




ניסויים פקטוריאליים

עם גורמים ב-2 רמות

ניסויים מסוג 2^k ו- 2^{k-p}



~~ניסוי פקטוריאלי חוקר מספר רב של גורמים בו~~

זמנית.

שונה בתכלית מן העצה המקובלת לערוך ניסויים שמבודדים גורם אחד בלבד תוך הקפדה לשמור את כל שאר הגורמים ברמות קבועות.

יתרונות של ניסויים פקטוריאליים.

- מערך ניסוי מתוכנן, בהשוואה לשיטה של גישוש וחיפוש.
- יכולת לחקור פרמטרים רבים במעט בדיקות ניסוייות.
- מידע על כל פרמטר כאילו רק הוא השתנה בניסוי.
- יכולת לבחון את עקביות השפעות הפרמטרים.
- ניתוח פשוט ומסקנות ברורות.

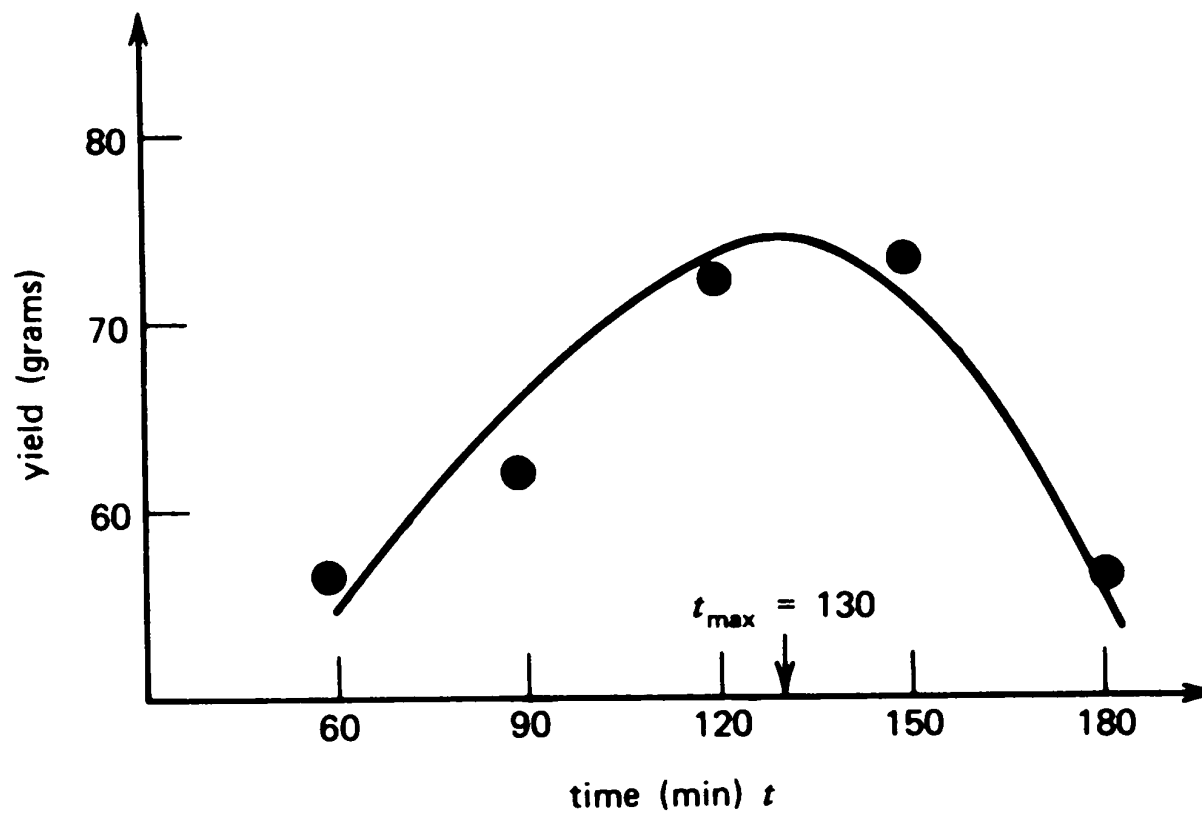


מה רע ב- *one-factor-at-a-time*?

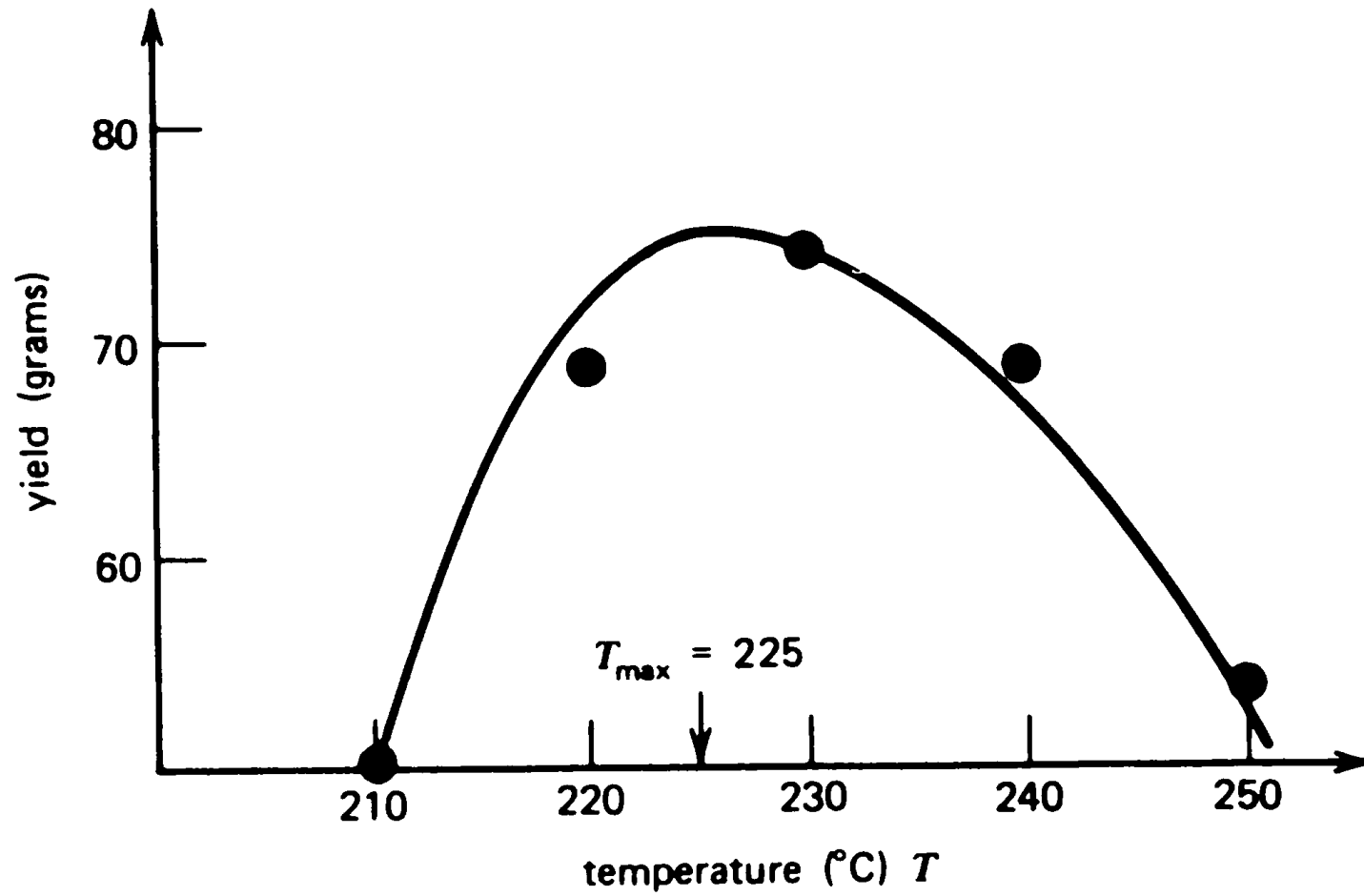
להלן תרחיש מאוד סביר לסדרה של ניסויים המתמקדים, כל אחד, בגורם בודד.

מטרת הניסויים להגיע לניצולת מקסימלית של תהליך כימי. הגורמים הם זמן הפעלת התהליך וטמפרטורת הריאקטור.

ניסוי 1: חקירת הזמן, בטמפרטורה של 225 מעלות.



ניסוי 2: חקירת הטמפרטורה, בזמן הנבחר של 130 דקות.





