שעור מס' 6.

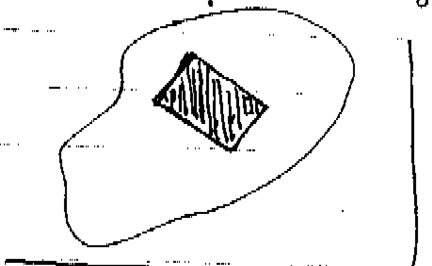
הגרסא הלוקאלית של משפט Cauchy.

משפט. יהי $D \subset \mathbb{C}$ דיסק פתוח ותהי f רציפה והולו' ב- D.
אז לכל מסילה סגורה ורגולרית למקוטעין γ ב- D מתקיים

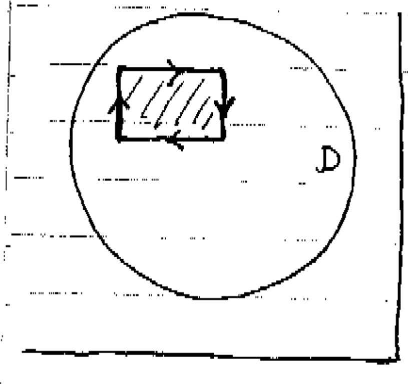
$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

למשפט גרסה קצת יותר:
משפט': מסקנת המשפט הקודם תקפה אם מניחים ש- f רציפה ב- D והולו' ב- $D\setminus\{z_0\}$ כאשר z_0 נק' כלשהי ב- D.

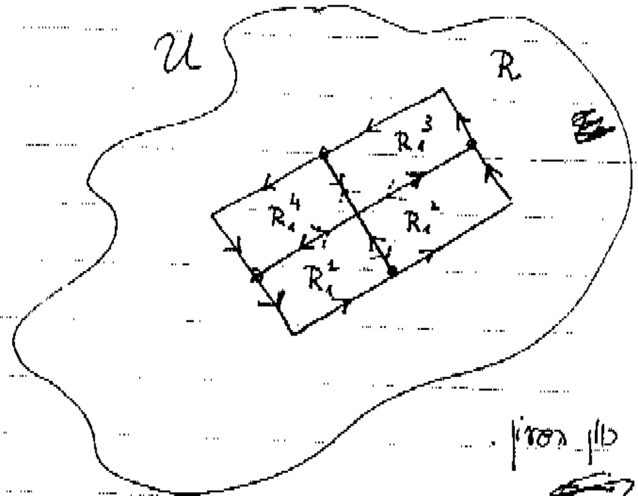
בשביל ההוכחה אנו זקוקים לכמה למות.
למה 1. תהי $U \subset \mathbb{C}$ קב' פתוחה ! $z_0 \in U$. אם f רציפה ב- U והולו' ב- $U\setminus\{z_0\}$ אזי $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ לכל מלבן סגור $R \subset U$.



למה 2. יהי $D \subset \mathbb{C}$ דיסק פתוח ! f פונק' רציפה לכל D המקיימת $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$ $\forall$ מלבן סגור ב- D שצלעותיו מקבילות לצירים (x-ים ! y-ים).
אזי ל- f יש פונק' קדומה ב- D. בפרט $\int_\gamma f(z)dz = 0$ לכל מסילה סגורה ורגולרית למקוטעין ב- D.



ברור ש למה 1 + למה 2 $\Longleftarrow$ משפט' Cauchy.



הוכחת למה 1. נניח קודם ש-f הולו' בכל U.

נסמן $I=\int_{\partial R} f(z)dz$ ...

צ"ל $I=0$.

נחלק את R ל-4 מלבנים חופפים.

ונסמן $I_1^j=\int_{\partial R_1^j} f(z)dz$

$j=1,2,3,4$

כאשר הפרמטריזציה של כל מלבן היא נגד כיוון השעון.

מתקיים ש- $I=I_1^1+I_1^2+I_1^3+I_1^4$

משום שכל צלע פנימית נעברת פעמיים בשתי פרמטריזציות הפוכות, ולכן האינטגרלים עליהן מתבטלים (נשאר רק השפה) ומצטמצמים.

