

ומה כאשר  
אין  
שיווי משקל?



# בעיטות 11 מטר



שוער

שמאל ימין

ימין  
בועט  
שמאל

|    |    |
|----|----|
| 10 | 70 |
| 80 | 40 |

בועט מבלבל את ה שוער :

בועט ימינה או שמאלה  
בהסתברות 0.5.

ימינה

סיכוי לשער:  $(0.5)(10) + (0.5)(80) = 45$

שמאלה

סיכוי לשער:  $(0.5)(70) + (0.5)(40) = 55$

שוער

# בעיטות 11 מטר

שוער

שמאל ימין

|     |      |    |    |
|-----|------|----|----|
| p   | ימין | 10 | 70 |
| 1-p | שמאל | 80 | 40 |

בועט מבלבל את ה שוער:

בועט ימינה או שמאלה

בהסתברויות כאלה

שה שוער אדיש בין זינוק

ימינה ושמאלה.

אדישות ה שוער

$$70p + 40(1-p) = 10p + 80(1-p)$$

$$40 + 30p = 80 - 70p$$

$$100p = 40$$

$$p = 0.4$$

# בעיטות 11 מטר

|                               |      |      |      |
|-------------------------------|------|------|------|
|                               |      | q    | 1-q  |
|                               |      | ימין | שמאל |
| <div>0.4</div> <div>0.6</div> | ימין | 10   | 70   |
|                               | שמאל | 80   | 40   |

שוער מבלבל את הבועט:

מזנק ימינה או שמאלה

בהסתברויות כאלה

שהבועט אדיש בין בעיטה

ימינה ושמאלה.

אדישות הבועט

$$80q + 40(1-q) = 10q + 70(1-q)$$

$$40 + 40q = 70 - 60q$$

$$100q = 30$$

$$q = 0.3$$

# בעיטות 11 מטר

|     |      |      |      |
|-----|------|------|------|
|     |      | 0.3  | 0.7  |
|     |      | ימין | שמאל |
| 0.4 | ימין | 10   | 70   |
| 0.6 | שמאל | 80   | 40   |

הבועט בוחר באופן הסתברותי אחת מבין האסטרטגיות **ימין**, **שמאל**.  
 בחירה הסתברותית זו -  $(0.4, 0.6)$  - היא אסטרטגיה מעורבת.  
 האסטרטגיות **ימין** ו**שמאל** הן האסטרטגיות הטהורות של השוער.  
 כל אסטרטגיה טהורה היא בפרט גם אסטרטגיה מעורבת. למשל  
**ימין** היא האסטרטגיה המעורבת  $(1, 0)$ .

# בעיטות 11 מטר

|     |      |      |      |
|-----|------|------|------|
|     |      | 0.3  | 0.7  |
|     |      | ימין | שמאל |
| 0.4 | ימין | 10   | 70   |
| 0.6 | שמאל | 80   | 40   |

האסטרטגיה המעורבת  $(0.3, 0.7)$  של השוער, נבחרה כך שהבועט אדיש בין בעיטה ימינה ושמאלה.

בעיטה ימינה תתן סיכוי לשער של

$$0.3(10) + 0.7(70) = 3 + 49 = 52$$

אותו סיכוי תתן גם בעיטה שמאלה.

## בעיטות 11 מטר

|     |      |      |      |
|-----|------|------|------|
|     |      | 0.3  | 0.7  |
|     |      | ימין | שמאל |
| 0.4 | ימין | 10   | 70   |
|     | שמאל | 80   | 40   |

האסטרטגיה המעורבת (0.4, 0.6) של ה**בועט**, נבחרה כך שה**שוער** אדיש בין זינוק **ימינה** ו**שמאלה**.

זינוק **ימינה** ייתן סיכוי לשער של

$$0.4(10) + 0.6(80) = 4 + 48 = 52$$

אותו סיכוי ייתן גם זינוק **שמאלה**.

# בעיטות 11 מטר

|     |      |      |      |
|-----|------|------|------|
|     |      | 0.3  | 0.7  |
|     |      | ימין | שמאל |
| 0.4 | ימין | 10   | 70   |
| 0.6 | שמאל | 80   | 40   |

האם מול האסטרטגיה המעורבת  $(0.3, 0.7)$  של השוער, יכול הבועט להגדיל את סיכוייו לשער, אם יבחר באסטרטגיה מעורבת שונה מ-  $(0.4, 0.6)$ ?