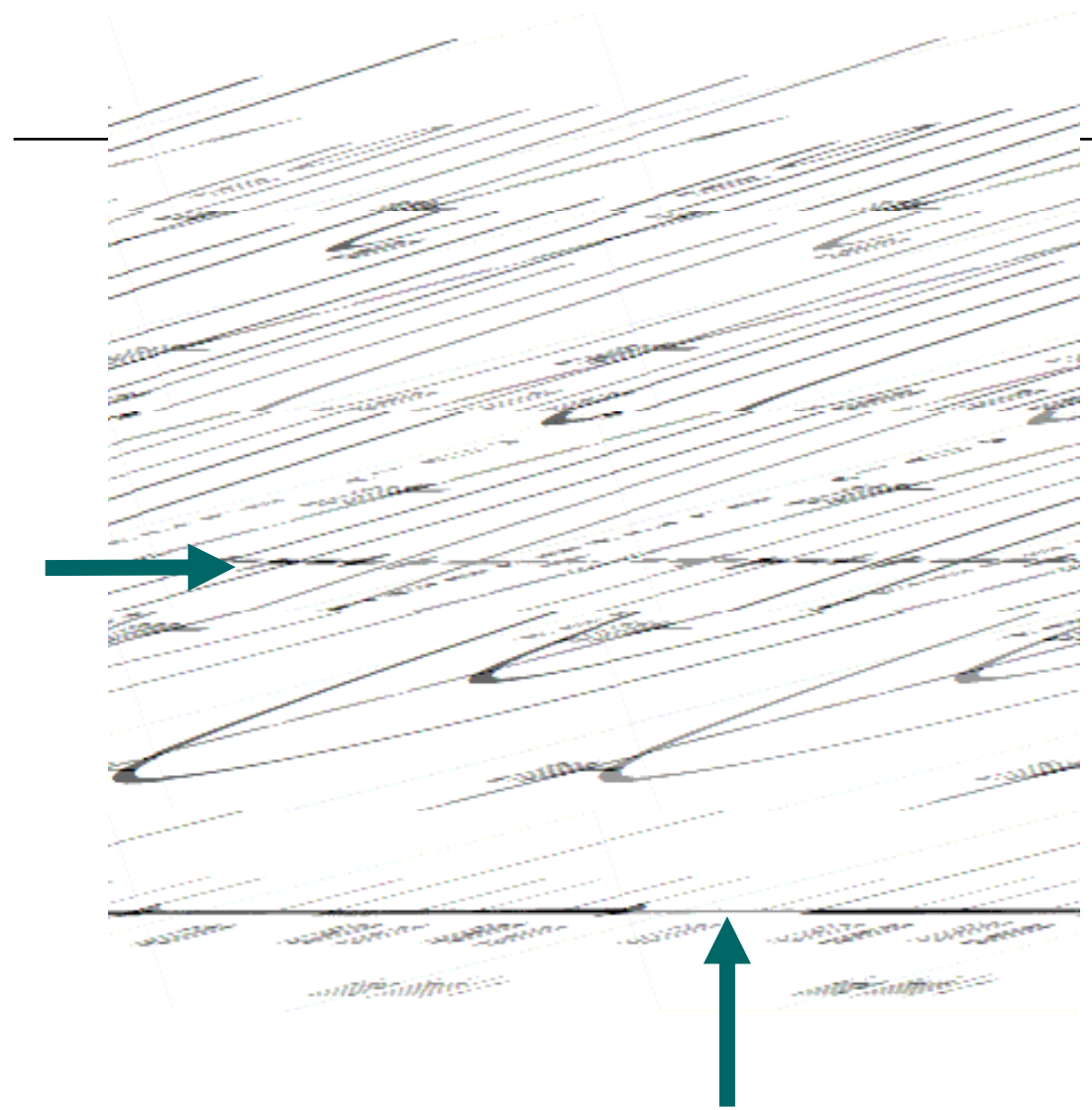
המסקנות:

התנאים המומלצים הם:

• זמן של 130 דקות ו

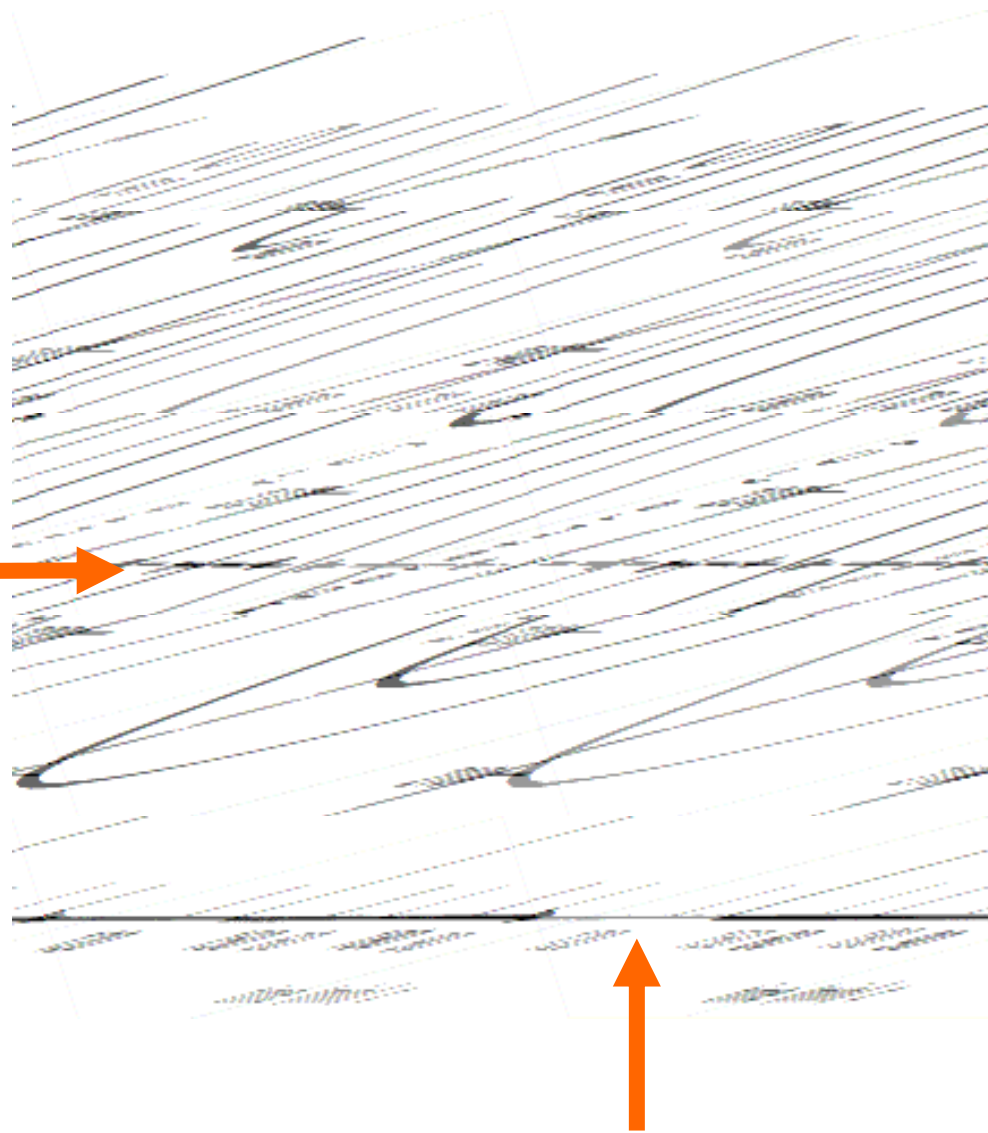
• טמפרטורה של 225 מעלות.

הניצולת הצפויה בסביבות 75 גרם.



התמונה
האמיתית:

מה נלמד
מניסוי
פקטוריאלי??



טופס לארגון ניסוי פקטוריאלי

	שם הניסוי
	מטרה
	משתנה תגובה
	גורמים
	רמות הגורמים
	צדופים
	גודל המדגם
	לוגיסטיקה
	הערות



תכנון של ניסוי 2^k

- הניסוי כולל k גורמים.
- לכל גורם 2 רמות.
- בודקים כל אחד מ- 2^k הצירופים האפשריים.
- ניתן לחזור על כל צירוף מספר פעמים.

