיות ומייצרת מכולות. אז מי הוא גורם הייצור ומי התוצר? התשובה היא במחירי השוק יקבעו זאת – אם יש לפירמה טכנולוגיה שמאפשרת המרה זו, היא יכולה לקנות ארגזי משאיות ולמכור מכולות, או להפך, בהתאם לכדאיות שמכתיבים המחירים.

כל הבעיות הללו נפתרות כאשר מגדירים את **הטכנולוגיה** של הפירמה כקבוצה של וקטורים במרחב המוצרים, כאשר חלק מרכיביהם שליליים. למשל, נחשוב על מאפייה המייצרת לחם מקמח ועבודה. לצורך הענין יהיו לנו שלושה משתנים: כמות הקמח, מספר שעות עבודה, וכמות הלחם. הווקטור (-4,-3,3) יתאר את תוכנית הייצור לפיה 4 ק"ג קמח ו-3 שעות עבודה יניבו 3 ק"ג לחם. הווקטור לעיל הוא שינוי אפשרי בכמויות, כאשר סימן שלילי מציין תשומות וסימן חיובי – תפוקות. כך, אם אנו מתחילים עם וקטור כלשהו (x_1,x_2,x_3), הרי שהפירמה יכולה "להעביר" אותנו לווקטור (x_1-4,x_2-3,x_3+3).

אנו נניח שלפירמה יש טכנולוגיה הנתונה כקבוצת וקטורים Y, כך ש- y בקבוצה אם (ורק אם) הפירמה "יודעת" לייצר את הרכיבים החיוביים של y מהרכיבים השליליים שלו. סביר להניח על הקבוצה Y שאינה מכילה שום וקטור y שכל רכיביו אי-שליליים, למעט וקטור האפס: הפירמה אינה יכולה לייצר יש מאין. וכמו-כן, נניח שהקבוצה Y קמורה. אם יש רק שני מוצרים, הקבוצה יכולה להיראות, למשל, כך:



כאשר הציר האופקי, של x_1, מציין תשומה והאנכי – תפוקה. ובמצב שכל אחד מהמוצרים יכול לשמש כגורם ייצור עבור המוצר השני, הטכנולוגיה יכולה להיראות כך:



לב הענין נשאר הנחת הקמירות – כל עוד קבוצת הווקטורים Y קמורה, תהיה לפירמה קבוצה אפשרית קמורה, וקבוצות רצויות שהן קמורות אף הן (בהיותן מוגדרות ע"י פונקצית רווח לינארית).

מה עומד מאחורי הנחת הקמירות? עקרונית, היא הכללה של הנחת התפוקה השולית הפוחתת. ניתן לפצל את ההנחה לשתי הנחות: <u>אדיטיביות</u> <u>והקטנה פרופורציונית</u>. האדיטיביות אומרת שאם שני וקטורים נמצאים בקבוצת האפשרויות, אזי כך גם סכומם. ואכן, אם הפירמה יודעת לייצר וקטור y וגם וקטור z, מדוע שלא תדע לייצר וקטור y+z? הרי כל שעליה לעשות הוא לבצע את תוכנית הייצור שמבטיחה את y, ובמקביל את התוכנית המבטיחה את z, ובא לציון גואל. אם נמצא שלא ניתן לבצע את שתי התוכניות במקביל, לרוב הסיבה תהיה שיש גורמי ייצור – למשל, ההנהלה – שלא נלקחו בחשבון כאחד הרכיבים של הוקטורים y,z.

<u>הקטנה פרופורציונית</u> אומרת שאם וקטור y בקבוצה, אזי גם αy בקבוצה עבור 0<α<1. למשל, אם הפירמה יודעת לייצר את y, למה שלא תדע לייצר את מחציתו (ז.א. את הווקטור שבו כל רכיב הוא מחצית מהרכיב המתאים ב- y)? ובכן, יכולות להיות לכך סיבות שונות. ראשית, יש גורמי ייצור שלא ניתן לחלקם מסיבה פיזיקלית או משפטית. שנית, יש גורמי ייצור שניתן

לחלקם, אך שלא יניבו תפוקה פרופורציונית לתפוקה שהניבו לפני החלוקה. כמובן, בעית התשואה העולה לגודל וההוצאות הקבועות יהרסו לנו את הקמירות. עצוב. אבל אם קבוצת הטכנולוגיה היא פחות או יותר קמורה, או אם היא קמורה באזורים הרלוונטיים (שלא ליד כמות אפס), אזי רוב הניתוח שלעיל יעמוד בעינו.

תרגילים: בשלב זה אתם אמורים להיות מסוגלים לפתור:

בעיות 19,20 בבחינה לדוגמה מס' 1

בעיה 20 בבחינה לדוגמה מס' 2

בעיה 20 בבחינה לדוגמה מס' 3

בחינה לדוגמה 1

משך הבחינה: שלוש שעות

חומר עזר מותר בשימוש: אין.

ענו על כל השאלות.

1. יחס פארטו הוא
   a. טרנזיטיבי ושלם
   b. לא בהכרח טרנזיטיבי אך שלם
   c. טרנזיטיבי אך לא בהכרח שלם
   d. לא הכרח טרנזיטיבי ולא הכרח שלם

2. סטודנט א' יקרא "טוב יותר" מסטודנט ב' אם א' הכין יותר שיעורי בית מ-ב', **או** אם השיג ציון גבוה יותר ממבחינה מ-ב', או שניהם. היחס "טוב יותר" הוא
   a. טרנזיטיבי ושלם
   b. לא בהכרח טרנזיטיבי אך שלם
   c. טרנזיטיבי אך לא בהכרח שלם
   d. לא הכרח טרנזיטיבי ולא הכרח שלם

3. לרותי יש פונקצית תועלת המוגדרת על כמויות של שלושה מוצרים, x,y,z:

$$u(x,y,z) = x^2yz^3$$

מי מהפונקציות **אינה** מתארת את העדפותיה של רותי?

   a. $x^4y^2z^6$
   b. $2\log(x)+\log(y)+3\log(z)$
   c. $[(x^4y^2z^6)+5]^3$
   d. x^2+y+z^3

4. מי מהתנאים הבאים **אינו** הגדרה של התנאי "הפונקציה u מייצגת את היחס ≥ " ?
   a. לכל x,y, ‏x~y אם ורק אם u(x)=u(y)
   b. לכל x,y, ‏x≥y אם ורק אם u(x)≥u(y)
   c. לכל x,y, ‏x>y אם ורק אם u(x)>u(y)
   d. אף לא אחד מהנ"ל (כל אחד מהתנאים הוא הגדרה הולמת).

5. מי מהתופעות הבאות יכולה להיות סיבה לחוסר טרנזיטיביות של יחס ההעדפה?
   a. הבדלים קטנים מדי לאבחנה
   b. בעיות של משמעת עצמית
   c. ריבוי קריטריונים שאינם ניתנים להשוואה
   d. כל הנ"ל
   e. אף לא אחד מהנ"ל.

ארבע השאלות הבאות מתייחסות לטוליפ. טוליפ היא חתולה שאוהבת אוכל וליטופים, אבל במידה. היא לא אוכלת מעבר לכמות מסוימת של מזון, F_0, וגם לא מסכימה שילטפו מעל C_0 דקות. נניח כי u(F,C) היא פונקצית תועלת המתארת אם העדפותיה של טוליפ על אוכל (F) וליטופים (C), והיא נתונה ע"י

$$u(F,C) = \log(\min(F,F_0)) + \log(\min(C,C_0))$$

6. האם ההעדפות של טוליפ הן מונוטוניות?
   a. ההעדפות של טוליפ מקיימות מונוטוניות בסיסית אך לא מונוטוניות חלשה
   b. ההעדפות של טוליפ מקיימות מונוטוניות חלשה אך לא מונוטוניות חזקה
   c. ההעדפות של טוליפ מקיימות מונוטוניות חזקה
   d. אף לא אחד מהנ"ל.

7. האם ההעדפות של טוליפ הן קמורות?
   a. ההעדפות של טוליפ אינן קמורות
   b. ההעדפות של טוליפ מקיימות קמירות חלשה אך לא קמירות חזקה
   c. ההעדפות של טוליפ מקיימות קמירות חזקה
   d. אף לא אחד מהנ"ל.

8. טוליפ יכולה להקדיש את זמנה לאכילה או לנסיונות לקבל ליטופים. היא יכולה לאכול כאוות נפשה, בקצב קבוע. לעומת זאת, הליטופים נעשים קשים להשגה: אם היא מקדישה T דקות לחנופה, היא מקבלת רק $T^{1/2}$ ליטופים. מה תוכלו לומר על קבוצת התקציב של טוליפ, במישור FC?

a. קבוצת התקציב אינה קמורה
b. קבוצת התקציב קמורה במובן החלש אך לא החזק
c. קבוצת התקציב קמורה במובן החזק
d. אף לא אחד מהנ"ל.

9. הפתרון של בעית האופטימיזציה של טוליפ הוא יחיד, לכל F_0,C_0

a. נכון
b. לא נכון, בגלל שההעדפות אינן קמורות במובן החזק
c. לא נכון, בגלל שקבוצת התקציב אינה קמורה במובן החזק
d. לא נכון, בגלל שההעדפות אינן מונוטוניות
e. אף לא אחד מהנ"ל.

10. פרט מסוים ביקש משני כלכלנים שיפתרו עבורו את בעית הצרכן. שניהם השוו יחסי נגזרות, הצליבו עם קו תקציב, אך מצאו פתרונות שונים. הסיבה יכולה להיות

a. ההעדפות אינן קמורות
b. קבוצת התקציב אינה קמורה
c. כל הנ"ל
d. אף לא אחד מהנ"ל.

11. אם גמישות הביקוש ביחס למחיר (של אותו מוצר) היא 1-, אזי

a. סך ההוצאה על המוצר אינו תלוי במחירו
b. גמישות הביקוש של המוצר השני (ביחס למחירו של הראשון) היא אפס
c. המוצר אינו יכול להיות מוצר גיפן
d. כל הנ"ל
e. אף לא אחד מהנ"ל.

12. נתבונן בפונקציה

$$u(x_1,x_2) = \min(2x_1,3x_2)$$

האם ייתכן שמוצר 1 הוא מוצר גיפן?

a. לא, מכיון שאפקט התחלופה במקרה זה חזק מאפקט ההכנסה
b. לא, מכיון שאפקט ההכנסה חזק מאפקט התחלופה
c. לא, מכיון מוצר 1 הוא נורמלי
d. כן, לפחות בטווח מסוים של המחיר
e. אף לא אחד מהנ"ל.

