## שיעור מס' 4+3

הגדרה. תהי $f: A\to\mathbb{C}$ ו- $z_0$ נק' פנימית של $A$.
נאמר ש- $f$ גזירה ב- $z_0$ (במובן המרוכב) אם הגבול $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$
קיים ב- $\mathbb{C}$ (כלומר לא $\infty$). את הגבול (אם קיים) נסמן $f'(z_0)$

הערה. אם $f$ גזירה ב- $z_0$ אז $f$ רציפה ב- $z_0$. $\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\left(f(z_0)+(z-z_0)\cdot\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right)\overset{\text{הוכחה}}{=}f(z_0)$

כל כללי הגזירה של פונק' ממשיות נכונים במובן המרוכב הם כמו במקרה הממשי הרגיל:

טענה. אם $f,g:A\to\mathbb{C}$ גזירות ב- $z_0\in A$ אז גם $f\pm g$, $f\cdot g$ ו- $c\cdot f$ $(c\in\mathbb{C})$ גזירות ב- $z_0$ ומתקיים:

1) $(cf)'(z_0)=cf'(z_0)$ 2) $(f\pm g)'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0)$

3) $(f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$ 4) אם $g(z_0)\neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ גזירה ב- $z_0$ ומתקיים: $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$.

דוגמאות. 1) $f(z)=z^n$. $f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\left(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\dots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1}\right)=$

$= n\cdot z_0^{n-1}$

2) $f(z)=\sqrt{z}$ גזירה $\forall z_0\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, ומתקיים $f'(z_0)=\frac{1}{2\sqrt{z_0}}$.

ב- $(-\infty,0]$ הפונקציה אפילו לא רציפה.

כי $f(z)=\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\cdot e^{i\operatorname{Arg}(z)/2}$ אז $\lim_{h\to 0^+} f(z_0-ih)=-\sqrt{z_0}$

ו- $f(z_0)=\sqrt{z_0}$

מכאן, $f$ לא גזירה שם.

3) $f(z)=\bar{z}$ אינה גזירה (במובן המרוכב) בשום נקודה.

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}\ \nexists$$

למשל: ניקח $z_n=z_0+\frac{1}{n}$ ונקבל

$$\frac{\overline{z_n-z_0}}{z_n-z_0}=1\to 1$$

וניקח $z'_n=z_0+\frac{i}{n}$ ונקבל

$$\frac{\overline{z'_n-z_0}}{z'_n-z_0}=-1\to -1$$

כלל השרשרת: $f:A\to\mathbb{C}$, $g:B\to\mathbb{C}$ ונניח ש- $f(A)\subset B$.
אם $f$ גזירה ב- $z_0\in A$ ו- $g$ גזירה ב- $w_0=f(z_0)\in B$
אז $g\circ f:A\to\mathbb{C}$ גזירה ב- $z_0$ ומתקיים $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$.

משפט: ~~[illegible]~~

נגזרת של פונק' הפוכה. תהי $D$ סביבה של $z_0$ ו- $f:D\to\mathbb{C}$ פונק' שמעתיקה את $D$ באופן חח"ע על סביבה, $D_1$, של $f(z_0)$.
אזי ל- $f$ יש פונק' הפוכה $g:D_1\to D$. נניח ש- $f$ גזירה ב- $z_0$
וש- $f'(z_0)\neq 0$. אם $g$ רציפה ב- ~~[illegible]~~ $w_0=f(z_0)$ אזי
$g$ גזירה ב- $w_0$ ומתקיים $g'(w_0)=\dfrac{1}{f'(z_0)}$.

הוכחה. תהי $w_n\to w_0$ סדרה ב- $D_1$
[illegible] ל- $w_0$, ונניח ש- $w_n\neq w_0$ $\forall n$:
נסמן $z_n:=g(w_n)\in D$ $(\Leftarrow w_n=f(z_n))$
מרציפות $g$ נקבל
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lim g(w_n)=g(w_0)=z_0$

$$\frac{g(w_n)-g(w_0)}{w_n-w_0}=\frac{z_n-z_0}{f(z_n)-f(z_0)}=\frac{1}{\frac{f(w_n)-f(w_0)}{z_n-z_0}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{f'(z_0)}.$$

$z_n\neq z_0$ $\forall n$ כי $w_n\neq w_0$ $\forall n$ ו- $g$ חח"ע.

---

הגדרה. תהי $U\subset\mathbb{C}$ קב' פתוחה. $f:U\to\mathbb{C}$ נקראת הולומורפית (holomorphic)
או אנליטית (analytic) ב- $U$ אם $f$ גזירה (במובן המרוכב) בכל נק' ב- $U$.

משוואות Cauchy-Riemann.