תבנית לניסוי מסוג 2^2

B	A		צירוף
--	--	(1)	1
--	+	a	2
+	--	b	3
+	+	ab	4

תבנית לניסוי מסוג 2^3

C	B	A		צירוף
--	--	--	(1)	1
--	--	+	a	2
--	+	--	b	3
--	+	+	ab	4
+	--	--	c	5
+	--	+	ac	6
+	+	--	bc	7
+	+	+	abc	8

דוגמה: פיתוח פולימר חדש

שם הניסוי	פיתוח פולימר
מטרה	לפתח מוצר חדש בעל יציבות של 50
משתנה תגובה	יציבות
גורמים	2 חומרים
רמות הגורמים	B : 9-13 C : 0-0.05
צרופים	$2 * (2^2) = 8$
גודל המדגם	שני פולימרים בכל צירוף
לוגיסטיקה	
הערות	

תוצאות הניסוי

Run		B	C	Result
1		9	0	122
2		9	0	81
1		13	0	102
2		13	0	93
1		9	.05	113
2		9	.05	92
1		13	.05	104
2		13	.05	99

Run	B	C	Result	Y-YBB	Yhat(bc)		Ybar(bc)		
1	9	0	122	451.56	100.75	0.5625	101.5	420.25	
2	9	0	81	390.06	100.75	0.5625	101.5	420.25	
1	13	0	102	1.56	98.25	0.5625	97.5	20.25	
2	13	0	93	60.06	98.25	0.5625	97.5	20.25	
1	9	0.05	113	150.06	103.25	0.5625	102.5	110.25	
2	9	0.05	92	76.56	103.25	0.5625	102.5	110.25	
1	13	0.05	104	10.56	100.75	0.5625	101.5	6.25	
2	13	0.05	99	3.06	100.75	0.5625	101.5	6.25	

100.75	1143.50	4.50	1114.00
10150.6	SSTO	SSInt	SSE

**Squared deviations
From Mean
(SDfM)**

		81204.5						
B-	102	-2.5			1.25			
B+	99.5				-1.25			
							1.563	
							3.125	
							12.5	SSTR-E
C-	99.5	2.5			-1.25			
C+	102				1.25			
							1.563	
							3.125	
							12.5	SSTR-E

Two SDfM
4*Two SDfM

Two SDfM
4*Two SDfM

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Result

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Model	81234.000 ^a	4	20308.500	72.921	.001
B	12.500	1	12.500	.045	.843
C	12.500	1	12.500	.045	.843
B * C	4.500	1	4.500	.016	.905
Error	1114.000	4	278.500		
Total	82348.000	8			

a. R Squared = .986 (Adjusted R Squared = .973)

תבנית לניסוי מסוג 2^3

C	B	A		צירוף
--	--	--	(1)	1
--	--	+	a	2
--	+	--	b	3
--	+	+	ab	4
+	--	--	c	5
+	--	+	ac	6
+	+	--	bc	7
+	+	+	abc	8

דוגמה: פיתוח פולימר חדש

שם הניסוי	פיתוח פולימר
מטרה	לפתח מוצר חדש בעל יציבות של 50
משתנה תגובה	יציבות
גורמים	3 חומרים
רמות הגורמים	A : 50-80 B : 9-13 C : 0-0.05
צרופים	8 (2^3)
גודל המדגם	פולימר אחד בכל צירוף
לוגיסטיקה	
הערות	


תוצאות הניסוי

Run	A	B	C	Result
1	50	9	0	122
2	80	9	0	81
3	50	13	0	102
4	80	13	0	93
5	50	9	.05	113
6	80	9	.05	92
7	50	13	.05	104
8	80	13	.05	99



האם השינוי של חומר A מ-50 ל-80 השפיע
על היציבות?

50 = A	80 = A	
122	81	
102	93	
113	92	
104	99	
110.3	91.3	ממוצע



בממוצע, שינוי מ- $A = 50$ ל- $A = 80$ הוריד את
היציבות ב- 19 יחידות.

הפרש זה נקרא ההשפעה העיקרית (או הראשית) של
חומר A .

$$A = \bar{Y}(A+) - \bar{Y}(A-) = 91.3 - 110.3 = -19$$

באופן דומה, ניתן לחשב את ההשפעות
העיקריות של חומרים B ו-C.

9 = B	13 = B	
122	102	
81	93	
113	104	
92	99	
102	99.5	ממוצע

$$B = \bar{Y}(B+) - \bar{Y}(B-) = 99.5 - 102 = -2.5$$



	$0 = C$	$0.05 = C$	
	122	113	
	81	92	
	102	104	
	93	99	
	99.5	102	ממוצע

$$C = \bar{Y}(C+) - \bar{Y}(C-) = 102 - 99.5 = 2.5$$



הערה חשובה!

הניסוי כולל 3 גורמים, אבל בדקנו את ההשפעה העיקרית של כל גורם כאילו הוא היה היחיד בניסוי.

איך ניתן להתעלם מן הגורמים האחרים??

בכל רמה של A, למשל, מופיעים בדיוק אותם צירופים של B ושל C, על פי בניית תוכנית הניסוי. לכן, אפילו אם B ו-C משפיעים על התוצאות, השפעותיהם מתקזזים ומאפשרים השוואה של שתי הרמות של A.

Descriptive Statistics

Dependent Variable: Result

A	B	C	Mean	Std. Deviation	N	
50.00	9.00	.00	122.0000	.	1	
		.05	113.0000	.	1	
		Total	117.5000	6.36396	2	
	13.00	9.00	.00	102.0000	.	1
			.05	104.0000	.	1
			Total	103.0000	1.41421	2
	Total	9.00	.00	112.0000	14.14214	2
			.05	108.5000	6.36396	2
		Total		110.2500	9.17878	4
	80.00	9.00	.00	81.0000	.	1
			.05	92.0000	.	1
Total			86.5000	7.77817	2	
13.00		9.00	.00	93.0000	.	1
			.05	99.0000	.	1
			Total	96.0000	4.24264	2
Total		9.00	.00	87.0000	8.48528	2
			.05	95.5000	4.94975	2
		Total		91.2500	7.50000	4
Total		9.00	.00	101.5000	28.99138	2
			.05	102.5000	14.84924	2
	Total		102.0000	18.81489	4	
	13.00	9.00	.00	97.5000	6.36396	2
			.05	101.5000	3.53553	2
			Total	99.5000	4.79583	4
	Total	9.00	.00	99.5000	17.29162	4
			.05	102.0000	8.83176	4
			Total	100.7500	12.78112	8



Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Result

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Model	81951.500 ^a	4	20487.875	206.687	.000	.995
A	722.000	1	722.000	7.284	.054	.646
B	12.500	1	12.500	.126	.740	.031
C	12.500	1	12.500	.126	.740	.031
Error	396.500	4	99.125			
Total	82348.000	8				

a. R Squared = .995 (Adjusted R Squared = .990)

Run	A	B	C	Result				
1	50	9	0	122	14884			
2	80	9	0	81	6561			
3	50	13	0	102	10404			
4	80	13	0	93	8649			
5	50	9	0.05	113	12769			
6	80	9	0.05	92	8464			
7	50	13	0.05	104	10816			
8	80	13	0.05	99	9801			
					82348			Squared Deviations From Mean (SDfM)
Effect				Deviations From Mean				
A+	91							
A-	110	-19		-9.5		Two SDfM	180.5	
						4*Two SDfM	722	
B+	100			-1.25			1.5625	
B-	102	-2.5				Two SDfM	3.125	
						4*Two SDfM	12.5	
C+	102			1.25			1.5625	
C-	100	2.5				Two SDfM	3.125	
						4*Two SDfM	12.5	



- **Tests of Between-Subjects Effects**

- Dependent Variable: Result

Source	SS	df	Mean Square	F
A	722.0	1	722.0	.
B	12.5	1	12.5	.
C	12.5	1	12.5	.
A * B	288.0	1	288.0	.
A * C	72.0	1	72.0	.
B * C	4.5	1	4.5	.
A * B * C	32.0	1	32.0	.
Error	.000	0		
Total	82348.0	8		
Corrected Total	1143.5	7		

Run	A	B	C	Result
1	50	9	0	122
2	80	9	0	81
3	50	13	0	102
4	80	13	0	93
5	50	9	0.05	113
6	80	9	0.05	92
7	50	13	0.05	104
8	80	13	0.05	99

Effect		Deviations From Mean	Squared Deviations From Mean (SDfM)
A+	91		
A-	110	-19	90.25
			Two SDfM 180.5
			4*Two SDfM 722
B+	100		1.5625
B-	102	-2.5	3.125
			4*Two SDfM 12.5
C+	102		1.5625
C-	100	2.5	3.125
			4*Two SDfM 12.5



האם ההשפעה של חומר A עקבית?


נבדוק האם ההשפעה של A תלויה ברמה של B.