13. נתבונן בפונקציה

$$u(x_1,x_2) = 2x_1+3x_2$$

לאחר שינוי במחירו של מוצר 1, חושבו מדדי המחירים של לספייר, L, (לפי הכמויות הקודמות) ושל פאשה, P, (לפי הכמויות החדשות). גם במחירים הקודמים וגם במחירים החדשים הסלים האופטימליים היו פתרונות יחידים והיו בהם כמויות חיוביות של שני המוצרים. האם ייתכן ש- $L\leq 1\leq P$?

a. לא, כי למדנו שלא
b. כן, כי מה שלמדנו תקף רק לשינוי של שני המחירים
c. לא, כי $L\leq 1\leq P$ לא ייתכן כאשר משתנה רק מחירו של אחד המוצרים
d. כן, כי מה שלמדנו היה בהנחה של פתרון יחיד
e. אף לא אחד מהנ"ל.

14. לפרט פונקצית העדפה על פנאי L ושאר המוצרים Y הנתונה על-ידי

$$u(L,Y) = a\cdot\log(L)+\log(Y)$$

עבור $a>0$. הכנסתו היא 24 שעות פנאי (ואפס מוצר Y). השכר הראלי הוא w. ניתן לומר ש-

a. לכל $a>0$ קיים w גבוה מספיק כך שהפרט יעדיף לא לעבוד כלל
b. לכל w קיים a גבוה מספיק כך שהפרט לא יעבוד כלל
c. שני הנ"ל
d. אף לא אחד מהנ"ל.

שתי השאלות הבאות מתייחסות לפרט החי שלוש תקופות, ואשר העדפותיו על זרמי תצרוכת, (c_0,c_1,c_2), נתונות ע"י הפונקציה

$$U(c_0,c_1,c_2) = b\cdot\log(c_0) + 2\cdot\log(c_1) + \log(c_2)$$

באשר $b>0$.

15. ההעדפות הפרט מקיימות
   a. מונוטוניות וקמירות לכל b
   b. עקביות דינמית לכל b
   c. שני הנ"ל
   d. אף לא אחד מהנ"ל.

16. אם שער הרבית הוא אפס, הפרט הנ"ל יעדיף לחלק את תצרוכתו באופן שווה בין שלוש התקופות
   a. לא נכון: הפרט יבחר c_1 הגדול פי שניים מ-c_2
   b. נכון: זה נובע מקעירות פונקצית ה- log
   c. אף לא אחד מהנ"ל.

17. בהינתן הימור בין זכייה ב- x ₪ בהסתברות 50% והפסד x ₪ בהסתברות 50%, הפרט מעדיף להמר. מכאן שהפרט אוהב סיכון.
   a. לא נכון: ייתכן שהפרט נייטרלי לסיכון
   b. לא נכון: יש לדעת שזה נכון גם לכל רמת רכוש ולכל גובה הימור
   c. לא נכון: ייתכן שהפרט יהיה שונא סיכון כאשר ההסתברויות שונות מ- 50%-50%
   d. כל הנ"ל
   e. אף לא אחד מהנ"ל.

18. פרט שונא סיכון עומד בפני מגבלת תקציב "הוגנת": הוא יכול להעביר הכנסה בין מצבי הטבע כל עוד תוחלת ההכנסה קבועה.

a. הפרט יבחר להיות על קו הוודאות
b. על קו הוודאות, יחסי התועלות השוליות ישתוו ליחסי ההסתברויות
c. שני הנ"ל
d. אף לא אחד מהנ"ל.

19. פירמה מייצרת y עם תשומה x ופונקצית הייצור $y=x^3$.

a. הפונקציה אינה קעורה, אך ניתן להפעיל טרנספורמציה מונוטונית שתהפוך אותה לקעורה
b. הפונקציה קוואזי-קעורה, וזה מספיק כדי לדעת שיהיה פתרון פנימי
c. שני הנ"ל
d. אף לא אחד מהנ"ל.

20. פירמה מייצרת y עם תשומות x_1,x_2 ופונקצית הייצור $y=x_1^3+x_2^{1/3}$. כמות כל אחד מגורמי הייצור חסומה ע"י כמות $a>10$. מחירי גורמי הייצור שווים ושווים גם למחיר התפוקה y. בבחירה אופטימלית מתקיים

a. התפוקה השולית של x_1 שווה לזו של x_2
b. התפוקה השולית של x_1 שווה ל-1
c. התפוקה השולית של x_2 שווה ל-1
d. כל הנ"ל
e. אף לא אחד מהנ"ל.

פתרון בחינה לדוגמה 1

1. יחס פארטו הוא טרנזיטיבי: נניח ש- x עדיף פארטו על y ו- y עדיף פארטו על z. מכיון שכל הפרטים מוצאים את x טוב לפחות כמו y ואת y טוב לפחות כמו את z, אזי, מכיון שכל אחד מהם בעל העדפות טרנזיטיביות, כל אחד מוצא את x טוב פחות כמו z. בנוסף, לפחות פרט אחד חושב ש- x ממש עדיף על y, ופרט זה לכן ימצא את x ממש עדיף על z, ומכאן ש- x עדיף פארטו על z. לעומת זאת, היחס אינו שלם: שני פרטים עם שתי אלטרנטיבות כשהראשונה מגדירה וקטור תועלות (1,0) ואילו השניה – (0,1) אינן ניתנות לדירוג פארטו.
2. היחס אינו שלם כי הוא מוגדר ע"י אי שיוונות חזקים: שני סטודנטים זהים בציוניהם לא יהיו מדורגים. אם היינו מחליפים את האי שוויונות החזקים בחלשים, היינו מקבלים יחס שלם. היחס אינו טרנזיטיבי, כמו זניתן לראות מהשלשה (3,2)<(1,3)<(2,1) (כאשר (2,1) אינו עדיף על (3,2)).
3. (a) מתקבלת ע"י העלאה בריבוע, ו – (b) ע"י הוצאת לוגריתם – שתיהן מוגדרות היטב ועולות בתחום החיובי. (c) מתקבלת ע"י העלאה בריבוע עם תוספת קבוע והעלאה בחזקה איזוגית (שהיא טרנספורמציה עולה אפילו אם בגלל הקבוע היינו בתחום השלילי). (d), לעומת זאת, פונקציה שונה מבחינת הסדר שהיא מגדירה.
4. (b) ו- (c) הן הגדרות שקולות, ושתיהן גוררות גם את (a). זה האחרון, לעומת זאת, אינו מספיק: פונקצית התועלת אינה משמשת רק להגדרת השקילות (או עקומות האדישות) אלא גם לדירוג ביניהן. למשל, v=-u תהיה פונקציה שמקיימת את (a) אך לא מייצגת את היחס .
5. כל האפשרויות נכונות. הבדלים קטנים מדי, כמו בדוגמה של גרגרי הסוכר בספל הקפה, גוררים הפרה של טרנזיטיביות יחס השקילות. משמעת עצמית דרושה כאשר ההעדפות ה"גולמיות" יוצרות מעגלים של העדפה חזקה (למשל, אני מעדיף להוציא עוד 100 ₪ ועוד 100 ₪ וכו', אך מעדיף לא לקנות כלום מאשר להיות בחוב). לבסוף, קריטריונים רבים שאינם קלים להשוואה ושקלול מזמינים קריטריוני החלטה כגון "א עדיף על ב מרוב הבחינות" – המגדירים יחס לא טרנזיטיבי כמו בפרדוקס הבחירות של Condorcet.
6. ההעדפות מקיימות מונוטוניות בסיסית: הגדלת C או F לעולם לא תקטין את ערך פונקציה התועלת. אך המונוטוניות החלשה כבר אינה מתקיימת: מעבר לרמות הרוויה, כאשר $C \geq C_0$ וגם $F \geq F_0$, הגדלת המשתנים לא משנה את ערך הפונקציה.

7. ההעדפות מקיימות קמירות במובן החלש. קל לראות זאת אם נצייר את עקומות האדישות, שהן נראות כמו Cobb-Douglas בתוך המלבן ($0 \le C \le C_0$ וגם $0 \le F \le F_0$) , ומתיישרות מחוצה לו – למעט קבוצת האדישות המוגדרת ע"י ($C \ge C_0$ וגם $F \ge F_0$). בגלל שחלקים מעקומות האדישות הם מקטעים ישרים, זוהי רק קמירות חלשה.
8. נניח שטוליפ בחרה להשקיע T דקות בחנופה, ואת שאר הזמן באכילה, ושהחלטה זו הביאה אותה לנקודה כלשהי על העקומה (F,C). C פונקציה לינארית של הזמן שאינו מנוצל לליטופים. למשל, אם יש לטוליפ 60 דקות וקצה האכילה הוא יחידת אוכל לדקה, אזי $C=(60-T)$. הליטופים נתונים ע"י הפונקציה $F=T^{1/2}$. אם נגדיל את הזמן המוקדש לאוכל ביחידה, נקבל יחידת מזון, ונוותר לשם כך על $(1/2)T^{-1/2}$ יחידות ליטוף. ככל ש- T גדול יותר, ויתור זה קטן יותר. אם נרצה לצייר את קבוצת התקציב, אפשר להתחיל בנקודה על ציר C, הלוא היא ($0,60^{1/2}$), ולרדת ימינה: בתחילה, T גדול ו- $(1/2)T^{-1/2}$ קטן, הווה אומר שצריך לוותר על מעט ליטוף כדי לקבל יחידת מזון. ככל ש- T קטן (ואנו מתקרבים לנקודה (60,0)), השיפוע נעשה תלול יותר. מתקבל, אפוא, שקבוצת התקציב קמורה, ואפילו במובן החזק (אם אנחנו מתעלמים, כנהוג, מהצירים).
9. יכולה להיות בעית אי-יחידות, אם C_0,F_0 קטנים מספיק כך שהנקודה (C_0,F_0) בתוך קבוצת התקציב – ואז אין יחידות בגלל העדר מונוטוניות (אפילו חלשה היתה מספיקה). הקמירות אינה קושי מכיון שההעדפות קמורות ממש (ומספיק שאחת הקבוצות מקיימת קמירות חזקה בשביל יחידות).
10. שתי האפשרויות תקפות: אם ההעדפות אינו קמורות (אפילו לא במובן החלש) **או** שקבוצת התקציב אינה קמורה (אפילו לא במובן החלש), יכול להיות ריבוי נקודות השקה ולא כולן בהכרח אופטימליות. קמירות חזקה של אחת מהקבוצות מבטיחה נקודת השקה יחידה (ואופטימלית), בשעה שקמירות חלשה של שתי הקבוצות מבטיחה שנקודת השקה היא גם אופטימלית, אך לאו דוקא יחידה.
11. אם גמישות המחיר העצמית היא 1-, הרי שהכמות היא היפרבולה של המחיר, ומכפלת המחיר בכמות היא קבועה, ולכן (a) נכונה. מכיון שסך ההוצאה על המוצר אינה משתנה עם השינוי במחירו (בלבד), הרי שסך ההוצאה על המוצר השני אף היא לא תשתנה ולכן גמישות הביקוש הצולבת היא אפס. ולבסוף, המוצר אינו יכול להיות גיפן מההגדרה הפשוטה: מוצר גיפן הוא כזה ש(לפחות בטווח מסוים) הביקוש לו עולה כפונקציה של המחיר, ז.א. שגמישות המחיר (לפחות בטווח מסוים) היא חיובית (ולא 1-).