תהי $f$ פונק' שגזירה בנק' $z_0$. ~~[illegible]~~
נסמן $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.
$f$ גזירה ב- $z_0$ לכן בפרט:

$$f'(z_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x+iy_0)-f(x_0+iy_0)}{(x+iy_0)-(x_0+iy_0)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x+iy_0)-f(x_0+iy_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)+iv(x,y_0)-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0} + i\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \left(= \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

מיד נחשב

$$f'(z_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0,y)+iv(x_0,y) - \left(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\right)}{\underbrace{x_0+iy-(x_0+iy_0)}_{=i(y-y_0)}} =$$

$$= \dots = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad \left(= -i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

בסה"כ מקבלים

משוואות C-R.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(z_0) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(z_0) \end{cases}$$

<u>מסקנה.</u> 1) תנאי הכרחי לגזירות $f: A\to\mathbb{C}$ בנק' $z_0\in A$ הוא שהפונק' $u=\operatorname{Re} f$ | $v=\operatorname{Im} f$ ! $f=u+iv$
יקיימו את משוואות C-R בנק' $z_0$.

ב) אם $f: U\to\mathbb{C}$ הולו' ב-$U$ אז משוואות C-R מתקיימות בכל נק' ב-$U$.

<u>משפט.</u> נניח ש- $f=u+iv$ מוגדרת בקבוצה הפתוחה $U\subset\mathbb{C}$ ושכל הנגזרות החלקיות $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}$ קיימות בכל $U$. תהי $z_0\in U$ ונניח שכל הנגזרות החלקיות הנ"ל רציפות ב-$z_0$ ושמשוואות C-R מתקיימות עבור $u,v$ ב-$z_0$.
אזי $f$ גזירה ב-$z_0$ (ומתקיים $f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=-i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$).

להמציא מה זה $C^1$.

<u>מסקנה.</u> תהי $f=u+iv$ פונק' $C^1$ בקבוצה הפתוחה $U\subset\mathbb{C}$. אזי $f$ הולומורפית $\iff$ $u,v$ מקיימות את משוואות C-R ב-$U$.

$A_{\mathbb{R}} J = J \cdot A_{\mathbb{R}} \iff A_{\mathbb{C}}(iv) = iA(v) \iff$ מרוכבת $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ $\longleftarrow$

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

לינארית מעל $\mathbb{C}$ $Df_{(\mathbb{C})}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ כלו' מרוכבת $Df: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ אם

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_y & -u_x \\ v_y & -v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_x & -v_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix}$$

$\iff$ $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ C-R.

$f: D \to \mathbb{C}$ נקראת גזירה ב- $C^1(D)$ אם $\forall z \in D \iff$ $Df_{(z)}$ היא העתקה לינארית מעל $\mathbb{C}$.

---

נזכיר נוסחת קירוב Taylor בגזירות ממשית: $f = u + iv$

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{z_0}(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{z_0}(y-y_0) + o\left(\sqrt{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2}\right)$$

$$v(x,y) = v(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{z_0}(x-x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{z_0}(y-y_0) + o\left(\sqrt{|x-x_0|^2+|y-y_0|^2}\right).$$

נכפיל ~~...~~ את $v$ ב- $i$ ונחבר:

$$f(z) = f(z_0) + (x-x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{z_0} + (y-y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Big|_{z_0} + o(|z-z_0|) =$$

$$= f(z_0) + \frac{(z-z_0)+\overline{(z-z_0)}}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{\partial f/\partial x}\Big|_{z_0} + i\,\frac{\overline{z-z_0}-(z-z_0)}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\partial f/\partial y}\Big|_{z_0} + o(|z-z_0|)$$

$$\cancel{= f(z_0) + 2(z-z_0)\,\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]}$$

$$= f(z_0) + (z-z_0)\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \overline{(z-z_0)}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + o(|z-z_0|)$$

## מסקנות ממשוואות C-R

משפט 1. תהי $f$ פונק' הולו' בתחום $D$. נניח ש- $f'(z)=0$ $\forall z\in D$. אזי $f$ קבועה ב- $D$.

משפט 2. תהי $f$ פונק' הולו' בתחום $D$. אם אחת מהפונק' $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$ או $|f|$ קבועה ב- $D$ אזי גם $f$ קבועה ב- $D$.

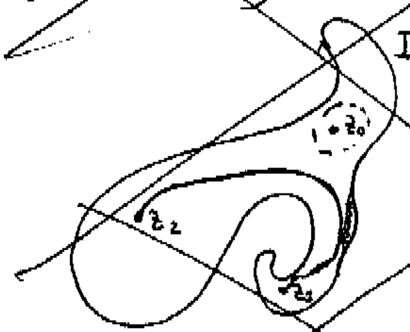
הערה: משפט 1 נכון רק, מפני כי הוא אנלוגי למשפטים ממשיים.
למשפט 2 אין אנלוג ממשי. אפשר לתת פונק' $f:D\to\mathbb{C}$, $f\in C^{\infty}$ עם $\mathrm{Re} f$ קבוע! אבל $f$ לא קבוע! למשל $f(z)=1+ig(z)$ כאשר $g:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ פונק' ממשית חלקה.
עבור פונק' הולו' יש קשרים חזקים מאוד (הרבה יותר ממה!) בין $\mathrm{Re} f$ ל- $\mathrm{Im} f$!