כאשר $B = 13$,

$$A(B = 13) = \bar{Y}(A+) - \bar{Y}(A-) = 96 - 103 = -7$$

כאשר $B = 9$,

$$A(B = 9) = \bar{Y}(A+) - \bar{Y}(A-) = 86.5 - 117.5 = -31$$



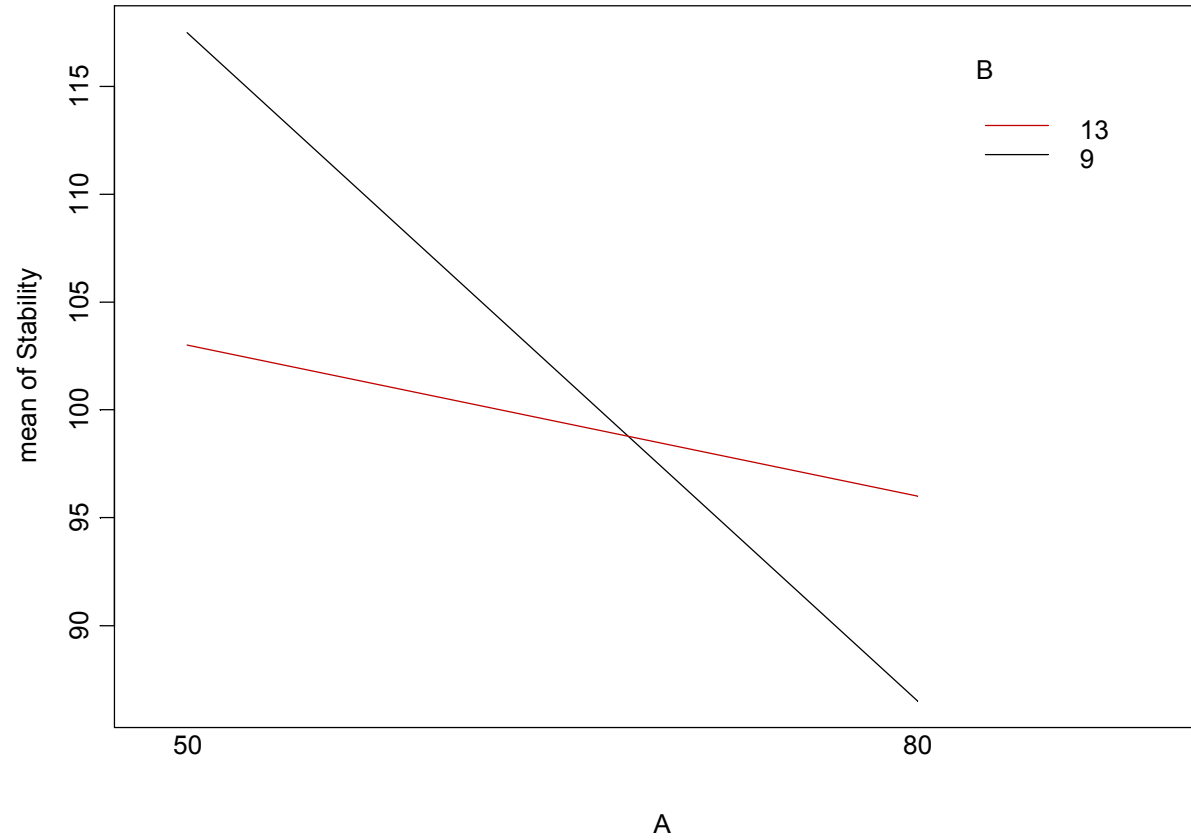
ההשפעות שונות מאוד. במקרה זה, נאמר שיש

אינטראקציה בין הגורמים A ו-B.

נכמת את האינטראקציה על ידי חצי ההפרש בין
שתי ההשפעות:

$$AB = [(-7) - (-31)] / 2 = 12$$

ניתן גם להציג את האינטראקציה בצורה גרפית:





באופן דומה ניתן להגדיר אינטראקציות

נוספות בניסוי מסוג 2^3 :

$$AB = [A(B+) - A(B-)] / 2$$

$$AC = [A(C+) - A(C-)] / 2$$

$$BC = [B(C+) - B(C-)] / 2$$

$$ABC = [AB(C+) - AB(C-)] / 2$$



סיכום התוצאות מן הניסוי לפיתוח פולימר חדש:

$$100.8 = \text{ממוצע}$$

אינטראקציות

$$AB = 12.0$$

$$AC = 6.0$$

$$BC = 1.8$$

$$ABC = -4.0$$

השפעות עיקריות

$$A = -19.0$$

$$B = -2.5$$

$$C = 2.5$$



מסקנות

1. הגברת הכמות של A מקרבת את היציבות לרמה הדרושה.
2. ההשפעה של A מוגברת באופן משמעותי כאשר $B = 9$.
שם שינוי של A מ-50 ל-80 הוביל לירידת היציבות ביותר מ-30, בממוצע.
3. לחומר C השפעה קטנה על היציבות.
4. מומלץ להקצין את A, תוך שמירת B ב-9.

ניסוי המשך

A	C	Y
94	0	44.7
100	0	לא עבד
94	.05	52.8
100	.05	29.1

בניסוי זה B נקבע ל- 9.


חישוב השפעות בניסוי 2^3

A	B	AB
-	-	+
+	-	-
-	+	-
+	+	+
-	-	+
+	-	-
-	+	-
+	+	+

בטבלה רמות הגורמים מסומנות על ידי + (לרמה הגבוהה) או - (לרמה הנמוכה).

הטור של AB בטבלה נוצר מהכפלת הסימנים של טורים A ו-B.

$$AB = \bar{Y}(AB+) - \bar{Y}(AB-)$$



כל האינטראקציות ניתנות לחישוב על ידי הפרש של הממוצע של חצי מן התצפיות פחות הממוצע של החצי השני של התצפיות.

התצפיות המשתתפות בכל ממוצע מתקבלות מהכפלת הסימנים של כל הגורמים המשתתפים באינטראקציה.

A	B	C	AB	AC	BC	ABC
-	-	-	+	+	+	-
+	-	-	-	-	+	+
-	+	-	-	+	-	+
+	+	-	+	-	-	-
-	-	+	+	-	-	+
+	-	+	-	+	-	-
-	+	+	-	-	+	-
+	+	+	+	+	+	+



ניתוח הניסוי המקורי ב- R

```
attach(Polymer)
interaction.plot(A,B,Stability,lty=c(1,1),col=c(1,8))
A1 <- (A-65)/15
B1 <- (B-11)/2
C1 <- (C-0.025)/0.025
fit.1 <- lm(Stability ~ A1*B1*C1)
summary(fit.1)
```


הפלט:

Coefficients:

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	100.75	NA	NA	NA
A1	-9.50	NA	NA	NA
B1	-1.25	NA	NA	NA
C1	1.25	NA	NA	NA
A1:B1	6.00	NA	NA	NA
A1:C1	3.00	NA	NA	NA
B1:C1	0.75	NA	NA	NA
A1:B1:C1	-2.00	NA	NA	NA

Residual standard error: NA on 0 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 1

דוגמה: השפעה של 3 גורמים על ניצולת בתהליך כימי

שם הניסוי	ניצולת בפיילוט פלנט
מטרה	שיפור הניצולת
משתנה תגובה	ניצולת
גורמים	טמפ', ריכוז, זרז
רמות הגורמים	T: 160,180 Co: 20,40, Ca: A,B
צרופים	8 (2^3)
גודל המדגם	2 הפעלות בכל צירוף
לוגיסטיקה	ביצוע בסדר אקראי
הערות	

תוצאות הניסוי

	T	Co	Ca	Results
1	160	20	A	59, 61
2	180	20	A	74, 70
3	160	40	A	50, 58
4	180	40	A	69, 67
5	160	20	B	50, 54
6	180	20	B	81, 85
7	160	40	B	46, 44
8	180	40	B	79, 81



ניתוח הניסוי המקורי ב- R

```
attach(Pilot.Plant)
Te <- (Temp-170)/10
Co <- (Conc-30)/10
Ca <- 1*(Cat=="B")-1*(Cat=="A")

fit.1 <- lm(Yield ~ Te*Co*Ca)

summary(fit.1)
```

הפלט:

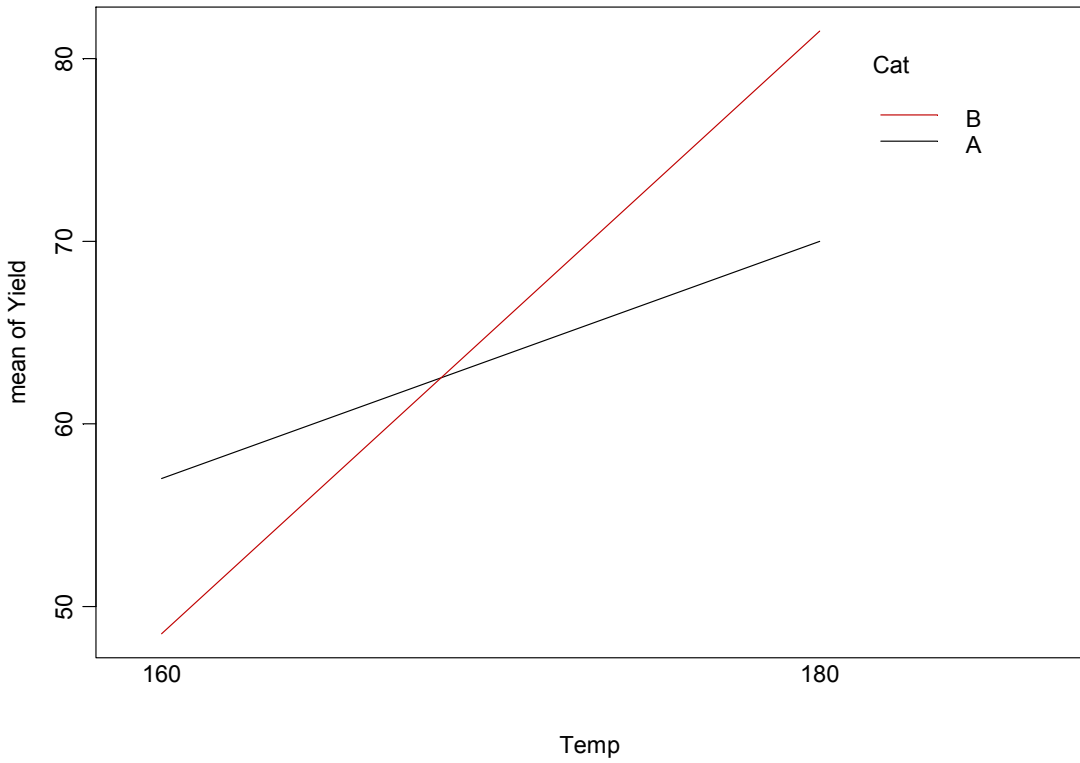
Coefficients:

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	64.2500	0.7071	90.8632	0.0000
Te	11.5000	0.7071	16.2635	0.0000
Co	-2.5000	0.7071	-3.5355	0.0077
Ca	0.7500	0.7071	1.0607	0.3198
Te:Co	0.7500	0.7071	1.0607	0.3198
Te:Ca	5.0000	0.7071	7.0711	0.0001
Co:Ca	0.0000	0.7071	0.0000	1.0000
Te:Co:Ca	0.2500	0.7071	0.3536	0.7328

Residual standard error: 2.828 on 8 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.9763

מבט גרפי על האינטראקציה בין טמפרטורה והזרז



דוגמה: השפעה של 4 גורמים על ניצולת בתהליך כימי

שם הניסוי	פיתוח תהליך
מטרה	שיפור הניצולת
משתנה תגובה	ניצולת
גורמים	מטען הזרז, טמפ', לחץ, ריכוז
רמות הגורמים	Ca: 10,15 T: 220,240 P: 50,80 Co: 10,12
צרופים	16 (2 ⁴)
גודל המדגם	הפעלה אחת בכל צירוף
לוגיסטיקה	ביצוע בסדר אקראי
הערות	

תוצאות הניסוי

	Ca	T	P	Co	Y
1	10	20	50	10	71
2	15	20	50	10	61
3	10	40	50	10	90
4	15	40	50	10	82
5	10	20	80	10	68
6	15	20	80	10	61
7	10	40	80	10	87
8	15	40	80	10	80

	Ca	T	P	Co	Y
9	10	20	50	12	61
10	15	20	50	12	50
11	10	40	50	12	89
12	15	40	50	12	83
13	10	20	80	12	59
14	15	20	80	12	51
15	10	40	80	12	85
16	15	40	80	12	78



ניתוח הניסוי המקורי ב- R

```
attach(Proc.Yield)
```

```
Ca <- (Cat-12.5)/2.5
```

```
Te <- (Temp-230)/10
```

```
Pr <- (Pres-65)/15
```

```
Co <- (Conc-11)/1
```

```
fit.1 <- lm(Yield ~ Ca*Te*Pr*Co)
```

```
summary(fit.1)
```

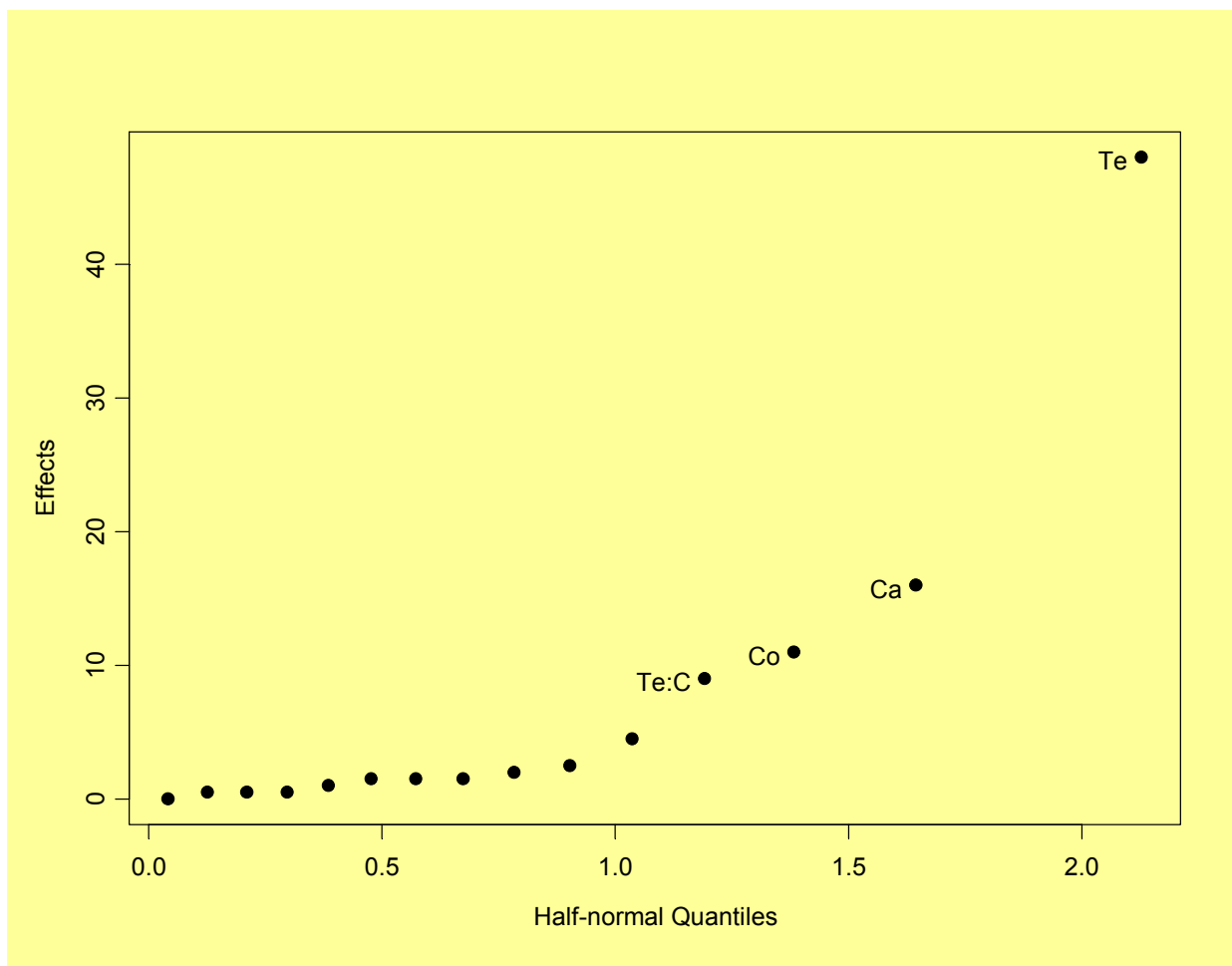
הפלט:


Value Std. Error t value

Pr(>|t|)

(Intercept)	72.250	NA	NA	NA
Ca	-4.000	NA	NA	NA
Te	12.000	NA	NA	NA
Pr	-1.125	NA	NA	NA
Co	-2.750	NA	NA	NA
Ca:Te	0.500	NA	NA	NA
Ca:Pr	0.375	NA	NA	NA
Te:Pr	-0.625	NA	NA	NA
Ca:Co	0.000	NA	NA	NA
Te:Co	2.250	NA	NA	NA
Pr:Co	-0.125	NA	NA	NA
Ca:Te:Pr	-0.375	NA	NA	NA
Ca:Te:Co	0.250	NA	NA	NA
Ca:Pr:Co	-0.125	NA	NA	NA
Te:Pr:Co	-0.375	NA	NA	NA
Ca:Te:Pr:Co	-0.125	NA	NA	NA

תרשים הסתברות "חצי נורמלי" מספק מבט גרפי מהיר
שמציביע על ההשפעות החשובות ביותר.