12. אפקט התחלופה במקרה של ההעדפות המינימום הוא אפס, ולכן אינו יכול לגבור על שום אפקט. מצד שני, אין על מי לגבור: אפקט ההכנסה הוא חיובי ושני המוצרים נורמליים. חכן התשובה היא (c).

13. אם משתנה רק מחירו של מוצר אחד, אחת מקבוצות התקציב היא תת-קבוצה של רעותה, כי קו התקציב נע סביב נקודת החיתוך שלו עם אחד הצירים (כלפי פנים או כלפי חוץ, בתלות בכיוון השינוי במחיר). לכן לא ייתכן שכל אחד מהסלים אפשרי בקבוצת התקציב של השני, כפי שמשתמע מהאי שוויונות L≤1≤P.

14. פתרון בעית הצרכן נותן את התנאי L=[a/(1+a)]24. לכן היצע העבודה (והביקוש לפנאי) אינו תלוי ב- w. מכאן ש- (a) אינו נכון. גם (b) אינו נכון, אם כי, אם נשאיף את a לאינסוף הרי שבגבול הפרט אכן יצרוך את כל הפנאי ולא יעבוד כלל. (אך (b) עדיין איננו נכון.)

15. המונוטוניות נובעת מכך ש-log היא פונקציה מונוטונית, וסכם של פונקציות מונוטוניות (במובן החלש/חזק) הוא פונקציה מונוטונית (במובן החלש/חזק – **בהתאמה**: חלש גורר חלש וחזק גורר חזק). במקרה זה, סכום של פונקציות מונוטוניות במובן החלש הוא מונוטוני גם במובן החזק. (כי כל אחת משלוש הפונקציות תלויה רק באחד משלושת המשתנים, ולכן היא רק מונוטונית במובן החלש, אך הסכום של שלושתן כבר מקיים מונוטוניות חזקה). כמו-כן, כל אחת מהפונקציות קעורה במשתנה שלה, ולכן קעורה כפונקציה של שלושת המשתנים (אם כי רק קעורה במובן החלש, בהיותה בלתי תלויה באחרים). וסכום של פונקציות קעורות הוא פונקציה קעורה (שוב אותו סיפור עם חלש/ חזק), ובמקרה זה הסכום הוא פונקציה קעורה אפילו במובן החזק, למרות שזה לא ממש חשוב לענייננו. מה שחשוב הוא שהפונקציה קעורה במובן החלש (לפחות) ולכן מגדירה העדפות קמורות. – וכל זאת תקף לכל b>0. לעומת זאת, עקביות דינמית מובטחת רק אם b=4, כך שיחס המקדמים בין כל שתי תקופות זהות הוא קבוע. אם, למשל, b>4, הפרט יתכנן בתקופה 0 חלוקת תקציב מסוימת בין תקופות 1 ו- 2, אך כאשר יגיע לתקופה 1 (והיא תיקרא "תקופה 0", ואילו תקופה 2 תיקרא "תקופה 1"), יגלה שהוא מעדיף לחסוך פחות מאשר תכנן מראש.

16. קעירות פונקצית ה- log אכן מצביעה על העדפה להחלקת תצרוכת על פני זמן, אך בל נשכח שיש גם מקדמים מעורבים בסיפור. ומכיון שהמקדם של תקופה 1 גדול פי 2 מזה של תקופה 2, תקופה 1 תקבל משקל גדול יותר. במקרה המסוים של פונקציה זו, כאשר הנגזרות החלקיות הן $(2/c_1)$ ו- $(1/c_2)$ ביחס למשתנים c_1 ו- c_2 בהתאמה, נקבל אכן ש- (a) נכונה.

17. ניטרליות לסיכון לא תצמיח לנו פתאום העדפה להימור הוגן – הפרט יהיה אדיש בין ההימור והאופציה הבטוחה, ולכן (a) אינה נכונה. אם, לעומת זאת, ההעדפה להימור מתקיימת לכל

רמת רכוש ולכל גובה הימור, הפונקציה קמורה ולפנינו פרט אוהב סיכון (ולכן (b) נכונה).
תשובה (c) אינה נכונה מכיון שאם הפרט שונא סיכון ביחס לכל הסתברות שאיננה 50%- 50%, הוא יהיה גם שונא סיכון כאשר מדובר בהסתברויות אלו.

18. אכן, פרט שונא סיכון, עפ"י הגדרת המושג, יעדיף להיות בנקודה A כלשהי על קו הוודאות מאשר על כל נקודה השקולה לה מבחינת תוחלת ההכנסה. לכן (a) נכונה. כמו-כן, כאשר נחשב יחס נגזרות חלקיות על קו הוודאות, נגזרות פונקצית התועלת מצטמצמות (מכין שמדובר באותה פונקציה בכל מצבי הטבע, ומכיון שעל קו הוודאות ההכנסה בכל מצבי הטבע זהה אך היא) – ונותרות רק ההסתברויות, שהן המקדמים של פונקצית התועלת (בכל מצב טבע בנפרד) בתועלת הכללית (היא התוחלת, היינו הסכום המשוקלל בהסתברויות).
19. הפונקציה אכן אינה קעורה, אך בתורת הצרכן איננו חופשיים להפעיל טרנספורמציות מונוטוניות כאוות נפשנו, מכיון שמדובר בכמויות ריאליות של מוצרים. לכן (a) אינה נכונה. לגבי (b): נכון אמנם שהפונקציה קוואזי-קעורה, אך אין זה מספיק לבעית היצרן. כדי להבין את האנלוגיה לבעית הצרכן, יש לחשוב במונחי "קבוצת הטכנולוגיה" במישור x,y. (כאילו ש- y מלוהק לתפקיד x_2) ובמישור זה קבוצת הטכנולוגיה לא תהיה קבוצה קמורה.
20. מכיון שפונקצית הייצור היא סכום של פונקציה של x_1 ופונקציה של x_2, ניתן לבחור כל אחד מהם בנפרד. הפונקציה של x_2 היא קעורה, ולכן יש הגיון בחיפוש נקודת השויון בין ערך התפוקה השולית למחיר גורם הייצור. שויון זה אכן מושג כאשר התפוקה השולית שווה ל-1 (יחס המחירים), וצריך רק לבדוק שפתרון זה הוא אכן בתחום המותר (היינו, ש- a מספיק גדול). מסתבר שאכן זהו המצב ולכן (c) תשובה נכונה. לעומת זאת, אין הגיון בחיפוש תנאי פנימי מסוג זה עבור x_1, שכן הפונקציה שלו קמורה, ואם נמצא כזה פתרון פנימי נהיה בנקודה של מינימום רווח. עבור גורם ייצור זה נבחר לא להשתמש בו כלל, או להשתמש ברמה המקסימלית, ומכל מקום תשובות (a,b) אינן נכונות.

בחינה לדוגמה 2

משך הבחינה: שלוש שעות

חומר עזר מותר בשימוש: אין.

ענו על כל השאלות.

1. בהנחה של מצביע בעל העדפות שלמות וטרנזיטיביות, היחס "לפחות 50% מהמצביעים מוצאים x טוב לפחות כמו y" הוא
   a. טרנזיטיבי ושלם
   b. לא בהכרח טרנזיטיבי אך שלם
   c. טרנזיטיבי אך לא בהכרח שלם
   d. לא הכרח טרנזיטיבי ולא הכרח שלם.

2. סטודנט א' יקרא "טוב יותר" מסטודנט ב' אם (ורק אם) א' הכין יותר שיעורי בית מ-ב', **וגם** א' השיג ציון גבוה יותר בבחינה מ-ב'. היחס "טוב יותר" הוא
   a. טרנזיטיבי ושלם
   b. לא בהכרח טרנזיטיבי אך שלם
   c. טרנזיטיבי אך לא בהכרח שלם
   d. לא הכרח טרנזיטיבי ולא הכרח שלם.

3. לרני יש פונקצית תועלת המוגדרת על כמות של מוצר אחד, x:

$$u(x) = x^3$$

מי מהפונקציות הבאות **אינה** מתארת את העדפותיו של רני?

   a. $5x$
   b. $(x+1)^2$
   c. $(x - 1)^2$
   d. $(x - 3)^9$

4. אם הפונקציה u מייצגת את היחס ≥ מה **אינו** בהכרח נכון?
   a. ≥ שלם
   b. ≥ טרנזיטיבי
   c. ≥ רציף
   d. כל הנ"ל
   e. אף לא אחד מהנ"ל.

5. משמעות הטענה שפונקצית התועלת היא "אורדינלית" היא
   a. שהפונקציה שייכת למשפחת פונקציות שהבחירה ביניהן שרירותית
   b. שהפונקציה שייכת למשפחת הפונקציות האורדינליות
   c. שהפונקציה לא מגדירה יחס סדר על האלטרנטיבות
   d. כל הנ"ל
   e. אף לא אחד מהנ"ל.

חמש השאלות הבאות מתייחסות לסופי. סופי היא כלבה שאוהבת לשחק וללקק עוברים ושבים. נניח כי $u(P,L)$ היא פונקצית תועלת המתארת אם העדפותיה של סופי על מספר השעות המוקדשות למשחק (P) ומספר השעות המוקדשות לליקוקים (L), והיא נתונה ע"י

$$u(P,L) = \max (P,L)$$

(P ו-L יכולים להיות גם לא שלמים.)

6. האם ההעדפות של סופי הן מונוטוניות?
   a. ההעדפות של סופי מקיימות מונוטוניות בסיסית אך לא מונוטוניות חלשה
   b. ההעדפות של סופי מקיימות מונוטוניות חלשה אך לא מונוטוניות חזקה
   c. ההעדפות של סופי מקיימות מונוטוניות חזקה
   d. אף לא אחד מהנ"ל.