כמו כן $|I|\le|I_1^1|+|I_1^2|+|I_1^3|+|I_1^4|$

לכן $\exists j$ כך ש- $|I_1^j|\ge\frac{|I|}{4}$

כלו' יש מלבן $R_1\subset R$ שממדיו הם חצי מאלה של R והמקיים

$$\left|\int_{\partial R_1^j} f(z)dz\right|\ge\frac14\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right|$$

נפעיל את השיקול הנ"ל, הפעם למלבן R_1^j ונקבל מלבן חדש $R_2\subset R_1$ שצלעותיו $\frac12$ מאלה של R_1 והמקיים

$$\left|\int_{\partial R_2} f(z)dz\right|\ge\frac14\left|\int_{\partial R_1} f(z)dz\right|\ge\frac{1}{4^2}\int_{\partial R_1} f(z)dz$$

נמשיך כך, ונקבל סדרה של מלבנים סגורים $R_1\supset R_2\supset R_3\supset\dots$

ב-U המקיימים $\left|\int_{\partial R_n} f(z)dz\right|\ge\frac14\left|\int_{\partial R_{n-1}} f(z)dz\right|\ge\dots\ge\frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right|$

נסמן ב-d (d_n) את אורך האלכסון של R (R_n)

וב-L (L_n) את ההיקף של R (R_n).

ברור ש- $d_n=\frac{d}{2^n}$, $L_n=\frac{L}{2^n}$

לפי משפט Cantor (R_n קומפקטיים $\forall n$), $\exists$ $\bigcap_{n=1}^{\infty}R_n\neq\phi$.

תהי $z_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}R_n$. ברור ש- $z_0\in U$.

אם f גזירה ב- z_0 אז $f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+E(z)$ כאשר $E:U\to\mathbb{C}$ מקיימת $\lim_{z\to z_0}\left|\frac{E(z)}{z-z_0}\right|=0$. (בפרט $E(z_0)=0$ ו- E רציפה).

אז לכל מסילה סגורה חלקה למקוטעין γ

$$\int_\gamma f(z)dz = f(z_0)\int_\gamma \underbrace{1}_{\exists\ \text{פונק' קדומה}}dz + f'(z_0)\int_\gamma \underbrace{(z-z_0)}_{\exists\ \text{פונק' קדומה}}dz + \int_\gamma E(z)dz = \int_\gamma E(z)dz$$

בפרט

$$\int_{\partial R_n} f(z)dz = \int_{\partial R_n} E(z)dz$$

יהי $\varepsilon>0$. נקח $\delta>0$ קטן מספיק כך ש- $|E(z)|\le\varepsilon|z-z_0|$ $\forall z\in D(z_0,\delta)$.

$d_n\to 0 \Leftarrow \exists\ n$ כך ש- $d_n<\delta$ אז $\forall z\in R_n$ מתקיים $|z-z_0|<\delta$ כי $R_n\subset D(z_0,\delta)$.

לכן

$$\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| \le 4^n\left|\int_{\partial R_n} f(z)dz\right| = 4^n\left|\int_{\partial R_n} E(z)dz\right| \le \quad (*)$$

$$\sup_{z\in\partial R_n}|E(z)| \le \varepsilon\cdot\sup_{z\in\partial R_n}|z-z_0| \le \varepsilon\cdot d_n$$

אז

$$(*) \le 4^n\cdot\varepsilon\cdot d_n\cdot \text{length}(\partial R_n) = 4^n\varepsilon\cdot d_n\cdot L_n = \varepsilon\cdot d\cdot L$$

כלו' $\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right|\le\varepsilon\cdot d\cdot L$. וזה נכון $\forall\ \varepsilon>0$.

$\Leftarrow \int_{\partial R} f(z)dz=0$.

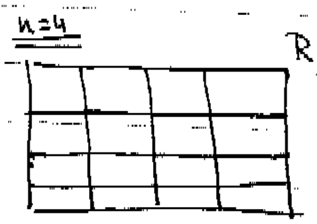
(למה הפונקציה ? לא כמו ש- $f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+O(|z-z_0|)$ + לא פשוט $z-z_0$ קדומה)
כי, הפונקציה האינטגרבילית!

נוכיח כעת את הלמה בלי להניח ש- f גזירה ב- z_0. נניח רק f רציפה ב- $\mathcal{U}$ והולו' ב- $\mathcal{U}-\{z_0\}$.

יהי $R\subset\mathcal{U}$ מלבן סגור. אם $z_0\notin R$ אז כפי שהוכחנו $\int_{\partial R}f(z)dz=0$

לכן נניח ש- $z_0\in R$.

