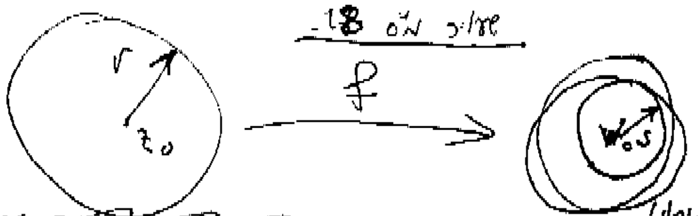
דוגמא בסיסית: $f(z)=z^m$, $z_0=0$

שורש מס' m.



<u>הוכחה למשפט הבסיסי המוסכמת.</u> נסמן ~~$\mathcal{U}\setminus\{z_0\}$~~ f יש לכל הגבולות שלה

ב- $\mathcal{U}$ (כי z_0 מקבל בריבוי m) לכן הנ"ק $\{z\in\mathcal{U}: f(z)=w_0\}$

$\{z\in\mathcal{U}: f'(z)=0\}$ מבודדות ב- D.

נבחר $r>0$ מספיק קטן כך ש: $\forall z\in\overline{D}^*_{z_0}(r)$ מתקיים $f(z)\neq w_0$ | $f'(z)\neq 0$

$D_{z_0}(r)\subset\mathcal{U}$

הפונק' $z\longmapsto|f(z)-w_0|$ רציפה ולכן על הקומפקט $\partial D_{z_0}(r)$ מקבלת מינ', סימנו מינ' זה ב- s. ברור גם ש- $0<s$

כי $f\neq w_0$ על $\overline{D}^*_{z_0}(r)$.

ברור גם ש- $G=f^{-1}(D_{w_0}(s))$ הוא פתוחה.

ולכל $w\in D_{w_0}(s)$ נפעיל את משפט Rouché עם

הפונק' $g(z)=f(z)-w_0$; $h(z)=f(z)-w$

$:\gamma=\partial D_{z_0}(r)$

$$|g(z)-h(z)|=|f(z)-w_0-f(z)+w|=$$
$$=|w-w_0|<s\leq|g(z)|$$

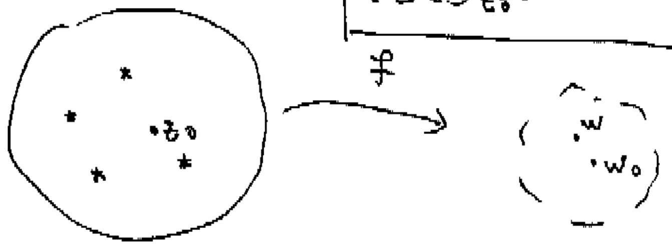
$\forall z\in\gamma=\partial D_{z_0}(r)$.

לפי משפט Rouché ל- h ול- g יש אותו מס' אפסים כשהם סופרים כולל ריבויים: $Z_g=Z_h$. אבל $Z_g=m$ $\Rightarrow$ $Z_h=m$.

כמו כן ברור שלכל $w\neq w_0$ האפסים של h הם ב- $D^*_{z_0}(r)$.

נראה שכל האפסים הללו פשוטים. לכן זה ברור כי ~~...~~

$h'(z)=f'(z)\neq 0$ $\forall$ $z\in D^*_{z_0}(r)$.



$E_w=f^{-1}\{w\}=\{z\in D_{z_0}(r): f(z)=w\}$

יש בה בדיוק m נק' שונות.

$\subset D_{z_0}(r)$

נוכיח כעת ש- G קשירה. ובכן נניח $V \subset G$ רכיב קשירות של G

ונראה ש- $z_0 \in V$. ~~...~~ מזה ינבע שכל רכיב קשירות של G מכיל

את z_0 $\Leftarrow$ G קשירה.

ובכן אם $z_0 \notin V$: נגדיר $k(z) = \frac{f(z)-w_0}{s}$.

בבירור ש- k הולומ' ב- V ורציפה ב- $\bar{V}$.

כמו כן מותר! $z_0 \notin V$ ולכן k ~~...~~ לא מתאפסת ב- V.

כמו כן ~~...~~ $|k(z)|<1 \;\forall z \in V \Rightarrow |k(z)| \le 1 \;\forall z \in \bar{V}$.

<u>טענה.</u> $\forall z \in \bar{V}$ מתקיים $|k(z)|=1$.

<u>הוכחה</u> אם עבור $z' \in \bar{V}$ מסוים $|k(z')|<1$ אז

מאחר ועל המעגל $\partial D_{z_0}(r)$ ש בגלל $|k(z')| \ge 1$

(לפי בחירת s)

נקבל ש- $z' \in D_{z_0}(r)$.

אבל אז יש סביבה קטנה של z' (הנמצאת $D_{z'}(\varepsilon)$) מוכלת ב- $D_{z_0}(r)$ כך ש $\forall z$ בסביבה זו $|k(z)|<1 \Rightarrow D_{z'}(\varepsilon) \subset G$

$\Leftarrow$ $V \cup D_{z'}(\varepsilon) \subset G$. סתירה לכך ש V רכיב קשירות.

Θ נתבונן כעת בפונק' $\frac{1}{k} : \bar{V} \to \mathbb{C}$ ~~...~~

זו פונק' הולומ' ב- V ורציפה ב- $\bar{V}$.