7. האם ההעדפות של סופי הן קמורות?
   a. ההעדפות של סופי אינן קמורות
   b. ההעדפות של סופי מקיימות קמירות חלשה אך לא קמירות חזקה
   c. ההעדפות של סופי מקיימות קמירות חזקה
   d. אף לא אחד מהנ"ל.

בשלוש הבעיות הבאות, הניחו גם כי סופי מחלקת את זמנה בין משחק לליקוקים. היא יכולה ללקק מס' שעות ביום שלא עולה על L_0, (כי אז כבר לכולם נמאס ממנה). גם זמן המשחק חסום ע"י מספר שעות ביום, P_0. למזלה של סופי, $L_0+P_0>24$.

8. מה תוכלו לומר על קבוצת התקציב של סופי, במישור PL?
   a. קבוצת התקציב אינה קמורה
   b. קבוצת התקציב קמורה במובן החלש אך לא החזק
   c. קבוצת התקציב קמורה במובן החזק
   d. אף לא אחד מהנ"ל.

9. הפתרון של בעית האופטימיזציה של סופי הוא יחיד, לכל P_0,L_0
   a. נכון
   b. לא נכון, בגלל בעיה הקשורה לקמירות ההעדפות
   c. לא נכון, בגלל בעיה הקשורה לקמירות קבוצת התקציב
   d. לא נכון, בגלל בעיה הקשורה למונוטוניות
   e. אף לא אחד מהנ"ל.

10. נניח כעת כי העדפותיה של סופי הן

$$u(P,L) = \min(P,L)$$

וכן ש- $P_0=L_0$. האם כעת יהיה הפתרון לבעייתה של סופי יחיד?

a. כן
b. לא, בגלל בעיה הקשורה לקמירות ההעדפות
c. לא, בגלל בעיה הקשורה לקמירות קבוצת התקציב
d. לא, בגלל בעיה הקשורה למונוטוניות
e. אף לא אחד מהנ"ל.

11. אם גמישות הביקוש של מוצר מסוים ביחס להכנסה גדולה מ-1, אזי (חייב להיות ש-)

a. יש מוצר אחר שגמישות הביקוש שלו ביחס להכנסה קטנה מ-0
b. יש מוצר אחר שגמישות הביקוש שלו ביחס להכנסה קטנה מ-1 (אך לא בהכרח קטנה מ-0)
c. יש מוצר אחר שגמישות הביקוש שלו ביחס להכנסה גדולה מ-1
d. כל הנ"ל
e. אף לא אחד מהנ"ל.

12. נתבונן בפונקציה

$$u(x_1,x_2) = 2x_1+3x_2$$

גמישות הביקוש של מוצר 1 ביחס למחירו של מוצר 2 היא

a. לא תמיד מוגדרת
b. אפס בתחום הגדרתה
c. שווה לגמישות הביקוש של מוצר 2 ביחס למחירו של מוצר 1, כאשר אלו מוגדרות
d. כל הנ"ל
e. אף לא אחד מהנ"ל.

13. בהנחה שפתרון בעית הצרכן יחיד לפני ואחרי שינוי מחירים, אם מדד המחירים של לספייר, L, (לפי הכמויות הקודמות) קטן מ-1, אזי מדד המחירים של פאשה, P, (לפי הכמויות החדשות) מקיים

a. $P>1$

b. $P=1$

c. $P<1$

d. אף אחד מהנ"ל אינו נכון בהכרח.

שתי השאלות הבאות מתייחסות לפרט פונקצית העדפה על פנאי L ושאר המוצרים Y הנתונה על-ידי

$$u(L,Y) = a\cdot L + Y$$

עבור $a>0$. הכנסתו היא 24 שעות פנאי (ואפס מוצר Y) ומחיר מוצר Y הוא 1. השכר הראלי הוא w.

14. ניתן לומר ש-

a. הפרט יבחר בנקודה שבה יש שוויון בין יחס התועלות השוליות מ-L ומ-Y ל- w

b. הפרט יבחר בנקודה שבה יש שוויון בין יחס התועלות השוליות מ-L ומ-Y ל- a

c. שני הנ"ל

d. אף לא אחד מהנ"ל.

15. קיים שכר מסוים w_0 כך שלכל $w>w_0$,

a. הפרט יעבוד 24 שעות ביממה

b. הפרט יהיה ברמת תועלת גבוהה יותר ככל ש-w גבוה יותר

c. שני הנ"ל

d. אף לא אחד מהנ"ל.

שתי השאלות הבאות מתייחסות לפרט החי ארבע תקופות, ואשר העדפותיו על זרמי תצרוכת, (c_0,c_1,c_2,c_3), נתונות ע"י הפונקציה

$$U(c_0,c_1,c_2,c_3) = 10\cdot\log(c_0) + 4\cdot\log(c_1) + 2\cdot\log(c_2) + \log(c_3)$$

16. ההעדפות הפרט **אינן** מקיימות
    a. שלמות
    b. קמירות
    c. עקביות דינמית
    d. כל הנ"ל (אף אחת מהתכונות אינה מתקיימת)
    e. אף לא אחד מהנ"ל (כל התכונות מתקיימות).

17. קיים שער רבית שבו הפרט יכול להעביר יחידות c מתקופה לתקופה (הן קדימה והן אחורה בזמן, היינו הוא יכול ללוות ולחסוך באותו שער רבית). מה צריך להיות שער הרבית r כדי שהפרט הנ"ל יעדיף לחלק את תצרוכתו באופן שווה בין ארבע התקופות?
    a. אין שער רבית כזה
    b. r צריך להיות כך ש $2<(1+r)$ ז.א. $r>1$
    c. r צריך לקיים $(1+r)=2.5$ ז.א. $r=1.5$
    d. אף לא אחד מהנ"ל.

18. לכל $x>0$, הפרט מעדיף להמר על זכייה ב- x ₪ בהסתברות 75% והפסד של 3x ₪ בהסתברות 25% מאשר לא להמר (ולהישאר עם עושרו ההתחלי). יכול להיות ש-
    a. הפרט אוהב סיכון
    b. הפרט אינו ממקסם תוחלת תועלת
    c. הפרט מנסה למקסם תוחלת תועלת אך טועה בחישוביו
    d. כל הנ"ל
    e. אף לא אחד מהנ"ל.

19. מפעל הפיס מציע הגרלת לוטו המניבה רווח חיובי (למפעל הפיס) כל שבוע. הגרלת הלוטו הכפילה את הפרס הגדול פי 2 ואת הסיכוי לזכות בו הקטינה פי 2. מיקי הוא פרט שונא סיכון הממקסם תוחלת תועלת. יכול להיות ש-

a. מיקי ישתתף בהגרלה החדשה למרות שלא השתתף בקודמת
b. מיקי השתתף בהגרלה הקודמת אך לא ישתתף בחדשה
c. שני הנ"ל
d. אף לא אחד מהנ"ל.

20. פירמה מייצרת y עם תשומות x_1,x_2 ופונקצית הייצור $y=x_1\cdot x_2^{1/3}$. הפירמה, השואפת למקסם רווחים, יכולה לרכוש כמות M מכל אחת מהתשומות. כאשר מגבלת הכמות M שואפת לאינסוף,

a. הביקוש של הפירמה ל- x_1 ישאף לאינסוף, אך לא הביקוש ל- x_2
b. הביקוש של הפירמה ל- x_1 ול- x_2 ישאף לאינסוף
c. אחד מהנ"ל, בתלות במחירו של גורם הייצור השני, p_2
d. אף לא אחד מהנ"ל.

פתרון בחינה לדוגמה 2

1. יחס העדפת-רוב פשוט הוא שלם, כי הוא הוגדר ע"י אי-שוויונות חלשים ("**לפחות** 50% חושבים ש-x טוב **לפחות** כמו y"). היחס לא היה מקיים את הנחת השלמות אילו היינו דורשים ש- x יועדף על-ידי **יותר מ- 50%**, או שלפחות 50% יפגינו העדפה חזקה של x על פני y. לעומת זאת, יחס זה אינו טרנזיטיבי, כפי שמראה פרדוקס Condorcet. (ולכן התשובה היא (b)).
2. במקרה זה היחס מוגדר ע"י אי-שוויונות חזקים ("**יותר** שיעורי בית", "ציון גבוה **יותר**") ולכן אינו שלם. למשל, סטודנט אינו יכול להיות "טוב יותר" מעצמו על פי הגדרה זו. לעומת זאת, היחס טרנזיטיבי: אם א' טוב מ-ב' וכן ב' טוב מ-ג' לפי הגדרה זו, הרי שבכל קריטריון בנפרד נקבל ש- א' עולה על ג', ולכן א' טוב מ-ג'.
3. שימו לב שהפרט פשוט מעדיף יותר על פחות – אפשר לחשוב על התועלת כ $u(x)=x$. אפשרויות (a) ו- (d) הן פשוטות: אלו טרנספורמציות מונוטוניות בכל התחום (מכפלה בקבוע חיובי במקרה של (a), הפחתת קבוע והעלאה בחזקה אי-זוגית במקרה של (d). ב- (b) יש הזזה בקבוע (תוספת 1 – שהיא טרנספורמציה מונוטונית), והעלאה בחזקה זוגית. העלאה בחזקה זוגית אינה מונוטונית בכל התחום, אך היא מונוטונית בתחום האי-שלילי. ומכיון ש- x הוא כמות של מוצר, ולכן אי-שלילי, x+1 חיובי, ובסך הכל הטרנספורמציה $(x+1)^2$ היא מונוטונית עולה עבור $x\geq0$. כל הדיון הנ"ל משכנע אותנו ש- (c) אינה מתארת את ההעדפות: עבור ערכי x קטנים מ-1, הפונקציה $(x-1)^2$ תהפוך את סדר ההעדפה.
4. שלמות וטרנזיטיביות נובעות מיידית מייצוג מספרי, מכיון שהיחס ≥ על המספרים הממשיים שלם וטרנזיטיבי. אך רציפות תתקיים רק אם u רציפה בתחום הרלוונטי. (קל לתאר דוגמה שבה הפונקציה u "קופצת" בנקודה, ולראות שההעדפות המוגדרות על-ידיה אינן רציפות באותה נקודה.) לכן התשובה היא (c).
5. התשובה היא (a). "אורדינליות" אינה תכונה של פונקציה מסוימת. אורדינליות אומרת משהו על האופן שבו אנחנו משתמשים בפונקציה: אנו חושבים עליה כנציגה של משפחת פונקציות שכל אחת מהן יכולה לשמש לאותה מטרה באותה המידה. לכן (b) אינה נכונה: אין לנו הגדרה של פונקציה מתמטית כ"אורדינלית" או "קרדינלית". כל פונקציה שהיא יכולה להיות כזו או כזו, כתלות באופן שבו אנחנו משתמשים בה. (c) אינה נכונה מכיון שאורדינליות (כשמה) דוקא כן מגדירה סדר. אלו הערכים המספריים המסוימים שמהם

אנחנו מתבקשים להתעלם כאשר הפונקציה היא אורדינלית; את סדר האלטרנטיבות אנחנו דווקא מתבקשים לכבד.

