השלמה לשעור מ"ס 7.

בחירה רציפה של ארגומנט למסילה:

טע. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ מסילה רציפה. אזי $\exists$ פונק' רציפה

אזי $\exists$ בחירה רציפה של ארגומנט למסילה γ, כלו' $\Theta:[a,b]\to\mathbb{R}$ המקיימת $\theta(t)\in\arg(\gamma(t))$ $\forall$ $a\le t\le b$.

נוסף על כן, אם θ_1 בחירה אחרת כנ"ל אזי $\exists$ $k\in\mathbb{Z}$ כך ש- $\theta_1(t)=\theta(t)+2\pi k$ $\forall$ $t\in[a,b]$.

למה. תהי $\ell\subset\mathbb{C}$ קרן היוצאת מ- 0. ויהי $z_0\in\mathbb{C}\setminus\ell$! $\theta_0\in\arg(z_0)$. אזי $\exists$ פונק' רציפה $\alpha:\mathbb{C}\setminus\ell\to\mathbb{R}$ המקיימת:

1. $\alpha(z)\in\arg(z)$ $\forall$ $z\in\mathbb{C}\setminus\ell$
2. $\alpha(z_0)=\theta_0$.

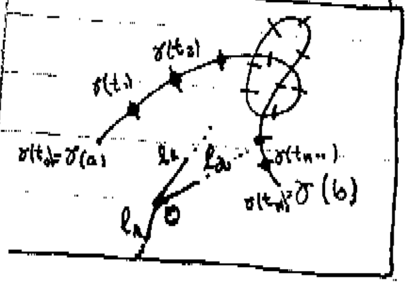
הוכחת הלמה בשיעור הבא.

הוכחת המשפט. נחלק את הקטע $[a,b]$ ל- n קטעים שווים (באורך $=\frac{b-a}{n}$: $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$).

מנומק ! $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ רציפה $\Rightarrow$ רציפה במ"ש על $[a,b]$

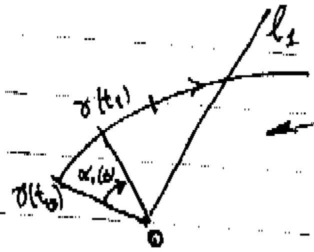
$\Rightarrow$ עבור n מספיק גדול מתקיים ש $\forall$ i $\exists$ קרן $\ell_i\subset\mathbb{C}$ היוצאת מ- 0 כך ש- $\gamma([t_{i-1},t_i])\subset\mathbb{C}\setminus\ell_i$.

תרגיל.



נבחר שרירותית $\theta_0\in\arg(\gamma(a))$ ($=\gamma(t_0)$)

לפי הלמה $\exists$ פונק' רציפה $\alpha_1:\mathbb{C}\setminus\ell_1\to\mathbb{R}$ כך ש- $\alpha_1(\gamma(t_0))=\theta_0$! $\alpha_1(z)\in\arg(z)$ $\forall$ $z\in\mathbb{C}\setminus\ell_1$



נגדיר כעת $\theta_1:=\alpha_1(\gamma(t_1))$.

לפי הלמה $\exists$ $\alpha_2:\mathbb{C}\setminus\ell_2\to\mathbb{R}$ כך ש- $\alpha_2(\gamma(t_1))=\theta_1$! $\alpha_2(z)\in\arg(z)$ $\forall$ $z\in\mathbb{C}\setminus\ell_2$.

נמשיך כך / נבנה $\alpha_i:\mathbb{C}\setminus\ell_i\to\mathbb{R}$ עם $\alpha_i(\gamma(t_{i-1}))=\alpha_{i-1}(\gamma(t_{i-1}))$, $\forall$ $1\le i\le n$.

כעת נגדיר

$$\Theta(t)=\begin{cases}\alpha_1(t) & a=t_0\le t\le t_1\\ \alpha_2(t) & t_1\le t\le t_2\\ \vdots & \vdots\\ \alpha_i(t) & t_{i-1}\le t\le t_i\\ \vdots & \vdots\\ \alpha_n(t) & t_{n-1}\le t\le t_n=b\end{cases}$$

ברור ש- Θ רציפה ומקיימת את הנדרש.

1

נניח ש- θ_1 בחירה אחרת. נסמן $\mathbb{Z} \ni k := \frac{\theta_1(a)-\theta(a)}{2\pi}$.

הפונק' $t \mapsto \frac{\theta_1(t)-\theta(t)}{2\pi}$ רציפה.

