השלמות והבהרות בפונק' מרוכבות 1 : שיעורים 1-7.

1. $\gamma \subset \mathbb{C}$ מסילה רגולרית למקוטעין, h רציפה על γ. k

$$H(z) := \int_\gamma \frac{h(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^k} \qquad H : \mathbb{C} \setminus \gamma \longrightarrow \mathbb{C}$$

אז H הולו' ! $\quad H'(z) = k \int_\gamma \frac{h(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}$

הוכ' יהי $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma$.

במהלך ההוכחה רציתי להשוות את:

$$\frac{H(z) - H(z_0)}{z - z_0} - k \int_\gamma \frac{h(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} =$$

$$= \int_\gamma h(\xi) \underbrace{\left[\frac{1}{z - z_0} \left(\frac{1}{(\xi - z)^k} - \frac{1}{(\xi - z_0)^k} \right) - k \frac{1}{(\xi - z_0)^{k+1}} \right]}_{(*)} d\xi$$

נפתח את $(*)$:

$$(*) = \frac{1}{z - z_0} \frac{(\xi - z_0)^k - (\xi - z)^k}{(\xi - z)^k (\xi - z_0)^k} - \frac{k}{(\xi - z_0)^{k+1}} =$$

$$\boxed{a^r - b^r = (a - b) \sum_{i=0}^{r-1} a^i b^{r-1-i} \quad \forall r \geq 1}$$

$$= \frac{1}{z - z_0} \frac{\overbrace{\left((\xi - z_0) - (\xi - z)\right)}^{(z - z_0)} \sum_{i=0}^{k-1} (\xi - z_0)^i (\xi - z)^{k-1-i}}{(\xi - z)^k (\xi - z_0)^k} - \frac{k}{(\xi - z_0)^{k+1}}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=0}^{k-1} (\xi - z_0)^i (\xi - z)^{k-1-i} \right)(\xi - z_0) - k (\xi - z)^k}{(\xi - z)^k (\xi - z_0)^{k+1}} =$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=0}^{k-1} (\xi - z_0)^{i+1} (\xi - z)^{k-1-i} \right) - k (\xi - z)^k}{(\xi - z)^k (\xi - z_0)^{k+1}} =$$

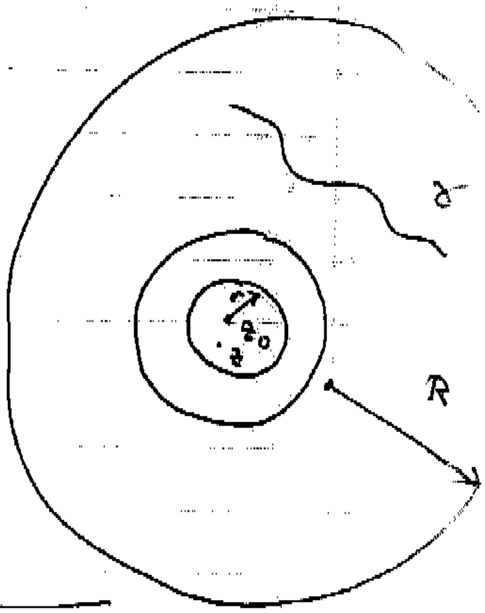
$$= \frac{\sum_{i=0}^{k-1}\left[(\xi - z_0)^{i+1}(\xi - z)^{k-1-i} - (\xi - z)^{k}\right]}{(\xi - z)^{k}\,(\xi - z_0)^{k+1}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{k-1}\left[(\xi - z_0)^{i+1}(\xi - z)^{k-1-i} - (\xi - z)^{k-1-i}(\xi - z)^{i+1}\right]}{(\quad)\,(\quad)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{k-1}(\xi - z)^{k-1-i}\left((\xi - z_0)^{i+1} - (\xi - z)^{i+1}\right)}{(\quad)\,(\quad)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{k-1}(\xi - z)^{k-1-i}\,(z - z_0)\,P_i(\xi, z, z_0)}{(\quad)\,(\quad)} =$$

$$= (z - z_0)\,\frac{P_{k-1}(\xi, z, z_0)}{(\xi - z)^{k}(\xi - z_0)^{k+1}}$$



$$|*| \le |z - z_0| \cdot \frac{C \cdot R^{k-1}}{r^{k}\, r^{k+1}}$$

$$\left|\int_\gamma h(\xi)(*)\,d\xi\right| \le \max_{\xi \in \gamma}|h(\xi)| \cdot |z - z_0| \cdot K \cdot \mathrm{length}(\gamma)$$

$$\xrightarrow[z \to z_0]{} 0$$

$|\xi - z_0| \ge r, \ |\xi - z| \ge r$

2. אם $f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ ($\mathcal{U}$ תח' פתוח) מקיימת את משוואות C-R בכל נק' ב- $\mathcal{U}$ + f הינה $C^1(\mathcal{U})$ אז f הולו'.

(צ"ל u, v הן C^1 ב-$\mathcal{U}$)

$$f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

משוואות C-R:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

תהי $z_0 \in \mathcal{U}$

הוכחה. לפי נוסחת Taylor ממעלה 2 נותן

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \overline{(z-z_0)}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \underbrace{o(|z-z_0|)}_{R}$$

אם f מקיימת משוואות C-R נקבל

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\cdot a + o(|z-z_0|)$$

$$\boxed{\frac{R(z)}{z-z_0} \xrightarrow[z\to z_0]{} 0}$$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = a + \frac{o(|z-z_0|)}{z-z_0} \xrightarrow[z\to z_0]{} a \Leftarrow \quad \left(a = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

המשפט נכון אבל לא טריויאלי במקרה שנתון רק ש-f הוא C^1.

3. האינטגרל לא תלוי בפרמטריזציה.

תהי $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ מסילה גזירה ברציפות! h פונקציה רציפה על תמונת γ.

תהי $\sigma:[a',b']\longrightarrow[a,b]$ פונקציה גזירה ועולה ממש כך ש- $\sigma(b')=b$, $\sigma(a')=a$.

נגדיר $\delta:[a',b']\longrightarrow\mathbb{C}$, $\delta(s)=\gamma(\sigma(s))$.

אזי $\int_\gamma h(z)dz=\int_\delta h(z)dz$

<u>הוכחה.</u> $\int_\gamma h(z)dz = \int_a^b h(\gamma(t))\gamma'(t)dt =$

$$= \int_{a'}^{b'} h(\gamma(\sigma(s)))\cdot\gamma'(\sigma(s))\sigma'(s)ds =$$

החלפת משתנים
$t=\sigma(s)$
$dt=\sigma'(s)ds$

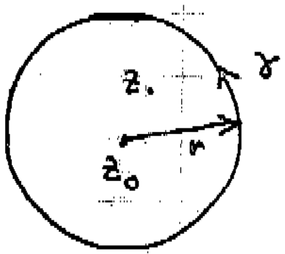
$$= \int_{a'}^{b'} h(\delta(s))\delta'(s)ds = \int_\delta h(z)dz$$

▨

---

4. במהלך הוכחת הנוסחה האינטגרלית של Cauchy

קיבלנו את האינטגרל $\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z}$



$\gamma(t)=z_0+re^{it}$, $0\le t\le 2\pi$

נשתמש בפרמטריזציה אחרת של γ: $\gamma(s)=z+\rho(s)e^{i\theta(s)}$

$\rho:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, $\theta:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, $\theta(0)=0$, $\theta(1)=2\pi$

$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} = \int_0^1 - - - - = - - - - -.$

$\gamma'(s)=\rho'(s)e^{i\theta(s)}+\rho(s)e^{i\theta(s)}i\theta'(s)$