6. מונוטוניות בסיסית בודאי מתקיימת, מכיון שהגדלת ערכי P ו/או L בודאי לא תוריד את ערך הפונקציה. אך גם מונוטוניות חלשה מתקיימת: בנוסף לתנאי המונוטוניות הבסיסית, אם נגדיל את ערכי כל המשתנים (גם P וגם L), הרי שערך המקסימום יגדל ממש. (כדי לוודא שזה נכון, שימו לב שאותו המשתנה שמלכתחילה השיג את הערך המקסימלי גם גדל, ולכן המקסימום החדש חייב לגדול. ייתכן שהוא לא יושג באותו משתנה כמו קודם, אך זאת רק אם המשתנה השני גדל אף יותר.) לעומת זאת, מונוטוניות חזקה לא מתקיימת: אם, למשל, $P>L$ ואנו מגדילים רק את L, ואם אנחנו לא מגדילים יותר מדי (פחות מאשר ההפרש $P-L$, כך ש- P הגדול מבין השניים) אזי ערך המקסימום לא ישתנה. (בשעה שמונוטוניות חזקה דורשת שהגדלת אפילו אחד מהמשתנים תגדיל את ערך הפונקציה.) וכך התשובה היא (b).

7. ההעדפות אינן קמורות: ציירו את הקבוצה $u(P,L)\geq c$ לכל קבוע c ותקבלו (ברביע הראשון) את הקבוצה שנמצאת "מעל וימין" לריבוע המוגדר ע"י $0\leq P,L\leq c$. זוהי אינה קבוצה קמורה: למשל, הנקודות $(0,c)$ ו- $(c,0)$ הן בקבוצה זו, אך הקטע המחבר אותן יוצא מחוץ לקבוצה. שימו לב ש (1) מספיק שנקודה אחת מהקטע אינה בקבוצה כדי שהקבוצה לא תהיה קמורה; (2) מספיק שהנ"ל יהיה נכון לערך אחד של c כדי שההעדפות לא תהיינה קמורות (ואנו הראינו שהקבוצה אינה קמורה לשום ערך של $c>0$). התשובה, לכן, היא (a).

8. כדי לראות שקבוצת התקציב קמורה, הכי פשוט כנראה לצייר אותה. יש מספר אפשרויות לגבי החיתוך של הקו $P+L=24$ עם הקווים $P=P_0$ ו- $L=L_0$, אך בכל המקרים הקבוצה קמורה (במובן החלש). ניתן לראות זאת גם אם שמים לב שקבוצת התקציב מוגדרת ע"י חיתוך של אי-שוויונות לינאריים: $P+L\leq 24$, $P\leq P_0$, $L\leq L_0$ (כמו גם $P\geq 0$ ו- $L\geq 0$) – וחיתוך של אי-שוויונות לינאריים תמיד יגדיר קבוצה קמורה (במובן החלש). הקבוצה אינה קמורה במובן החזק (כמו שקורה בדרך כלל עם קבוצת תקציב בבעית הצרכן), כי יש לשפת הקבוצה מקטעים לינאריים. התשובה היא, אם כך, (b).

9. הפתרון אינו יחיד בגלל העדר הקמירות בהעדפות. (ולכן התשובה היא (b).) למשל, אם $P_0=L_0=c<24$, המקסימום מושג בכל הנקודות שבהן $P=P_0$ או $L=L_0$. בפרט, $(c,0)$ ו- $(0,c)$ נקודות אופטימום. הסיבה שה"בעיה" היא בקמירות היא, שאילו היתה קמירות בהעדפות, השקילות בין שתי הנקודות הללו הייתה גוררת שנקודות ביניהן אף הן אופטימליות, וקמירות חזקה אף היתה גוררת שהנקודות שעל הקטע ביניהן היו טובות ממש משתיהן (ולכן שתי אלו

לא היו יכולות להיות אופטימליות). התופעה של ריבוי פתרונות אופטימליים, כאשר הקטעים ביניהם אינם מורכבים מנקודות אופטימליות, יכולה לקרות רק בהעדר קמירות ההעדפות.

10. במקרה זה הפתרון אכן יהיה יחיד, והתשובה היא (a). העדפות אלו, שהן קמורות במובן החלש, בדרך כלל מצביעות על פתרון אופטימלי לאורך האלכסון ($P=L$ במקרה זה): אין טעם להגדיל את כמות אחד המשתנים אם האחרים נשארים מאחור. חוסר יחידות עדיין ייתכן אם, למשל, $P_0=20$ ו- $L_0=6$. במצב זה, המינימום $u(P,L)=12$ יושג לכל אורך הקטע המחבר את הנקודה (6,6) עם הנקודה (18,6). אפשרות זו נפסלה ע"י הנתון $P_0=L_0$, שמחייב פתרון לאורך האלכסון $P=L$.

11. אנו יודעים שממוצע משוקלל של גמישויות הביקוש (של כל המוצרים) ביחס להכנסה הוא 1. לכן אם אחת מהן גדולה מ-1, יש לפחות אחת אחרת שהיא קטנה מ-1. אין זה אומר שיש גמישות הכנסה נמוכה מ-0, ובוודאי שלא חייבת להיות עוד אחת שהיא גבוהה מ-1. מכאן שהתשובה הנכונה היא (b).

12. התשובה היא (d): בפונקציית תועלת לינארית (ומגבלת תקציב רגילה) המצב די פשוט, אם גם קיצוני: אם יחס המחירים הוא מעבר לסף מסוים (במקרה שלנו, אם $p_1/p_2>2/3$), הצרכן יבחר רק x_2 (היינו, יהיה בנקודה $(0,I/p_2)$); אם יחס המחירים מתחת לסף זה (אם $p_1/p_2<2/3$), הצרכן יבחר רק x_1 (היינו, יהיה בנקודה $(I/p_1,0)$); ואם יחס המחירים הוא בדיוק בנקודה הקריטית ($p_1/p_2=2/3$) בחירת הצרכן תהיה אי שם בין שתי נקודות הקיצון הנ"ל. בנקודה זו האחרונה גמישות הביקוש אינה מוגדרת, מכיון שהביקוש אינו פונקציה מוגדרת היטב – איננו יודעים מה תהיה הכמות המבוקשת כפונקציה של המחירים (וההכנסה), ויתרה מזו – גם לו ידענו, או בחרנו ערך מסוים בטווח המוגדר ע"י סלים אופטימליים, לא היינו יכולים לחשב נגזרות כי הפונקציה המתקבלת לא היתה אפילו רציפה. לכן תשובה (a): גמישות הביקוש אינה תמיד מוגדרת. אך זה גם נכון שכאשר הגמישות מוגדרת – היינו, בשני התחומים שבהם $p_1/p_2<>2/3$ – גמישות הביקוש הצולבת היא אפס. (כאשר $p_1/p_2>2/3$, הביקוש הוא אפס. וכאשר $p_1/p_2<2/3$ הביקוש הוא I/p_1 ולא תלוי ב- p_2.) לכן גם (b) נכונה. ומכיון שכל הנ"ל נכון גם לגבי גמישות הביקוש של מוצר 2 ביחס למחירו של 2, הרי שגם (c) נכונה.

13. אנו יודעים כי לא ייתכן ש- $L\leq1$ וגם $P\geq1$. אם נתון ש- $L<1$, הרי שחייב להיות $P<1$ ולכן התשובה (c) נכונה. לעומת זאת, אין כל הכרח שיתקיימו (a) או (b).

14. תשובה (b) היא לא ממש לעניין: לפי תנאי השוליות, הפרט אמור להשוות יחסי תועלות שוליות ליחסי מחירים, ויחס המחירים הוא w, לא a. (יחס התועלות השוליות הוא a, וזה

נכון בכל נקודה במקרה זה, אך לב הענין הוא השוואה בין שיפוע הקבוצה המצויה לקבוצה הרצויה, ולא בין הרצויה לעצמה.) עם זאת, לא צריך לקפוץ על תשובה (a) כעל מוצאי שלל רב, שכן תנאי השוליות הוא מספיק (לאופטימליות) בתנאים מסוימים, אך אינו הכרחי. בפרט, ייתכן שהפתרון הוא בנקודת קיצון, ואז לא מתקיים שוויון בין יחסי הנגזרות החלקיות, למרות שאלו מוגדרות היטב. וזה המצב במקרה שלפנינו, שמזכיר את בעיה 12 לעיל: פונקציית תועלת לינארית שבאופן אופייני מובילה לפתרונות קיצוניים (כאשר יחסי הנגזרות אינם שווים אך אנו ב"קצה" הקבוצה האפשרית). ולכן התשובה היא (d).

15. ובהמשך לשאלה הקודמת: אכן, כאשר w גבוה מספיק (ובמקרה זה מספיק w>a), הפרט יבחר בנקודת הקיצון שבה הוא צורך אפס פנאי. נקודה זו היא (0,24w) ורמת התועלת של הפרט בה היא 24w, פונקציה עולה ב- w. לכן גם (a) וגם (b) תשובות נכונות.

16. שלמות מתקיימת, כמובן (כמו גם טרנזיטיביות) כל אימת שההעדפות נתונות ע"י מקסימיזציה של פונקציה מספרית. בדומה לשאלה 15 בבחינה הקודמת, גם קמירות (ולמעשה גם מונוטוניות) מתקיימת כאן, כאשר הקמירות נובעת מכך שפונקצית ה- log היא קעורה. עקביות דינמית דורשת שהיחס בין המקדמים של u בין כל שתי תקופות סמוכות יהיה קבוע. במקרה שלפנינו יחס זה אינו קבוע (10/4<>4/2) ולכן אין עקביות דינמית, והתשובה היא (c).