**לא!**

גם ימין וגם שמאל מעניקות לבועט סיכוי של 52%, לכן כל אסטרטגיה מעורבת תתן אותו סיכוי.

האסטרטגיה המעורבת  $(0.4, 0.6)$  היא תגובה טובה ביותר ל-  $(0.3, 0.7)$ .

## בעיטות 11 מטר

|     |      |      |      |
|-----|------|------|------|
|     |      | 0.3  | 0.7  |
|     |      | ימין | שמאל |
| 0.4 | ימין | 10   | 70   |
| 0.6 | שמאל | 80   | 40   |

זוג האסטרטגיות המעורבות

$(0.3, 0.7)$ ,  $(0.4, 0.6)$

הן

שיווי משקל.

# **Nash** משפט

**בכל משחק  
שבו מספר סופי  
של שחקנים ואסטרטגיות  
קיים  
שיווי משקל  
באסטרטגיות מעורבות.**

|                             |        |                    |     |
|-----------------------------|--------|--------------------|-----|
|                             |        | אָגרוף      בֶּלֶט |     |
| <div>p</div> <div>1-p</div> | אָגרוף | 3,2                | 0,0 |
|                             | בֶּלֶט | 0,0                | 2,3 |

כדי ששחקן II יהיה אדיש בין בלט לאיגרוף חייבת האסטרטגיה המעורבת של I לקיים:

$$2p + 0(1-p) = 0p + 3(1-p)$$

כלומר:

$$p = 0.6$$

# ש"מ מעורב בקרב המינים

|     |       | q     | 1-q |
|-----|-------|-------|-----|
|     |       | אגרוף | בלט |
| 0.6 | אגרוף | 3,2   | 0,0 |
|     | בלט   | 0,0   | 2,3 |
| 0.4 |       |       |     |

כדי ששחקן I יהיה אדיש בין בלט לאיגרוף חייבת האסטרטגיה המעורבת של II לקיים:

$$3q + 0(1-q) = 0q + 2(1-q)$$

כלומר:

$$q = 0.4$$

# ש"מ מעורב בקרב המינים

|                |  |                |      |
|----------------|--|----------------|------|
|                |  | 0.4      0.6   |      |
|                |  | אגרוף      בלט |      |
| 0.6      אגרוף |  | 3, 2           | 0, 0 |
|                |  | 0, 0           | 2, 3 |
| 0.4      בלט   |  |                |      |

נוסף לשני שיווי המשקל באסטרטגיות טהורות יש במשחק זה שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות:

$(0.6, 0.4), (0.4, 0.6)$

# חזרה לצמת...

במשחק, שני שיווי משקל טהורים:  
(נוסע, עוצר), (עוצר, נוסע).

ללא תקשורת בין השחקנים, קשה  
להגיע לשיווי משקל אלה.

קיים שיווי משקל מעורב שבו נוסע כל  
שחקן בהסתברות  $p$ .

|      |            |      |
|------|------------|------|
|      | נוסע       | עוצר |
| נוסע | -100, -100 | 6, 2 |
| עוצר | 2, 6       | 3, 3 |

$$(-100)p + 6(1-p) = 2p + 3(1-p)$$

$$105p = 3$$

הסיכוי לתאונה הוא בערך 0.0009.

# המצאת הרמזור

הרמזור מציע לשחקנים:

(נוסע, עוצר) או (עוצר, נוסע),

בסיכוי שווה.

לכל אחד מן השחקנים יש  
עתה ארבע אסטרטגיות:

- לנסוע ללא תלות ברמזור
- לעצור ללא תלות ברמזור
- לקבל את עצת הרמזור
- לפעול בנגוד לעצת הרמזור

|      | נוסע                  | עוצר                  |
|------|-----------------------|-----------------------|
| נוסע | -100, -100            | 6, 2<br>$\frac{1}{2}$ |
| עוצר | 2, 6<br>$\frac{1}{2}$ | 3, 3                  |

ההחלטה לקבל את עצת  
הרמזור היא שיווי משקל  
שתשלומו הוא (4, 4).