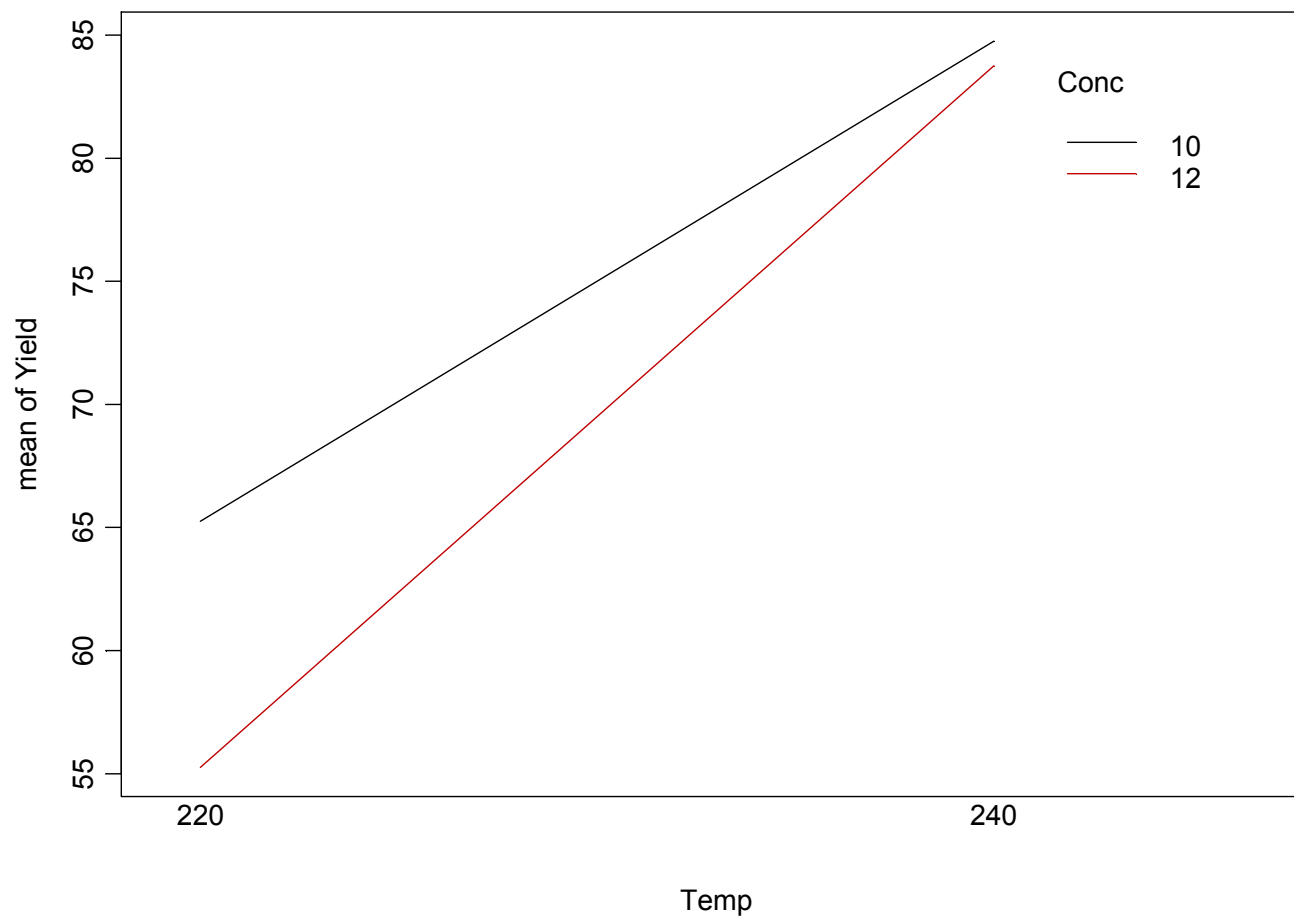



התרשים משרטט את הערכים המוחלטים של המקדמים (עד כדי הכפלה בקבוע) נגד אחוזונים מן הצד הימין של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית – מה שמכונה "ההתפלגות החצי נורמלית".

הקוד הדרוש ב-R:

```
hnorm <-qnorm(seq(0.5+1/60,0.5+29/60,1/30),0,1)
plot(hnorm,sort(abs(fit.1$coef[2:16])),ylab="Effects")
```

מבט גרפי על האינטראקציה בין טמפרטורה והריכוז





כל האינטראקציות בין 3 גורמים ויותר יצאו קטנות. נראה
מה קורה אם ננתח את הנתונים שוב, תוך הנחה שבאמת אין
אינטראקציות בין 3 או 4 גורמים.

```
fit.3 <- lm(Yield ~  
(Ca+Te+Pr+Co) * (Ca+Te+Pr+Co) )  
  
summary(fit.3)
```

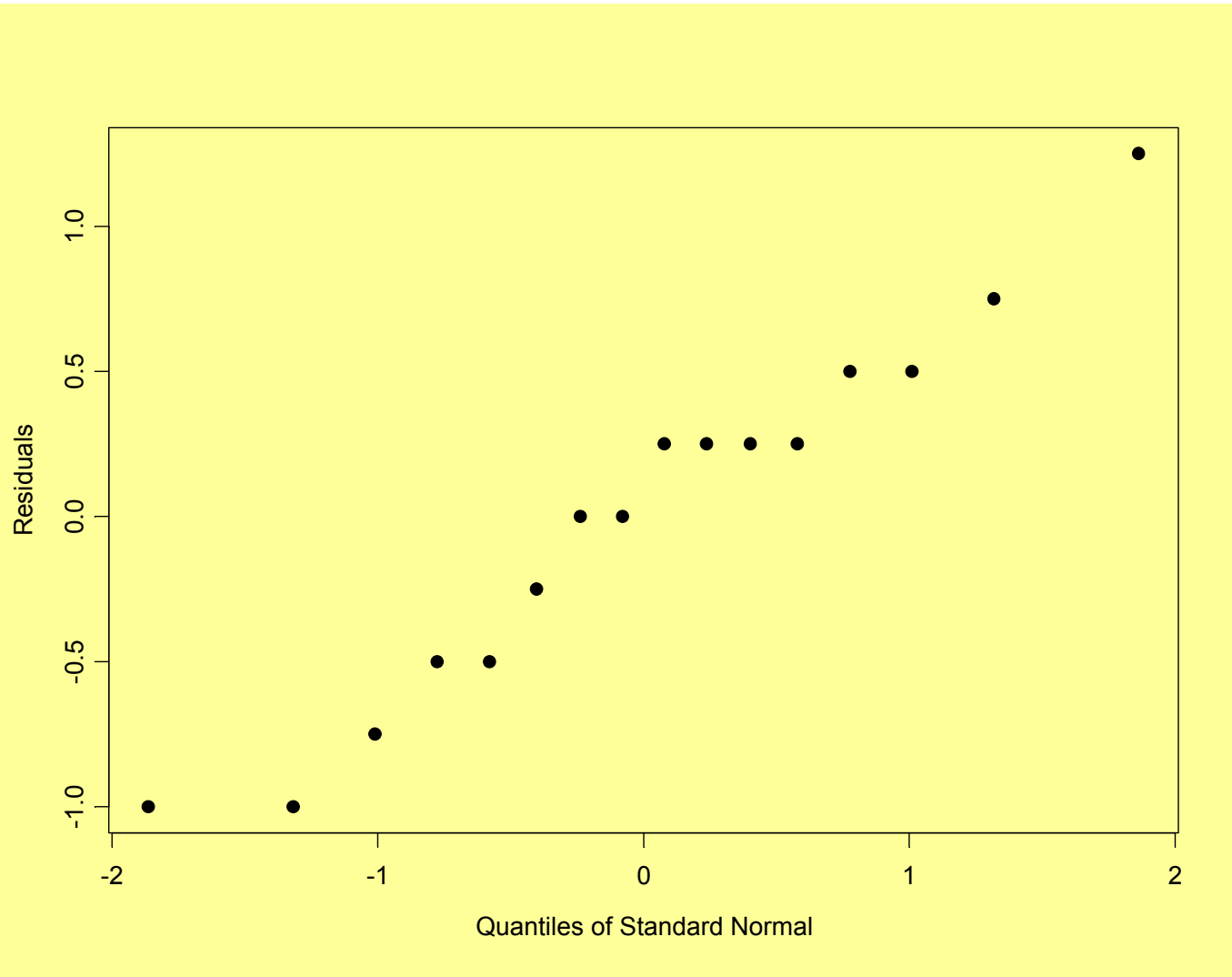
הפלט:

	t value	Pr(> t)	Value	Std. Error
(Intercept)	72.2500	0.2739	263.8197	0.0000
Ca	-4.0000	0.2739	-14.6059	0.0000
Te	12.0000	0.2739	43.8178	0.0000
Pr	-1.1250	0.2739	-4.1079	0.0093
Co	-2.7500	0.2739	-10.0416	0.0002
Ca:Te	0.5000	0.2739	1.8257	0.1275
Ca:Pr	0.3750	0.2739	1.3693	0.2292
Ca:Co	0.0000	0.2739	0.0000	1.0000
Te:Pr	-0.6250	0.2739	-2.2822	0.0713
Te:Co	2.2500	0.2739	8.2158	0.0004
Pr:Co	-0.1250	0.2739	-0.4564	0.6672

Residual standard error: 1.095 on 5 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.9979

תרשים הסתברות נורמלית של השאריות מן המודל הסטטיסטי.