17. נניח שיש שער רבית r ורמת תצרוכת c כך שעבור מגבלת התקציב שמגדיר שער הרבית, הסל (c,c,c,c) הוא אופטימלי. יחס התועלות השוליות בין תקופה 0 לתקופה 1 צריך להיות שווה ל- (1+r), וכן יחס התועלות השוליות בין תקופה 1 לתקופה 2 ובין יחס התועלות השוליות בין תקופה 2 ל- 3. התועלות השוליות (מה שנקבל כשנגזור את הפונקציה הכוללת U נגזרת חלקית לפי המשתנה המתאים) הן $10/c_0, 4/c_1, 2/c_2, 1/c_3$ בהתאמה. אם אנחנו בנקודה אופטימלית שבה $c_0=c_1=c_2=c_3=c$, הרי שצריך להתקיים $(1+r)=[(10/c)/(4/c)]$ כמו גם $(1+r)=[(4/c)/(2/c)]$ ולבסוף $(1+r)=[(2/c)/(1/c)]$. שני השוויונות האחרונים מתאימים, וגוררים $(1+r)=2$. אך הראשון דורש $(1+r)=2.5$. ולכן התשובה היא שאין שער רבית שעבורו חלוקת תצרוכת שווה היא אופטימלית, והתשובה היא (a).

18. ההגרלה המדוברת היא בעלת תוחלת אפס, ולכן פרט שונא סיכון יסרב לה ופרט אוהב סיכון יקבל אותה. מכאן ש- (a) תשובה אפשרית. שימו לב: אין זה הכרחי שהפרט אכן אוהב סיכון, מכיון שאנחנו לא יודעים איך יתנהג הפרט ברמות הכנסה שונות מהנוכחית. כמו-כן חשבו לשים לב שכדי לקבוע שהפרט מתנהג במקרים אלה כאוהב סיכון איננו צריכים לדעת שהפרט אכן ממקסם תוחלת תועלת. שנאת ואהבת סיכון הוגדרו באופן התנהגותי; אם

הפרט ממקסם תוחלת תועלת, אופני התנהגות אלה מתאימים לפונקציה קעורה או קמורה (בהתאמה), אך אופני ההתנהגות מוגדרים ללא תלות בהנחת תוחלת התועלת. תשובה (b) גם אפשרית: פרט שאינו ממקסם תוחלת תועלת יכול להעדיף הגרלות על פני תוחלתן (להתנהג באופן אוהב סיכון). למשל, יכול להיות שהפרט מתואר ע"י תיאוריה אחרת, המתייחסת לרמת העושר הנוכחית, בדומה ל- Prospect Theory, ומתנהג אחרת כאשר מדובר ברווח לעומת הפסד, אך, בניגוד להנחה הרווחת, אינו מגלה שנאת הפסד אלא דוקא להפך. לבסוף, ייתכן שהפרט מנסה לחשב תוחלת תועלת ולהביא אותה למקסימום, עבור פונקצית תועלת קעורה, אך טועה בחשבון. סעיף זה נועד להזכיר לנו שניתן לחשוב על מקסימיזציה של תוחלת תועלת כעל תהליך מנטלי שאכן מתנהל במוחו של הפרט, למרות שאין כל הכרח לדבוק בפרשנות זו: מקסימיזציה של תוחלת התועלת לרוב נתפסת כצורה לתאר את התנהגות הפרט, ללא כוונה לתאר תהליך מחשבתי מודע. לכן התשובה היא (d).

19. מהעובדה שההגרלה מניבה רווח חיובי, בעזרת חוק המספרים הגדולים, אנו יכולים להקיש שהסיכוי לזכות בפרס קטן מספיק כדי להפוך את תוחלת הזכיה לנמוכה ממחיר כרטיס ההגרלה. מכאן, שפרט שונא סיכון לא ישתתף בהגרלה כזו. (כדי לקבל מסקנה זו אין לנו צורך בהנחה שהפרט ממקסם תוחלת תועלת.) לכן מיקי לא ישתתף בהגרלה המקורית. ההגרלה החדשה הכפילה את הפרס אך הקטינה את ההסתברות לו פי 2, ולכן היא בעלת אותה תוחלת רווח, היינו, תוחלת שהיא עדיין נמוכה ממחיר הכרטיס, ולכן מיקי לא ישתתף בהגרלה החדשה גם כן. התשובה הנכונה היא, אפוא, (d).

20. ראשית נשים לב שעבור פונקציה זו, בעלת תשואה עולה לגודל, כל אימת ש- $p_y>0$, יהיה M גדול מספיק כך שהפירמה יכולה להגיע לרווח חיובי. ובמצב זה היא תרצה להגדיל את הרווח ע"י הגדלה הכמויות של x_1,x_2 ו- y. ללא מגבלת כמויות, הרווח יהיה אינסופי. הפירמה אכן תעצור כאשר אחד מגורמי הייצור ייתקל במגבלה M. כך שהביקוש לאחד משני גורמי לפחות הייצור יצטרך לשאוף לאינסוף. אך תנאי האופיטמליות לפונקצית ייצור זו (שהיא Cobb-Douglas) הוא $x_2/x_1=(1/3)(p_1/p_2)$, הווה אומר, יחסי כמויות קבועים בין שני גורמי הייצור. מכאן, שהביקוש לשני גורמי הייצור יעלה עם M, וישאף לאינסוף כאשר M שואף לאינסוף, ומכאן שהתשובה היא (b).

בחינה לדוגמה 3

משך הבחינה: שלוש שעות

חומר עזר מותר בשימוש: אין.

ענו על כל השאלות.

ארבע השאלות הבאות מתייחסות למקרה הבא. שירי ויוני בעלי יחסי העדפה שלמים וטרנזיטיביים על קבוצת אלטרנטיבות סופית. עבור שתי אלטרנטיבות x,y, נאמר כי $x \geq y$ אם קיימת אלטרנטיבה z כך ששירי מעדיפה את x לפחות כמו את z, ויוני מעדיף את z לפחות כמו את y.

1. היחס $\geq$ הוא שלם
   a. נכון
   b. לא בהכרח נכון

2. היחס $\geq$ הוא רפלקסיבי
   a. נכון
   b. לא בהכרח נכון

3. היחס $\geq$ הוא טרנזיטיבי
   a. נכון
   b. לא בהכרח נכון

4. נניח כעת כי לשירי ויוני יש יחסי העדפה זהים. במקרה זה, היחס $\geq$ הוא
   a. ניתן לייצוג ע"י פונקצית התועלת של שירי
   b. ניתן לייצוג ע"י פונקצית התועלת של יוני
   c. שני הנ"ל
   d. אף לא אחד מהנ"ל.

5. לרני יש פונקצית תועלת המוגדרת על כמויות שני מוצרים, x_1,x_2:

$$u(x_1,x_2) = (-x_1)^3(x_2-3)^2$$

העדפותיו של רני הן (באשר "מונוטוניות" מתייחסת למונוטוניות חלשה):

a. טרנזיטיביות ורציפות אך לא מונוטוניות
b. רציפות ומונוטוניות אך לא טרנזיטיביות
c. מונוטוניות וטרנזיטיביות אך לא רציפות
d. אף לא אחד מהנ"ל.

6. אם הפונקציה u מייצגת את היחס ≥ מה **אינו** בהכרח נכון?

a. $u(x)=u(y)$ גורר ש- $x\sim y$
b. $u(x)\geq u(y)$ גורר ש- $x\geq y$
c. $u(x)>u(y)$ גורר ש- $x>y$
d. אף לא אחד מהנ"ל (כל האמירות נובעות מ"u מייצגת את היחס").

7. אם פונקצית התועלת היא "אורדינלית" אזי

a. בבחירה בין סלים, הפרט מתעלם מכמויות המוצרים
b. בבחירה בין סלים, אין משמעות ל"תועלת נמוכה יותר" לעומת "תועלת גבוהה יותר"
c. בבחירה בין סלים, אין משמעות למשפט "התועלת של x כפולה מזו של y"
d. כל הנ"ל
e. אף לא אחד מהנ"ל.

חמש השאלות הבאות מתייחסות לשירי ויוני. כל אחד מהם בוחר בין סלים במישור המוצרים x_1,x_2, כאשר לשירי יש פונקצית תועלת

$$u(x_1,x_2) = \max(x_1,x_2)$$

וליוני יש פונקצית תועלת

$$u(x_1,x_2) = x_1 + x_2$$

8. האם שירי ויוני מקיימים מונוטוניות?
   a. ההעדפות של שניהם מקיימות מונוטוניות חלשה בלבד
   b. ההעדפות של שניהם מקיימות מונוטוניות חזקה
   c. ההעדפות של שירי מקיימות מונוטוניות חלשה בלבד, ואילו של יוני – גם חזקה
   d. ההעדפות של יוני מקיימות מונוטוניות חלשה בלבד, ואילו של שירי – גם חזקה
   e. אף לא אחד מהנ"ל.

9. האם שירי ויוני מקיימים קמירות?
   a. ההעדפות של שניהם מקיימות קמירות במובן החלש בלבד
   b. ההעדפות של שניהם מקיימות קמירות במובן החזק
   c. ההעדפות של שירי מקיימות קמירות במובן החלש בלבד, ואילו של יוני – גם במובן החזק
   d. ההעדפות של יוני מקיימות קמירות במובן החלש בלבד, ואילו של שירי – גם במובן החזק
   e. אף לא אחד מהנ"ל.

בשלוש השאלות הבאות, נניח גם כי שירי ויוני עומדים בפני אותה מגבלת תקציב, מהצורה הרגילה

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le I$$

10. מה תוכלו לומר על בחירתם האופטימלית במגבלה זו?
    a. סל שהוא אופטימלי לשירי יהיה תמיד גם אופטימלי ליוני
    b. סל שהוא אופטימלי ליוני יהיה תמיד גם אופטימלי לשירי
    c. שני הנ"ל
    d. אף לא אחד מהנ"ל.

11. גמישות הביקוש של מוצר 1 (שכמותו מסומנת ב- x_1) ביחס למחירו (p_1) זהה עבור שירי ועבור יוני

a. נכון, כאשר גמישות זו מוגדרת היטב
b. נכון, אך רק כאשר הגמישות היא 0 או 1-
c. שני הנ"ל
d. אף לא אחד מהנ"ל.

12. כלכלן תהה, בהשוואה בין שירי ליוני, מי יותר קרוב ליחידות פתרון. מה ניתן לומר על צרכנים אלה כשהם עומדים בפני אותה מגבלת תקציב כלעיל?

a. תמיד מספר הפתרונות האופטימליים של יוני הם לפחות כמו מספר הפתרונות האופטימליים של שירי
b. תמיד מספר הפתרונות האופטימליים של שירי הם לפחות כמו מספר הפתרונות האופטימליים של יוני
c. שני הנ"ל נכונים
d. אף לא אחד מהנ"ל.

