פתרון המבחן בפונק' מרוכבות 1, 17.2.2009

1) יהי $R_0>0$ מספיק גדול כך שכל הנק' $z_1,\dots,z_r$ נמצאות ב-$D_0(R_0)$. יהי $R>R_0$ כלשהו ונסמן $\gamma=\partial D_0(R)$.

לפי משפט ה-residue:

$$\sum_{k=1}^{r}\mathrm{Res}_{z_k}(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz \qquad (*)$$

f הולו' ב-$A=\mathbb{C}\setminus D_0(R_0)$ לכן יש לה פיתוח Laurent ב"טבעת" זו: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n$, $\forall\ |z|\geq R_0$.

מאחר ו-$\lim_{z\to\infty}f(z)=0$, $a_n=0\ \forall\ n\geq 0$.

(הוכחה: לפונק' $g(w)=f(\frac{1}{w})$, המוגדרת ב-$D_0^*(\frac{1}{R_0})=\{w:|w|<\frac{1}{R_0}\}$ יש נק. סליקה ב-0. $\Leftarrow$ בפיתוח Laurent של g, $g(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n w^{-n}$, אין מחוברים שליליים, כלו' $a_n=0\ \forall\ n>0$. כמו כן $\lim_{w\to 0}g(w)=0$ לכן $a_0=0$. ובסה"כ $a_n=0\ \forall\ n\geq 0$.)

לכן, נכתוב: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n z^n$. כעת נבצע אינטגרציה איבר איבר על γ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^n\,dz = a_{-1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z}=a_{-1} \qquad (**)$$

($\int_\gamma z^n=0$, $\forall\ n\neq -1$ כי לפונק' z^n יש קדומה ב-$\mathbb{C}\setminus\{0\}$.)

מצד שני:
$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{w\to 0} \frac{1}{w} f\left(\frac{1}{w}\right) = \lim_{w\to 0}\left(a_{-1}+a_{-2}w+\dots+a_{-n-1}w^n+\dots\right) = a_{-1}$$

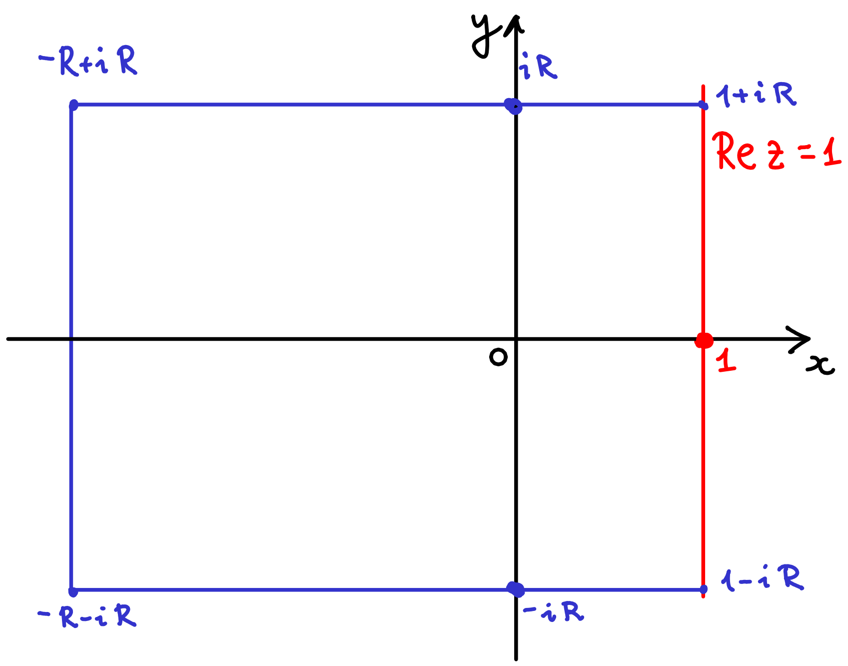
וביחד עם (*) ! (**) נקבל את הדרוש. ∎

<u>הערה:</u> לא נכון ש- $a_{-1}=\mathrm{Res}_0(f)$. לפי ההגדרה, $\mathrm{Res}_0(f)$
זה המקדם של z^{-1} בפיתוח Laurent של f ב- $D_0^*(r)$,
אבל a_{-1} שלנו זה המקדם של z^{-1} בפיתוח Laurent
בטבעת A וזה תחום אחר לגמרי!
חוץ מזה, יתכן ש- f אין נק' סינגולריות ב- 0 ולמרות זאת $a_{-1}\neq 0$.