יהי $n\in\mathbb{N}$. נחלק את R ל- n^2 מלבנים חופפים R_{kl}.



אזי: $\int_{\partial R}f(z)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\int_{\partial R_{kl}}f(z)dz$

אם $R_{kl}\not\ni z_0$ אז $\int_{\partial R_{kl}}f(z)dz=0$

ואם $R_{kl}\ni z_0$ אז

$$\left|\int_{\partial R_{kl}}f(z)dz\right|\leq\max_R|f|\cdot\left(\text{היקף } R_{kl}\right)=\max_R|f|\cdot\frac{L}{n}$$

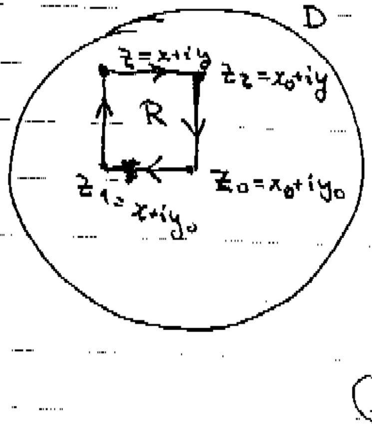
קיים כי R קומפקטי ו- f רציפה!

אבל z_0 שייכת לכל היותר ל- 4 מרובעים R_{kl}. לכן

$$\left|\int_{\partial R}f(z)dz\right|\leq 4\cdot\max_R|f|\cdot\frac{L}{n}$$

■

ניקח $n\to\infty$ ונקבל $\int_{\partial R}f(z)dz=0$



הוכחת למה 2. יהי $z_0=x_0+iy_0$ מרכז הדיסק D.
ויהי $z=x+iy$ נק. כלשהי ב- D.
ניקח $z_1=x+iy_0$, $z_2=x_0+iy$

$$\int_{[z_0,z_1]}f(\xi)d\xi+\int_{[z_1,z]}f(\xi)d\xi+\int_{[z,z_2]}f(\xi)d\xi+\int_{[z_2,z_0]}f(\xi)d\xi=$$

$$(*)\qquad=\pm\int_{\partial R}f(\xi)d\xi=0$$

לפי הלמה.

נגדיר גלובלי' $F: D \to \mathbb{C}$ ע"י $F(z)=\int_{[z_0,z_2]} f(\xi)d\xi+\int_{[z_2,z]} f(\xi)d\xi$

אזי (*) $F(z)=\int_{[z_0,z_1]} f(\xi)d\xi+\int_{[z_1,z]} f(\xi)d\xi=$

$$=\int_{x_0}^{x} f(t+iy_0)\,dt+i\int_{y_0}^{y} f(x+it)\,dt \qquad (1)$$

$\gamma(t)=t+iy_0$, $x_0\le t\le x$; $\gamma(t)=x+it$, $y_0\le t\le y$

$$=\int_{x_0}^{x} f(t+iy_0)\,dt+i\int_{y_0}^{y} f(x_0+it)\,dt \qquad (2)$$

מ- (2) נקבל ש- $\forall\ z\in D$: $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_z=f(z)$

בדומה מ- (1) נקבל ש- $\forall\ z\in D$: $\frac{\partial F}{\partial y}=i f(z)$. $\boxed{\text{ולכן } F_x=-iF_y \text{ ב- } D}$

$\Leftarrow$ F מקיימת משוואות C-R ב- D.

כמו כן F הינו C^1 כי f פונק' רציפה.

לפי משפט קודם, F הולו' ב- D ומתקיים $F'(z)=f(z)$ $\forall\ z\in D$. ■

הוכחת משפט Cauchy: למה 1 + למה 2 $\Leftarrow$ משפט Cauchy

~~משפט Cauchy הומוטופי, גרסה מקומית.~~ $\gamma=$ ◯

~~יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום ויהיו $\gamma,\gamma':[a,b]\to D$ מסילות סגורות.~~

~~נאמר ש- γ ו γ' הומוטופיות אם $\exists$ $\lambda:[a,b]\times[0,1]\to D$ רציפה~~

~~כך ש- $\lambda|_{[a,b]\times\{0\}}=\gamma$, $\lambda|_{[a,b]\times\{1\}}=\gamma'$~~

~~ו $\forall\ 0\le t\le 1$ $\lambda|_{[a,b]\times t}$ מסילה סגורה.~~