13. פונקצית תועלת Cobb-Douglas על כמויות שלושה מוצרים, x,y,z, היא

$$u(x,y,z) = x^a y^b z^c$$

עבור a,b,c>0. מה דעתך על הטענה: "גמישות הביקוש ביחס להכנסה של המוצר הראשון (שכמותו היא x) היא יחידתית" ?

a. הטענה נכונה: היא נובעת מהעובדה שהביקוש לינארי בהכנסה
b. הטענה נכונה: היא נובעת מהעובדה שגמישויות ההכנסה של שני המוצרים האחרים הן יחידתיות
c. שני הנ"ל
d. אף לא אחד מהנ"ל.

14. נתבונן בפונקציה

$$u(x_1,x_2) = 2x_1 + 2x_2$$

אם חל שינוי במחירים, אפקט התחלופה יהיה אפס

a. נכון
b. נכון אלא אם כן יחס המחירים חצה את הערך 1
c. נכון אלא אם כן גמישות ההכנסה יחידתית
d. כל הנ"ל
e. אף לא אחד מהנ"ל.

15. ההבדל בין מדד המחירים של לספייר, L, (לפי הכמויות הקודמות) לבין מדד המחירים של פאשה, P, (לפי הכמויות החדשות) הוא

a. שהראשון (L) אינו יכול לעלות על 1 ואילו השני (P) כן
b. שהשני (P) אינו יכול לעלות על 1 ואילו הראשון (L) כן
c. שהראשון (L) תמיד גבוה מ (או שווה ל)שני (P)
d. שהשני (P) תמיד גבוה מ (או שווה ל)ראשון (L)
e. אף לא אחד מהנ"ל.

שתי השאלות הבאות מתייחסות לפרט פונקצית העדפה על פנאי L ושאר המוצרים Y הנתונה על-ידי

$$u(L,Y) = a\cdot L + \log(Y)$$

עבור $a>0$. הכנסתו היא 24 שעות פנאי (ואפס מוצר Y). השכר הראלי הוא w.

16. על היצע העבודה (כפונקציה של השכר הראלי w) ניתן לומר שהוא

a. קשיח לחלוטין (בעל גמישות אפס)
b. גמיש לחלוטין (בעל גמישות אינסופית)
c. אף לא אחד מהנ"ל.

17. אם הפרמטר a גדול יותר,

a. הפרט יצרוך יותר פנאי ופחות Y
b. הפרט יצרוך אותן כמויות של פנאי ושל Y
c. הפרט יצרוך פחות פנאי ויותר Y
d. אף לא אחד מהנ"ל אינו נכון בכל התחום.

18. לרינה יש הכנסה קבועה, y, בשתי התקופות הבאות (ז.א. ש- $y_0=y_1=y$). היא יכולה ללוות כסף בשער רבית של 10%, ולחסוך בשער רבית של 2%. פונקצית התועלת שלה היא

$$U(c_0,c_1) = u(c_0) + \delta u(c_1)$$

עבור u קעורה. ניתן לקבוע כי

a. רינה תעדיף (ממש) ללוות כסף אם ורק אם $\delta<(1/1.1)$
b. רינה תעדיף (ממש) ללוות כסף אם ורק אם $(1/1.1)<\delta<(1/1.02)$
c. רינה תעדיף (ממש) ללוות כסף אם ורק אם $\delta>(1/1.02)$
d. אף לא אחד מהנ"ל.

19. הגרלת לוטו מציעה פרס של מיליון ₪ בהסתברות של 1:500,000. מה דעתך על הטענה: "פרט שונא סיכון הממקסם תוחלת תועלת (ומעדיף יותר כסף על פחות) לא יקנה את כרטיס ההגרלה" ?

a. הטענה נכונה, מכיון שפרט שונא סיכון אף פעם אינו קונה כרטיסי הגרלה
b. הטענה אינה נכונה: ייתכן שהפרט יקנה כרטיס הגרלה, אך רק בתנאים שבהם מפעל הפיס יהיה בהפסדים
c. הטענה אינה נכונה: הפרט יקנה כרטיס הגרלה אחד לפחות כל עוד הוא מקיים מונוטוניות ביחס לכסף
d. אף לא אחד מהנ"ל.

20. פירמה מייצרת y עם תשומות x_1,x_2 ופונקצית הייצור $y=x_1^{1/2}\cdot x_2^{1/2}$. הפירמה, השואפת למקסם רווחים, תרכוש כמויות זהות של שני גורמי הייצור

a. נכון

b. נכון רק אם מחיריהם זהים

c. לא נכון: הפתרון האופטימלי יהיה פינתי

d. אף לא אחד מהנ"ל.

פתרון בחינה לדוגמה 3

1. היחס שלם מכיון שאנחנו יכולים לבחור את z להיות אחד מ- {x,y}. למשל, אם אנחנו רוצים להראות ש-x מתייחס ל-y או להפך, נבדוק מה קורה ביחס ההעדפה של יוני (למשל). נניח שיוני מעדיף את x לפחות כמו את y. אזי, אם נבחר z=x, הרי ששירי מעדיפה את x לפחות כמו את z=x (מכיון שהיחס שלה שלם ולכן רפלקסיבי), ומכיון שיוני מעדיף את z לפחות כמו את y, אזי שלפי ההגדרה של היחס ≥, x≥y. אם, לעומת זאת, אין זה נכון שיוני מעדיף את x לפחות כמו את y, אזי שיוני מעדיף את y לפחות כמו את x (כי היחס שלו שלם). במצב זה נבחר z=y, ואז, שוב בגלל השלמות של היחס של שירי, y היא מעדיפה את y לפחות כמו את z ויוני מעדיף את z לפחות כמו את x, ואז הראינו ש - y≥x.
2. מכיון של יחס שלם הוא רפלקסיבי, אין צורך להוכיח מחדש: התשובה היא (a) גם כאן.
3. זה קצת מסובך יותר. אם תנסו לחשוב על הלוגיקה, תראו שלא ברור בכלל מאין תצמח כאן טרנזיטיביות. זו, כמובן לא הוכחה שהיחס אינו טרנזיטיבי, למרות שמי שיש לו אינטואיציה טובה יכול לתת כאן תשובה נכונה בלי להיות מסוגל להוכיחה. ככה זה מבחנים אמריקאים. מכל מקום, הנה דוגמה: נניח שיש חמש אלטרנטיבות, a,b,c,d,e. נניח שההעדפה של שירי היא c>d>e>a>b ושל יוני: d>e>a>b>c. לפיכך, היחס החדש ≥ יקיים a≥c (באמצעות האלטרנטיבה b) וגם c≥e (באמצעות d). טרנזיטיביות היתה גוררת שיתקיים גם a≥e. אך קל לראות שיחס זה לא יתקיים: בעיני שירי a טובה רק כמו עצמה ו-b, ואילו בעיני יוני a ו- b ממש פחות טובות מאשר e. (ולכן התשובה היא (b).)
4. אם שני היחסים זהים, היחס החדש ≥ מזדהה איתם אף הוא. כדי להשתכנע בזאת, שימו לב, ראשית, שאם שירי ויוני מעדיפים את x לפחות כמו את y, אזי מתקיים גם x≥y (למשל, ע"י בחירת z=x). מאידך גיסא, אם x≥y אזי, לפי ההגדרה, קיים z כך ששירי מעדיפה את x לפחות כמו את z ויוני מעדיף את z לפחות כמו את y. מכיון ששירי ויוני בעלי אותו יחס העדפה, אז לא רק שירי, אלא גם יוני מעדיף את x לפחות כמו את y. ידוע שהוא מעדיף את y לפחות כמו את z, ושהוא עצמו בעל יחס העדפה טרנזיטיבי. לכן יוני עצמו מעדיף את x לפחות כמו את y. זאת אומרת, שאם לפי היחס החדש x≥y, אזי גם יוני – ולכן גם שירי – מעדיפים את x לפחות כמו את y. בקיצור, היחס החדש זהה ליחס ההעדפה של שירי ושל

יוני. ומכאן שפונקצית תועלת שמתארת את היחס של שירי או (ולכן "וגם") של יוני תתאר גם את היחס החדש, והתשובה הנכונה היא (c).

5. טרנזיטיביות (ושלמות, למרות שלא נשאלנו לגביה) נובעת מייצוג ע"י פונקציה מספרית. רציפות נובעת מכך שהפונקציה שעל-ידיה מוגדר היחס היא רציפה. (כל מה שניתן לייצר ע"י פעולות החשבון הבסיסיות, כולל העלאה בחזקה, מגדיר פונקציה רציפה בתחום הגדרתה. הווה אומר: צריך לחפש צרות כמו בפונקציה $1/x$ ליד $x=0$, אך צרות הרציפות אז תהיינה קשורות לבעיות בהגדרת הפונקציה.) לעומת זאת, הפונקציה אינה מונוטונית: מכיון ש - $(x_2-3)^2$ חיובית עבור $x_2<>3$, זוהי פונקציה יורדת ב- x_1 (לרוב ערכי x_2). ואם לא די בכך, כאשר $x_1>0$, הביטוי $(-x_1)^3$ שלילי, ואז הפונקציה יורדת ב- x_2 עבור $x_2>3$. לכן התשובה היא (a).

6. התשובה היא (d): כל האמירות נכונות. אנו לרוב משתמשים בהגדרה (b), אך ציינו ואף הוכחנו שהיא שקולה להגדרה (c) (מכיון שמדובר ביחס שלם). כמו-כן, קל לראות ש- (b) (ולכן (c)) גורר את (a), למרות שההיפך אינו נכון.

7. התשובה היא (c). תשובה (a) אינה נכונה מכיון שהאורדינליות מתייחסת לציר התועלת, לא לצירי המוצרים: אין הכוונה שהפרט אדיש בין כל כמויות המוצרים. נהפוך הוא: האלטרנטיבות שהפרט בוחר ביניהן הן "סלים", המוגדרים ע"י כמויות מוצרים. אורדינליות אומרת רק שאין לייחס חשיבות לגובה המספרי של פונקציית התועלת של סל מסוים, אלא רק להשוואה בין גבהים אלה לסלים שונים. לכן גם (b) אינה נכונה: "תועלת גבוהה יותר" של סל אחד ממשנהו היא אמירה בעלת משמעות אמפירית, ותישמר בכל טרנספורמציה מונוטונית. לעומת זאת, (c) היא התשובה הנכונה, מכיון שטרנספורמציה מונוטונית לא בהכרח תשמר את היחס בין $u(x)$ ל- $u(y)$.