<u>דוגמא:</u> $f(z)=\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}+\dots+\dfrac{1}{z^n}+\dots$, $\forall\ |z|>1$.

---

2) נגדיר את $\gamma_R\subset\mathbb{C}$



להיות המסילה שהיא השפה של מלבן B_R שקודקודיו נמצאים בנק' $1-iR,\ 1+iR,\ -R+iR,\ -R-iR$ כמו בציור.

נגדיר $f(z)=e^z-Cz$
$g(z)=-Cz$.

f,g הולו' ב- B_R. יהי $R\geq 1$ כלשהו. $\Leftarrow$ $\forall z\in\gamma_R=\partial B_R$ מתקיים

$$|f(z)-g(z)|=|e^z|=e^{\mathrm{Re}\,z}\leq e<|C|\leq|Cz|=|g(z)|$$

(כי $\forall z\in B_R$, $\mathrm{Re}\,z\leq 1$) (כי $R\geq 1$, $\forall z\in\gamma_R$ מתקיים $|z|\geq 1$)

לפי משפט Rouché, $Z_f=Z_g$ ב- B_R. ברור ש- $Z_g=1$ כי ל- g יש אפס יחיד פשוט ב- 0. לסיכום, $Z_f=1$ ב- B_R, $\forall R\geq 1$.

אבל $\bigcup_{R\geq 1} B_R = \{z: \operatorname{Re} z \leq 1\}$ $\Leftarrow$ $Z_f = 1$ בכל $\{z: \operatorname{Re} z \leq 1\}$.

<u>הערה:</u> אפשר להראות שלמעשה $Z_f = 1$ ב- $D_0(1)$.
אבל, כמובן שלא מבלים זאת/ יש להראות שאין עוד פתרונות של המשוואה $\{f(z)=0\}$ ב- $D_0(1) \setminus \{z: \operatorname{Re} z \leq 1\}$.

---

3) נניח בשלילה של- f אין נק. עיקרית ב- 0. $\Leftarrow$ או ש- 0 קוטב של f או ש- 0 נק. סליקה. נשלול שתי אפשרויות אלה ונגיע לסתירה.

ואכן, אם 0 היתה קוטב אז $\lim_{z\to 0} |f(z)| = \infty$ בסתירה לנתון ש- $|f(\frac{1}{n})| \leq \frac{1}{n!}$. נניח כעת ש- 0 נק. סליקה. נרחיב את הגדרת f לנק. 0 ע"י $f(0) = \lim_{z\to 0} f(z)$. מההנחות נובע ש- $f(0)=0$.

מאחר ו- f לא זהותית 0 אז $\exists$ פונק' הולו' $g: D_0(10) \longrightarrow \mathbb{C}$ עם $g(0) \neq 0$ ו- $\exists!$ $k \geq 1$ כך ש- $f(z) = z^k g(z)$ $\forall$ $z \in D_0(10)$.

$\Leftarrow$ $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^k} g(\frac{1}{n})$ $\Leftarrow$ $|g(\frac{1}{n})| = n^k |f(\frac{1}{n})| \leq \frac{n^k}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

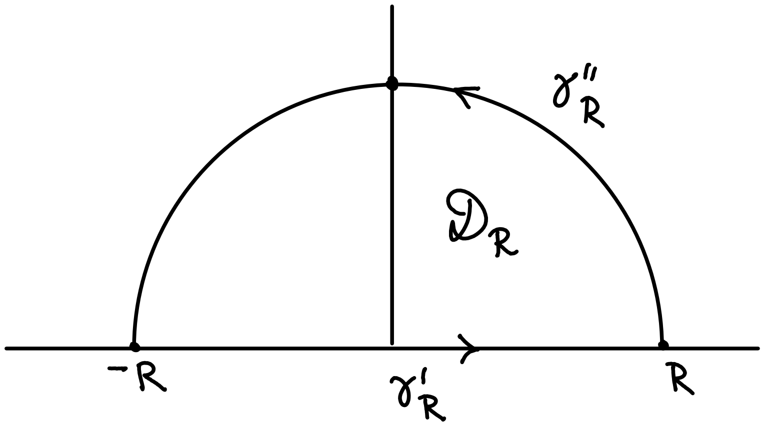
$\Leftarrow$ $g(0) = 0$. מצד שני אנחנו יודעים ש- $g(0) \neq 0$. סתירה.