מצד שני פונק' זו מקבלת רק ערכים שלמים, לכן בהיותה רציפה

היא קבועה. $\Leftarrow$ $k = \frac{\theta_1(a)-\theta(a)}{2\pi} = \frac{\theta_1(t)-\theta(t)}{2\pi}$

■

הגדרה: האינדקס (1.0) תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}_0$ רציפה לסגורה ($\gamma(a)=\gamma(b)$).

נגדיר $I^0_\gamma := \frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. θ העתקה רציפה (בחירה של ארגומנט לאורך γ)

הערה: I^0_γ לא תלוי בבחירת θ (הוכחה 1.3).

ב) תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$! $z\notin \mathrm{Image}\,\gamma$. נסמן $\gamma_z(t) := \gamma(t)-z$

בהכרח: $\gamma_z:[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

נגדיר: $I_\gamma(z) := I^0_{\gamma_z}$.

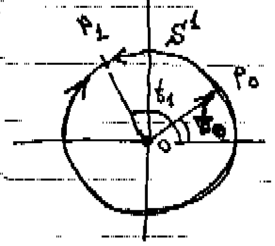
הוכחת הלמה (מהשאלה הקודמת) נסמן $S^1=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$.

טענת העזר: $p_1,p_0\in S^1$, $p_1\ne p_0$ ותהי $\theta_0\in\arg(p_0)$.

אזי $\exists$ פונק' רציפה $\beta: S^1\setminus\{p_1\}\to\mathbb{R}$ המקיימת:

1) $\beta(p)\in\arg(p)$ $\forall$ $p\in S^1\setminus p_1$

2) $\beta(p_0)=\theta_0$.



הוכחת הטענה: כל $p\in S^1$ יש לו ייצוג יחיד

בתור $p=\cos t+i\sin t$, $0\le t<2\pi$. נסמן ב- t_0 את ה-t המתאים ל-p_0. מכאן ש- $\theta_0=t_0+2\pi k_0$. וב- t_1 את ה-t של p_1.

נגדיר
$$\beta(\cos t+i\sin t) := \begin{cases} t+2\pi k_0 & 0\le t<t_1 \\ t+2\pi k_0-2\pi & 2\pi>t>t_1\end{cases}$$
מתקיים β רציפה ב- $S^1\setminus p_1$.

2

המשך הוכחת הלמה: נגדיר $\alpha(z) := \beta\left(\frac{z}{|z|}\right)$ ■

משפט. אם $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ עקומה סגורה וחלקה למקוטעין אזי $\forall z\in\mathbb{C}\setminus \mathrm{Image}\,\gamma$ מתקיים

$$I_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi-z}.$$

הוכחה. תהי $\theta:[a,b]\to\mathbb{R}$ בחירה רציפה של ארגומנט לעוקם $\gamma_z(t)=\gamma(t)-z$.

תרגיל הראה, שאם γ חלקה למקוטעין אז גם θ גזירה למקוטעין וכך גם הפונקציה $r(t):=|\gamma(t)-z|$.

כעת:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\xi}{\xi-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\dot\gamma(t)\,dt}{\gamma(t)-z}=$$

כאשר: $\left(\gamma(t)=z+r(t)e^{i\theta(t)}\right)$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\dot r(t)e^{i\theta(t)}+i r(t)\dot\theta(t)e^{i\theta(t)}}{r(t)e^{i\theta(t)}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\underbrace{\int_a^b\frac{\dot r(t)}{r(t)}\,dt}_{=0}+i\int_a^b\dot\theta(t)\,dt\right]=\frac{1}{2\pi i}\,i\left(\theta(b)-\theta(a)\right)=$$

$$=\frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}=I_\gamma(z).$$

■

דוגמא. $\gamma(t)=z+e^{it}$ $\quad 0\le t\le 2\pi n$ $\quad$ n סיבובים.

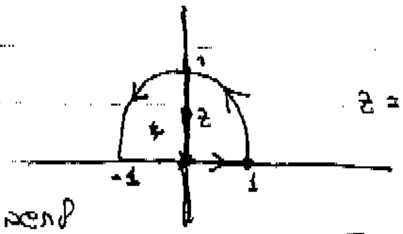
$$I_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi n}\frac{ie^{it}\,dt}{z+e^{it}-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi n} i\,dt=n$$

בחירה של ארגומנט: $\theta(t)=t$.

תרגיל. $I_\gamma(z)$ לא תלוי בפרמטריזציה של γ, אך כן באוריינטציה.

תרגיל.[3] $\gamma:[0,3]\to\mathbb{C}$, $z=i/2$.

$$\gamma(t)=\begin{cases}e^{i\pi t} & 0\le t\le 1\\ t-2 & 1\le t\le 3\end{cases}$$



$z=i/2$

חשב $I_\gamma(z)$. תשובה: $I_\gamma(z)=1$.