8. נתבונן בהעדפות של שירי. הן מקיימות מונוטוניות חלשה, כי (1) מתקיימת מונוטוניות בסיסית: הפונקציה לא תרד אם כל אחד מהמשתנים לא ירד1 ן-(2) אם נגדיל את כמויות שני המוצרים תגדל הכמות של המוצר שמשיג את המקסימום, ובהכרח יגדל גם המקסימום (אפילו אם המוצר השני ישיג בתחרות ויהפוך למקסימום החדש). לעומת זאת, מונוטוניות חזקה אינה מתקיימת, מכיון שאם נגדיל את כמות המוצר שאיננה המקסימלית, הרי שבטווח מסוים (עד שנגיע לכמות של השני), התועלת תישאר קבועה. יוני, לעומת זאת, בחור פשוט יותר ומקיים גם מונוטוניות חזקה: הסכום יגדל ממש כל אימת שאחד המשתנים גדל ממש. לכן התשובה היא (c).

9. ההעדפות של יוני מקיימות קמירות, אם גם חלשה בלבד: עקומות האדישות שלו הן קווים ישרים, ולכן קבוצות ה"עדיף לפחות כמו-" עבורו הן קמורות במובן החלש אך לא החזק. לעומתו, שירי לא מקיימת קמירות כלל (ר' שאלה 7, על הכלבה סופי, בבחינה הקודמת). התשובה, אם כך, היא (e).
10. אם המחירים שונים, לא נוכל להבחין בין שירי ליוני: כאשר $p_1>p_2$ שניהם יעדיפו לצרוך רק x_2 (היינו, יבחרו בסל $(0,I/p_2)$) ולהיפך – כאשר $p_1<p_2$ שניהם יצרכו רק x_1 (יבחרו בסל $(I/p_1,0)$). לעומת זאת, כאשר המחירים שווים, $p_1=p_2$, שירי עדיין תדבוק באחת מנקודות הקיצון ואילו יוני יוכל לבחור גם נקודות אלו **וגם כל נקודה על הקטע המחבר אותן**. לכן התשובה היא (a).
11. כלעיל, כאשר יחס המחירים הוא 1 שום דבר לא בדיוק מוגדר כאן: לשני הפרטים אין בחירה יחידה (לשירי יש שני פתרונות אופטימליים, וליוני – אינסוף), כך שאין לנו **פונקצית** ביקוש. ממילא אין בדיוק מה לגזור בשביל לחשב גמישויות. חמור מכך: אין דרך לבחור פתרון מבין האופטימליים באופן שתתקבל פונקציה רציפה של המחיר. אז בנקודה זו נזנח את נושא הגמישות. נותרנו על טווחי מחיר שבהם נצרך רק מוצר 1 אן רק מוצר 2. במקרה הראשון גמישות הביקוש היא 1-, ובשני – אפס. רוצה לומר: (a) ו- (b) בעצם שקולים, כי גם לגבי שירי וגם לגבי יוני גמישות הביקוש מוגדרת היטב בדיוק כשאר היא או 0 או 1-. נותר רק לראות שמדובר בדיוק באותם טווחי מחיר (של מוצר 1 ביחס למחירו של 2) ולהגיע למסקנה שהתשובה היא (c).
12. לפי התשובה לשאלה 10 לעיל, התשובה כאן היא (a): ברוב טווחי המחירים יש לשניהם פתרון אופטימלי אחד בלבד. כאשר המחירים של שני המוצרים זהים, יש לשירי שני פרונות וליוני – אינסוף. לכן (a) התשובה הנכונה.
13. התשובה היא (c). בפונקציה זו, גם אם יש מספר משתנים גדול מ-2, נקבל פתרון אופטימלי שבו סך ההוצאה על כל מוצר הוא חלק קבוע מהתקציב, למשל, $p_x x=[a/(a+b+c)]\cdot I$ ולכן הכמות המבוקשת מ- x היא פונקציה לינארית של ההכנסה. עובדה הגוררת שגמישות הביקוש ביחס להכנסה היא 1. מכאן ש- (a) נכונה. אך כך גם (b): אילו ידענו מסיבות שונות ומשונות שגמישות הביקוש ביחס להכנסה של כל המוצרים האחרים הן יחידתיות, היינו יכולים להסיק שכך גם גמישות הביקוש של המוצר הנדון (ביחס להכנסה), מכיון שממוצע משוקלל של כל גמישויות הביקוש ביחס להכנסה הוא 1. ולכן התשובה היא (c).
14. חזרנו לפונקצית הסכום, שבה הפתרון האופטימלי יימצא לרוב באחת מנקודות הקיצון, אלא אם כן אנחנו ביחס מחירים השווה ליחס התועלות השוליות, הלוא הוא 1 במקרה דנן. כל עוד

יחס המחירים הוא מצידו האחד של ערך קריטי זה (1), שינוי יחס המחירים משאיר אותנו באותה נקודת קיצון, ואפקט התחלופה הוא אפס. (שימו לב שבמצב זה גם אין אפקט הכנסה, מכיון שמגבלת התקציב נעה סביב "ציר" שהוא בדיוק הנקודה האופטימלית.) כאשר יחס המחירים חוצה את הערך 1, הפתרון האופטימלי "קופץ" לפינה השניה, ואפקט התחלופה מורגש, ובגדול.

15. ההבדל בין שני המדדים הוא בהגדרתם – לפי הסל הקודם או החדש. מהגדרה זו נובעת העובדה שלא ייתכן ש- $L\leq1$ וגם $P\geq1$. אך זה בערך הכל. כל אחד מהם יכול להיות קטן או גדול מ-1, וכל אחד מהם יכול להיות גדול ממשנהו. התשובה היא, אפוא, (e).

16. הפתרון האופטימלי יינתן ע"י השוואת יחס המחירים ליחס התועלות השוליות, ואנו מקבלים את המשוואה $1/y=a/w$ או $y=w/a$. כשנציב במגבלת התקציב, $wL+y=24w$, נקבל $wL+w/a=24w$ או $L=24-(1/a)$. מסתבר, אפוא, שכמות הפנאי הנצרכת אינו תלויה במחירו w, ולכן היצע העבודה אינו תלוי בשכר. לכן התשובה היא (a).

17. מהחישובים לעיל נובע כי בפתרון האופטימלי $y=w/a$ הוא פונקציה יורדת של a, ואילו $L=24-(1/a)$ הוא פונקציה עולה של a, כמו בתשובה (a) – וזה נכון בכל תחום ההגדרה (כל עוד a חיובי).

18. נתחיל בנקודה $(c_0,c_1)=(y,y)$. נשים לב, ראשית כל, ששיפוע עקומת האדישות (העוברת בנקודה זו) באותה נקודה הוא $1:\delta$ – יחס הנגזרות החלקיות הוא $[u'(y)/\delta u'(c)]=1/\delta$. יחס זה יושווה לשיפוע של הקו המגדיר את קבוצת התקציב. רוצה הגורל (או הבנק), ובדיוק בנקודה הנדונה קו התקציב משנה שיפוע: כשרינה תרצה להגדיל את התצרוכת כעת, c_0, על חשבון תצרוכת עתידית, c_1, היא יכולה להגדיל את c_0 בשקל אם תלווה מהבנק ברבית של 10%, ואז תצטרך להקטין את c_1 ב- 1.10 שקלים. היא תרצה לעשות זאת רק אם $(\delta/1.1)<1$ או $\delta<1.1$. לעומת זאת, אם היא תרצה להגדיל את התצרוכת העתידית, c_1, על חשבון תצרוכת נוכחית, היינו לחסוך, היא תקבל בתקופה 1 רק 1.02 שקלים על כל שקל שהיא חוסכת בהווה. ישתלם לה לחסוך רק אם $\delta<1.02$. (ובטווח $(1/1.02)<\delta<(1/1.1)$ רינה לא תחסוך ולא תלווה.) לכן התשובה היא (a).

19. שנאת סיכון אינה אומרת שהפרט לעולם לא יקח סיכון, או שתמיד יעדיף כל סכום בטוח שהוא על פני כל הגרלה שהיא. שנאת סיכון מוגדרת רק ביחס להגרלות שתוחלתן אפס – הווה אומר, האם הפרט מעדיף את ההגרלה או את תוחלתה בוודאות (כשההפרש הוא משתנה מקרי בעל תוחלת אפס). לכן (a) אינה תשובה נכונה. התשובה (b) נכונה: פרט שונא סיכון יסכים לקנות הגרלה רק אם תוחלתה מספיק גבוהה כדי לפצותו על הסיכון הנוסף

שנכנס לחייו. (זה נכון גם לגבי העדפות שאינן בהכרח ממקסמות תוחלת תועלת, אך משהו נוסף צריך להניח כאן מעבר להגדרת של שנאת סיכון. מכל מקום, זה בודאי נכון לפרט הממקסם מוחלת תועלת כל עוד התועלת עולה בכמות הכסף.) -- אולם אנחנו יודעים שבתנאים אלה (שבהם תוחלת הרווח חיובית), מפעל הפיס יהיה בהפסדים (בהסתברות גבוהה מאוד, כפי שנובע מחוק המספרים הגדולים). תשובה (c) אינה נכונה. במובן מסוים, ההיפך הוא הנכון: השתכנענו, שאם משתנה מסוים (כגון מניה של חברה מבטיחה) הוא בעל תוחלת רווח חיובית, אפילו פרט שונא סיכון ירצה לרכוש כמות קטנה ממנו. אך אין זה נכון כשמדובר במשתנה שתוחלתו שלילית.

20. ושוב לפנינו פונקצית ייצור Cobb-Douglas, מטיפוס $y=(x_1)^\alpha(x_2)^\beta$ והפתרון האופטימלי עבורה (אם הוא פנימי) יקיים $(x_2/x_1)=(\beta/\alpha)(p_1/p_2)$ ובמקרה זה, מכיון ש $\alpha=\beta=1/2$ נקבל: $(x_2/x_1)=(p_1/p_2)$. מכאן שכמויות שוות אכן תאפיינה את הפתרון רק אם המחירים זהים. פתרון פינתי הוא לא רעיון דגול כאן, כי אם אחד מבין המשתנים x_1,x_2 הוא אפס, כך יהיה גם y ולא תהיינה הכנסות כלל (בשעה שיש הוצאות, למי שעוקב אחר המאזן). לכן (c) אינה נכונה והתשובה היא (b).