<u>דוגמאות לפונק' כמו בשאלה.</u> א) $f(z) = \sin(\frac{\pi}{z})$.

ברור ש- $|f(\frac{1}{n})| = |\sin(\pi n)| = 0 \leq \frac{1}{n!}$

ב) עוד דוגמא: $f(z) = e^{-e^{1/z}}$.

$$|f(\tfrac{1}{n})| = e^{-e^n} \leq e^{-n\log n} \leq e^{-\log(n!)} = \frac{1}{n!}$$



4) נגדיר מסילה $\gamma_R=\gamma'_R\cup\gamma''_R$

כאשר: $\gamma'_R(t)=t,\ -R\le t\le R$

$0\le t\le \pi$, $\gamma''_R(t)=Re^{it}$.

נגדיר $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$. ואנחנו רוצים לחשב את האינטגרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma'_R} f(z)\,dz.$$
(קל לראות ש- $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס, למשל בעזרת מבחן ההשוואה.)

מעתה והלאה נעבוד רק עם $R>1$.

נסמן ב- D_R את התחום שחסום ע"י γ_R, כמו בציור.

f פונק' מרומורפית ויש לה בדיוק שני קטבים, i ו- $-i$, שניהם מסדר 2. רק הקוטב $i\in D_R$. לכן

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}_i(f)=2\pi i\lim_{z\to i}\left(f(z)\cdot(z-i)^2\right)'=\left.\frac{-4\pi i}{(z+i)^3}\right|_{z=i}=\frac{\pi}{2}\quad(*)$$

מצד שני:
$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=\int_{\gamma'_R} f(z)\,dz+\int_{\gamma''_R} f(z)\,dz$$

$$\left|\int_{\gamma''_R} f(z)\,dz\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{iRe^{it}\,dt}{(1+R^2e^{2it})^2}\right|\le\int_0^{2\pi}\frac{R\,dt}{(R^2-1)^2}=2\pi\frac{R}{(R^2-1)^2}\xrightarrow[R\to\infty]{}0\text{ -!}$$

$$\Leftarrow\quad \frac{\pi}{2}\underset{(*)\text{ -מ}}{=}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma'_R} f(z)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

למסק':
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{2}.$$

$\blacksquare$

5) <u>א.</u> לא קיימת $h:\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{C}$ הולו' עם $h(z)^2=z^2-1$.

<u>הוכחה.</u> נניח בשלילה ש- h כזו קיימת. מאחר והפונק'
z^2-1 חסומה בסביבה של 1 ושל -1 נקבל שגם h חסומה
שם. מאחר ו 1 ו -1 נק. סינגולריות מבודדות של h נקבל
ממשפט ההרחבה של Riemann ש 1 ו -1 נק. סליקות של h.
נרחיב את h לנק. -1 ו 1 ע"י $h(\pm 1)=0$. קל לראות
ש-h נשארת רציפה ב- ± 1 ולכן h הולו' בכל $\mathbb{C}$.
בפרט גם ש- $2h(z)h'(z)=2z$ $\Rightarrow$ $h(z)h'(z)=z \quad \forall z\in\mathbb{C}$
נציב $z=1$ ונקבל מיד סתירה: מצד אחד $h(1)h'(1)=1$, אבל $h(1)=0$.

<u>ב.</u> נסמן $\mathcal{D}=\mathbb{C}\setminus[-1,1]$. נתבונן בפונק' $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$.
נשלול קודם ש$\exists$ פונק' הולו' $g:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$ כך ש- $e^{g(z)}=f(z)\ \forall z\in\mathcal{D}$,
(כלומר $\exists$ ענף של $\log f$ ב-$\mathcal{D}$).
ובכן, לשם כך נשתמש בקריטריון שלמדנו, שאומר ש$\exists$ ענף של $\log f$
ב- $\mathcal{D}$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ מסילה סגורה $\gamma\subset\mathcal{D}$ מתקיים $\int_\gamma \frac{f'}{f}=0$.