דוגמה: השפעה של 4 גורמים על תפקוד של מקדחה

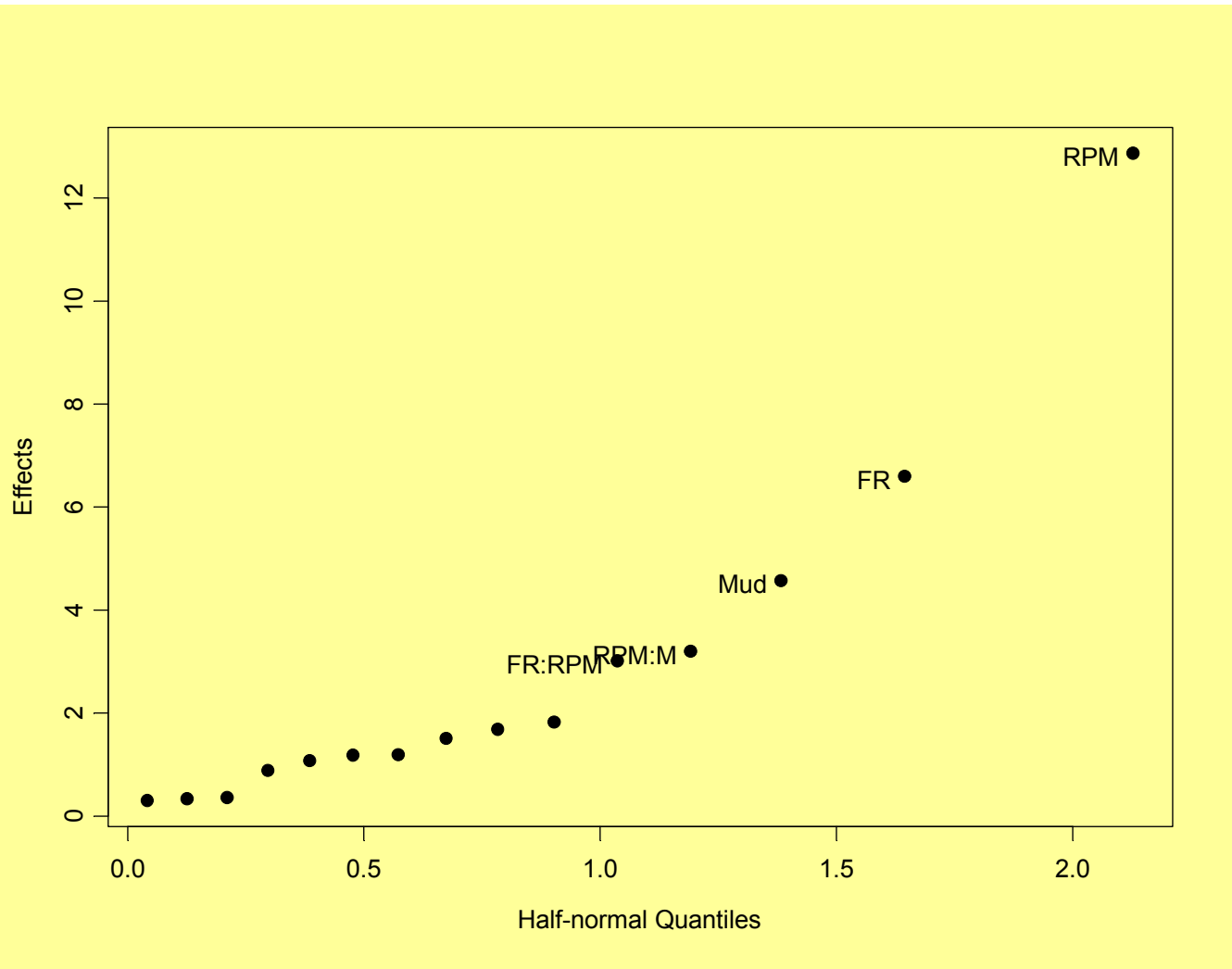
שם הניסוי	חקירת מקדחה
מטרה	לשפר את הביצועים של המקדחה
משתנה תגובה	מהירות ההתקדמות
גורמים	מטען, קצב זרימה, סל"ד, סוג בוץ
רמות הגורמים	
צרופים	16 (2 ⁴)
גודל המדגם	הפעלה אחת בכל צירוף
לוגיסטיקה	ביצוע בסדר אקראי
הערות	

תוצאות הניסוי

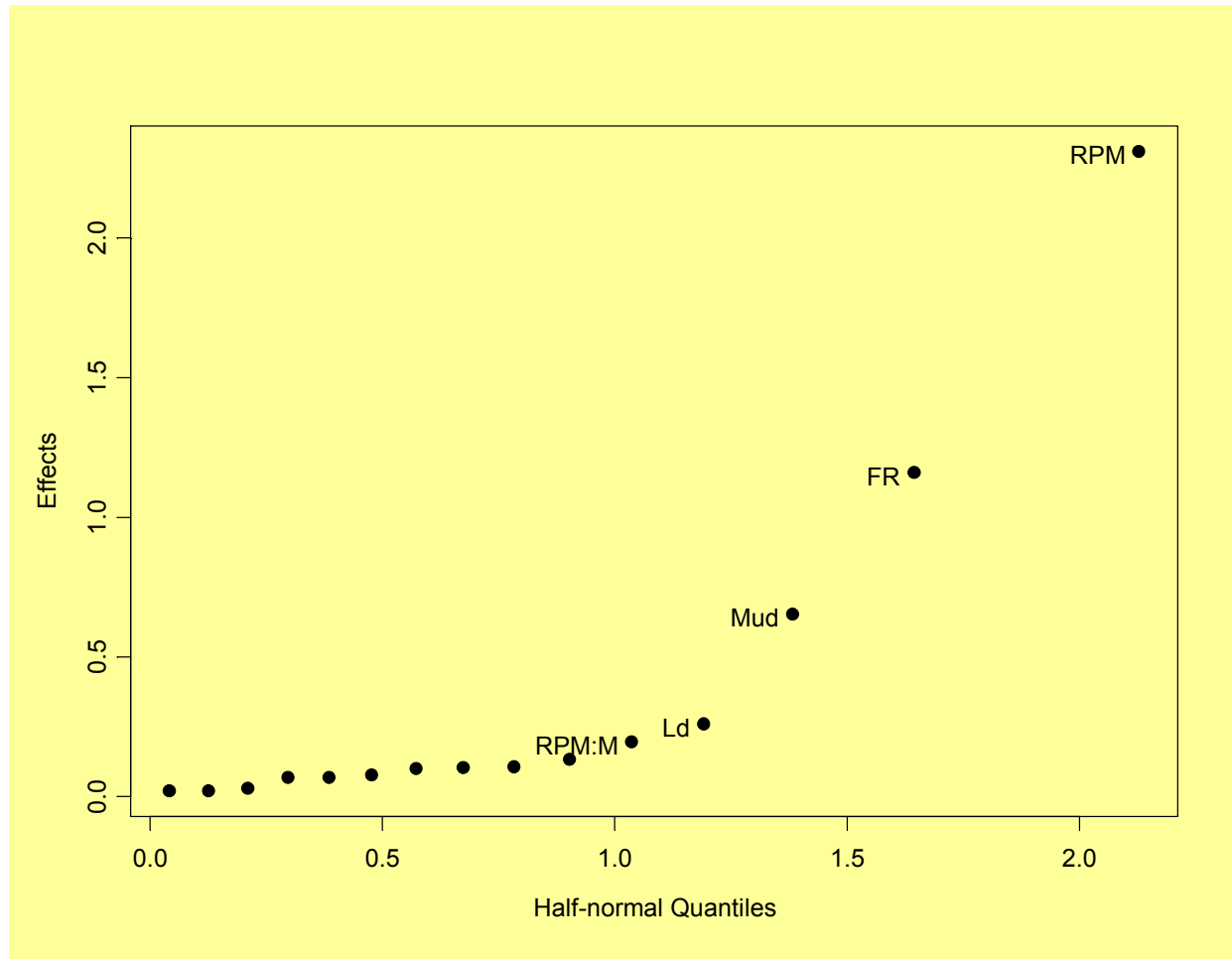
	Ld	Fl	RP	Md	Y
1	-1	-1	-1	-1	1.68
2	1	-1	-1	-1	1.98
3	-1	1	-1	-1	3.28
4	1	1	-1	-1	3.44
5	-1	-1	1	-1	4.98
6	1	-1	1	-1	5.70
7	-1	1	1	-1	9.97
8	1	1	1	-1	9.07

	Ld	Fl	RP	Md	Y
9	-1	-1	-1	1	2.07
10	1	-1	-1	1	2.44
11	-1	1	-1	1	4.09
12	1	1	-1	1	4.53
13	-1	-1	1	1	7.77
14	1	-1	1	1	9.43
15	-1	1	1	1	11.75
16	1	1	1	1	16.30

תרשים חצי נורמלי להשפעות.



תרשים חצי נורמלי להשפעות לאחר מעבר ללוגריתמים.