# שיווי משקל מתואם

|   | L   | C   | R   |
|---|-----|-----|-----|
| T | 4,5 | 5,4 | 0,0 |
| M | 5,4 | 0,0 | 4,5 |
| B | 0,0 | 4,5 | 5,4 |

במשחק זה יש שיווי משקל יחיד.

כל שחקן בוחר כל אחת מן  
האסטרטגיות שלו בהסתברות  $1/3$ .

התשלום לכל אחד מן השחקנים  
הוא 3.

הסיכוי שהתשלום לשחקנים  
יהיה 0 הוא  $3(1/9)$ . האם אפשר  
למנוע את האפשרות הזו?

אמנם רמזור לא יפתור את הבעיה, אבל מתווך מתוחכם עשוי לפתור אותה.

# שיווי משקל מתואם

|   | L                                                                                      | C                                                                                      | R                                                                                      |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| T | $\frac{1}{6}$ <span style="color: blue;">4</span> , <span style="color: red;">5</span> | $\frac{1}{6}$ <span style="color: blue;">5</span> , <span style="color: red;">4</span> | <span style="color: blue;">0</span> , <span style="color: red;">0</span>               |
| M | $\frac{1}{6}$ <span style="color: blue;">5</span> , <span style="color: red;">4</span> | <span style="color: blue;">0</span> , <span style="color: red;">0</span>               | $\frac{1}{6}$ <span style="color: blue;">4</span> , <span style="color: red;">5</span> |
| B | <span style="color: blue;">0</span> , <span style="color: red;">0</span>               | $\frac{1}{6}$ <span style="color: blue;">4</span> , <span style="color: red;">5</span> | $\frac{1}{6}$ <span style="color: blue;">5</span> , <span style="color: red;">4</span> |

המתווך בוחר כל אחד  
מצרופי האסטרטגיות  
הבאים בהסתברות  $\frac{1}{6}$ .

כשנבחר צרוף אסטרטגיות  
המתווך מציע לכל שחקן  
לשחק את האסטרטגיה שלו  
בצרוף.

לכל שחקן יש עתה 27 אסטרטגיות.  
זוג האסטרטגיות שבהן מקבל כל שחקן  
את עצת המתווך הוא שיווי משקל.

כל שחקן יכול להתנות את  
האסטרטגיה הטהורה  
שישחק, בהצעת המתווך.

# שיווי משקל מתואם

|   | L                 | C                 | R                 |
|---|-------------------|-------------------|-------------------|
| T | $\frac{1}{6}$ 4,5 | $\frac{1}{6}$ 5,4 | 0,0               |
| M | $\frac{1}{6}$ 5,4 | 0,0               | $\frac{1}{6}$ 4,5 |
| B | 0,0               | $\frac{1}{6}$ 4,5 | $\frac{1}{6}$ 5,4 |

בהנחה ששחקן שני מקבל את הצעת המתווך, כדאי לשחקן ראשון לשחק T כאשר המתווך מציע זאת.

נניח ששחקן שני יקבל את הצעת המתווך, ולשחקן ראשון הוצע לשחק T.

הוא מסיק שלשחקן שני הוצע לשחק:

L או C בהסתברות  $1/2$  כ"א.

לכן, אם ישחק T תשלומו הוא:

$$(1/2)4 + (1/2)5 = 4.5$$

אם ישחק M תשלומו הוא:

$$(1/2)5 + (1/2)0 = 2.5$$

אם ישחק B תשלומו הוא 2.

# שיווי משקל מתואם

|   | L                 | C                 | R                 |
|---|-------------------|-------------------|-------------------|
| T | $\frac{1}{6}$ 4,5 | $\frac{1}{6}$ 5,4 | 0,0               |
| M | $\frac{1}{6}$ 5,4 | 0,0               | $\frac{1}{6}$ 4,5 |
| B | 0,0               | $\frac{1}{6}$ 4,5 | $\frac{1}{6}$ 5,4 |

בשיווי המשקל המתואם  
התשלום לכל שחקן הוא 4.5.