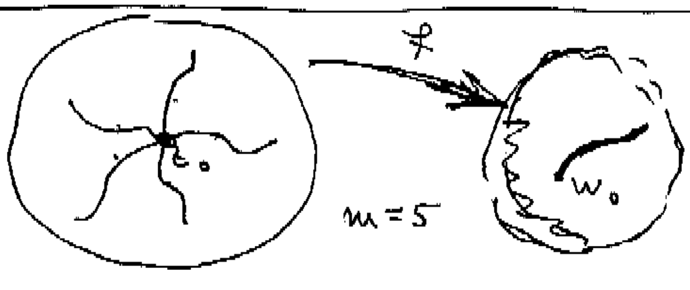
ומתקיים ש- $\frac{1}{|k(z)|} \ge 1 \;\forall z \in \bar{V}$! $\forall z \in \bar{V} \;\frac{1}{|k(z)|}=1$

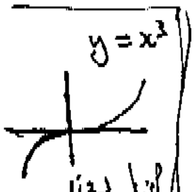
לפי עיקרון המקס. $\frac{1}{k}$ קבוע ב- V $\Leftarrow$ k קבועה ב- V

$\Leftarrow$ f קבועה ב- V סתירה.

$\blacksquare$

מקור השם Branched covering:





שיל נגזרת מתאפסת אך חח"ע בממשיים

משפט. אם f הולו' וחח"ע ב- D תחום אזי $f'(z)\neq 0$ $\forall z\in D$.

הוכחה. נניח ש $f'(z_0)=0$ עבור $z_0\in D$

נסמן $w_0=f(z_0)$. f לא קבועה $\Leftarrow$ f מקבלת את הערך w_0 בריבוי ≥ 2 $(f'(z_0)=0)$, בנק' z_0.

לפי משפט ההעתקה הפתוחה $\forall w\neq w_0$ מספיק קרוב - יש לפחות 2 מקורות בסביבות הפוכות ב- D. סתירה לחח"ע.

$f(z)=e^z$

$f'\neq 0$ $\forall z\in \mathbb{C}$

אבל f לא חח"ע

משפט. אם f הולו' ונניח $f'(z_0)\neq 0$ עבור $z_0\in D$ מסוים.

אזי $\exists$ סביבה של z_0 ב- D שבה f חח"ע.

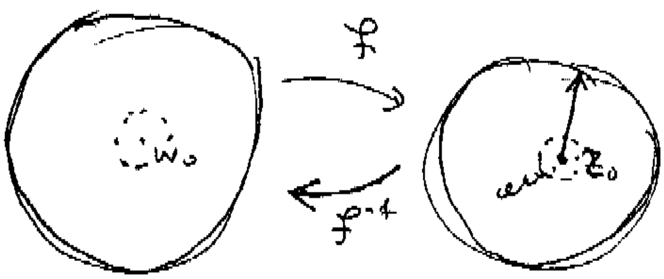
הוכחה. הערך $w_0=f(z_0)$ מתקבל בריבוי 1. $\Leftarrow$ בסביבה מספיק קטנה של z_0 f חח"ע לפי משפט הכיסוי המסופל.

משפט ההעתקה ההפוכה. אהי $f:D\to\mathbb{C}$ פונק' הולו' חח"ע בתחום D.

אזי $f^{-1}:f(D)\longrightarrow D$ (תחום) גם כן הולו'.

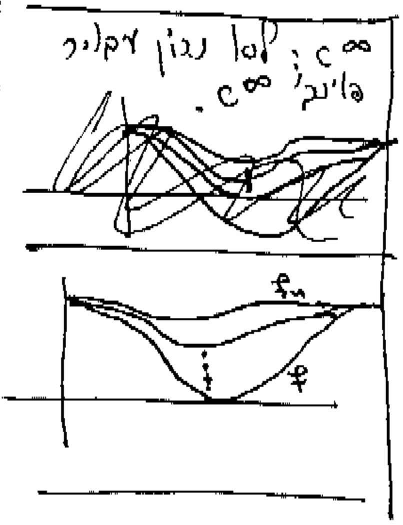
הוכחה. מספיק להראות ש- f^{-1} רציפה. כי $0\neq f'$ בגלל חח"ע.

אבל זה נובע ממשפט ההעתקה הפתוחה + משפט הכיסוי המסופל.



יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום

משפט Hurwitz. תהי $f_n: D\to\mathbb{C}$ סדרה של פונק' הולו' שאינן מתאפסות ב- D.
נניח ש- $f_n\to f$ במ"ש loc ב- D.
אזי או ש- f אינה מתאפסת ב- D או ש- $f\equiv 0$ ב- D.



הוכחה. נניח ש- $f(z_0)=0$ עבור $z_0\in D$.
אם $f\not\equiv 0$ אז z_0 אפס מבודד של f.
$\Rightarrow \exists\, r>0$ כך ש- $f(z)\neq 0 \quad \forall z\in\partial D_{z_0}(r)$
! $D_{z_0}(r)\subset D$!

נסמן $K=\min\limits_{z\in\partial D_{z_0}(r)}|f(z)|$ ברור ש- $K>0$.

$\partial D_{z_0}(r)\subset D$ קומפקטי $\Rightarrow \exists\, N>0$ כך
ש- $\forall n\geq N \quad |f_n(z)-f(z)|<K$.
! $\forall z\in\partial D_{z_0}(r)$!

נבחר $n_0>N \Rightarrow \forall z\in\partial D_{z_0}(r)$: $\quad |f_{n_0}(z)-f(z)|<K\leq|f(z)|$

לפי משפט Rouché $\quad 0=Z_{f_{n_0}} = Z_f > 0 \quad$ ב- $D_{z_0}(r)$.

סתירה. ■