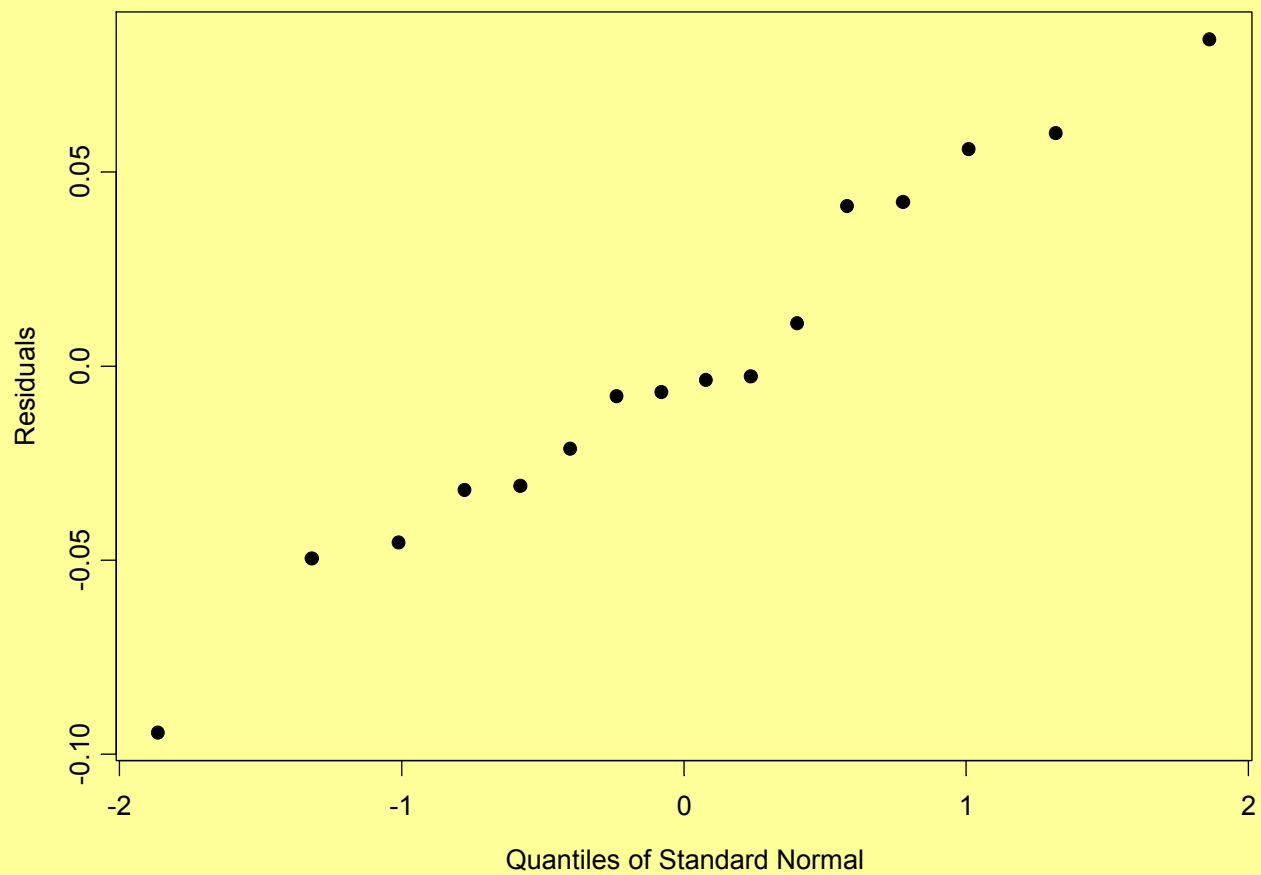
פלט לניתוח התוצאות, בסקלה לוגית, בלי אינטראקציות בין 3 גורמים או יותר:

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	1.5977	0.0204	78.1961	0.0000
Ld	0.0650	0.0204	3.1810	0.0245
FR	0.2900	0.0204	14.1952	0.0000
RPM	0.5772	0.0204	28.2506	0.0000
Mud	0.1633	0.0204	7.9908	0.0005
Ld:FR	-0.0172	0.0204	-0.8409	0.4388
Ld:RPM	0.0052	0.0204	0.2533	0.8101
Ld:Mud	0.0335	0.0204	1.6371	0.1625
FR:RPM	-0.0251	0.0204	-1.2286	0.2739
FR:Mud	-0.0075	0.0204	-0.3656	0.7296
RPM:Mud	0.0491	0.0204	2.4016	0.0615

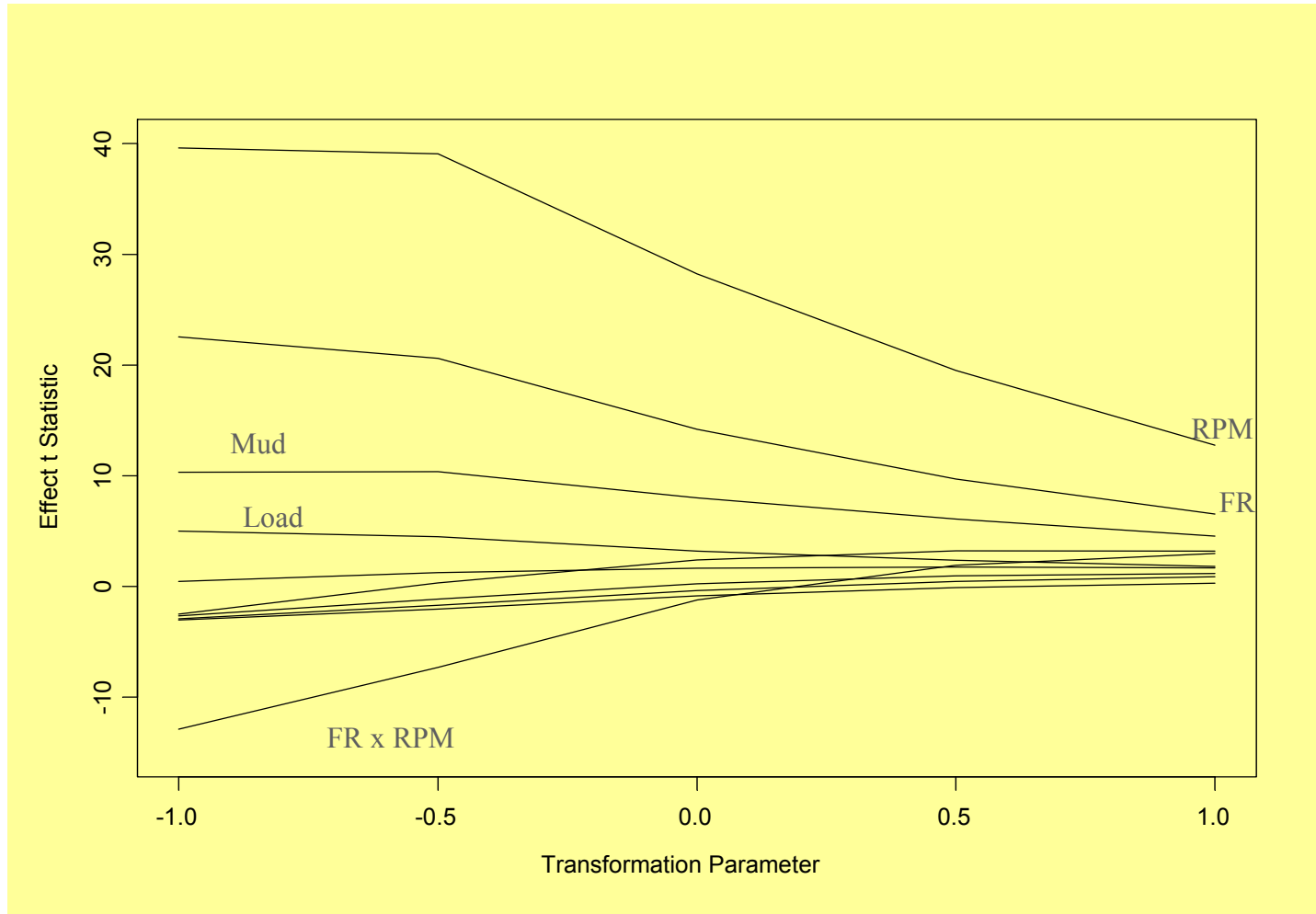
Residual standard error: 0.08173 on 5 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.9954

תרשים הסתברות נורמלית של השאריות מן המודל הסטטיסטי.



תרשים של סטטיסטיים t מול פרמטר טרנספורמציה, לפי מודל הכולל רק השפעות עיקריות ואמטראקציות זוגיות.



תרשים של סטטיסטים t מול פרמטר טרנספורמציה, לפי מודל הכולל רק השפעות עיקריות ואמטראקציות זוגיות. התמקדות באנטראקציות.