<u>נחשב:</u> $f'(z)=\frac{(z+1)-(z-1)}{(z+1)^2}=\frac{1}{z+1}-\frac{z-1}{(z+1)^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow}\ \int_\gamma \frac{f'}{f}=\int_\gamma\frac{dz}{z-1}-\int_\gamma\frac{dz}{z+1}=2\pi i\left(I_\gamma(1)-I_\gamma(-1)\right).$$

תהי כעת $\gamma\subset\mathcal{D}$ מסילה סגורה. מאחר ו $[-1,1]$ קשיר

אז $[-1,1]$ מוכל כולו באחד מרכיבי הקשירות של $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

$\Leftarrow I_\gamma(1)=I_\gamma(-1)$ ונקבל מ- $(*)$ ש- $\int_\gamma \frac{f'}{f}=0$.

מאחר וזה נכון $\forall$ מסילה סגורה $\gamma\subset\mathcal{D}$, $\exists$ פונק' הולו' $g:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$

עם $e^{g(z)}=f(z)$. כעת נגדיר $h(z):=(z+1)e^{\frac{1}{2}g(z)}$.

ברור ש- h הולו' ב- $\mathcal{D}$ ונקבל:

$h(z)^2=(z+1)^2e^{g(z)}=(z+1)^2\frac{z-1}{z+1}=z^2-1$. כנדרש. ∎

<u>הערה:</u> לא קשה לבדוק ש<u>לא</u> קיים ענף של $\log(z^2-1)$ בתחום $\mathcal{D}=\mathbb{C}\setminus[-1,1]$. למרות זאת, כן קיים ענף של $\sqrt{z^2-1}$ ב- $\mathcal{D}$. הרעיון בפתרון הנ"ל הוא שקיים ענף של $\log\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ ולכן גם ענף של $\sqrt{z^2-1}=\sqrt{(z+1)^2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$.

---

6) נניח בשלילה ש- $\exists\ \varepsilon_0>0$ ו- $\delta_0>0$ כך ש- $\forall z\in\mathcal{D}$ עם $0<|z|<\delta_0$ מתקיים $|f(z)|\geq\varepsilon_0$. נסמן $\mathcal{D}'=\mathcal{D}\cap D_0(\delta_0)$. קל לראות ש- $\mathcal{D}'$ תחום ולמעשה $\exists\ N_0$ כך ש- $\mathcal{D}'=D_0^*(\delta_0)\setminus\{\frac{1}{n}:n\geq N_0\}$.

נגדיר $g:\mathcal{D}'\longrightarrow\mathbb{C}$, ע"י $g(z)=\frac{1}{f(z)}$. מאחר ו- $|f(z)|\geq\varepsilon_0$ $\forall z\in\mathcal{D}'$ אז f לא מתאפסת ב- $\mathcal{D}'$ ולכן g הולו' ב- $\mathcal{D}$. כמו כן, בכל אחת מהנק' $z_n=\frac{1}{n}\in\mathcal{D}'$, $n\geq N_0$, ל- g יש נק. סליקה שהוא למעשה אפס (כי ל- f יש קוטב בנק. אלה). אחרי הרחבת g באופן הולומורפי

בכל הנקודות האלה נקבל פונק' הולו' $g: D_0^*(\delta) \longrightarrow \mathbb{C}$ עם
התכונות הבאות:

1) $g(\frac{1}{n}) = 0$

2) $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$ $\forall$ $z \in D_0^*(\delta)$.

כעת, מ-2) נקבל באמצעות משפט ההרחבה של Riemann ש-0
נק' סליקה של g ולכן ניתן להרחיב את g לפונק' הולו'
ב-$D_0(\delta)$. מ-1) נקבל ש-g יש קבוצת אפסים <u>שאינה</u>
דיסקרטית ב-$D_0(\delta)$ $\Longleftarrow$ g פונק' קבועה. אבל $g = \frac{1}{f}$ עם
f <u>לא</u> קבועה, לכן גם g לא קבועה. סתירה. ∎