---

בשביל ההוכחה נוכיח קודם למה מ- אינפי:

למה. תהי $u:D\to\mathbb{R}$ פונק' גזירה (במובן הממשי) בתחום ב- $\mathbb{R}$.
אם $\frac{\partial u}{\partial x}(z)=0$ ו- $\frac{\partial u}{\partial y}(z)=0$ $\forall z\in D$ אזי $u$ קבועה ב- $D$.

הוכחה. יהי $z_0\in D$. נבחר סביבה של $z_0$ $D_{z_0}(r)$ שמוכלת ב- $D$ ($D$ הכי פתוח).




נסמן $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$
לפי משפט ערך הביניים (לפונק' עם 2 משתנים)
$\exists$ $\xi,\eta$ ב- $D_{z_0}(r)$ כך ש-
$$u(z)-u(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(\xi)(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(\eta)(y-y_0)=0$$

נראה כעת ש- $u$ קבועה ב- $D$. תהי $z_1,z_2\in D$ כלשהם. מאחר ש- $D$ קשיר (מסילתית) $\exists$
מסילה $\gamma:[0,1]\to D$ עם $\gamma(0)=z_1$, $\gamma(1)=z_2$.

בשביל ההוכחות לקוים לשמור מאיזוני.

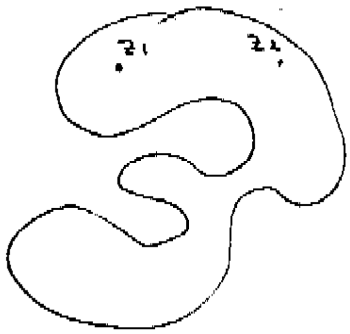
טענה. תהי $u: D \to \mathbb{R}$ פונק' גזירה (ממשית ומרוכבת) בתחום $D \subset \mathbb{C}$, כך ש $\forall z \in D$

מתקיים $\frac{\partial u}{\partial x}(z) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(z)=0$ אזי $u$ קבועה ב- $D$.

הוכחה. ~~צריך~~ $\forall z_1, z_2 \in D$ צריכים להוכיח ש- $u(z_1)=u(z_2)$.

מקרה 1) נניח כרגע ש- $z_1, z_2$ נקודות שהקטע $[z_1, z_2]$ מוכל ב- D.

ונניח תחילה $z_1, z_2 \in D$ כך שמוכלת.



נסמן $\gamma(t) = (1-t)z_1 + t z_2$ הקטע הישר המחבר בין $z_1$ ל $z_2$.

$\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ $= (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, ונגדיר $f(t) = u(\gamma(t))$ $f:[0,1]\to D$.

נראה ש- $f$ גזירה כי $[0,1]$

$$f'(t) = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{\gamma(t)} \gamma_1'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{\gamma(t)} \gamma_2'(t) = 0$$

$\Leftarrow$ $f$ קבועה ב- $[0,1]$ ולכן $u(z_1) = f(0) = f(1) = u(z_2)$.

מקרה 2) תהיינה $z_1, z_2 \in D$ שתי נק' כלשהן. לפי טענה קודמת $\exists$ קו פוליגוני (שבירה) שמחבר ביניהן. כלומר $\exists$ $w_0, \dots, w_n \in D$ כך $w_0 = z_1$, $w_n = z_2$

כך שהקטע $[w_i, w_{i+1}] \subset D$ $\forall i$. לפי שלב 1 מתקיים $u(w_i) = u(w_{i+1})$ $\forall i$.

$\Leftarrow$ $u(z_1) = u(z_2)$.

▨

הוכחת מישפט 1. נכתוב $f(z) = u(z) + i v(z)$. $f$ הולו' $\Leftarrow$ $f'(z) = u_x(z) + i v_x(z) = v_y(z) - i u_y(z)$ $\forall z \in D$

אבל נתון ש $f'(z) = 0$ ונקבל ש- ~~$u_y, u_x(z)=0$~~ $\forall z \in D$: $u_x(z) = u_y(z) = v_x(z) = v_y(z) = 0$.

לפי הלמה $u, v$ קבועות ב- $D$ $\Leftarrow$ גם $f$.

▨

הוכחת מישפט 2. נכתוב $u = \mathrm{Re} f$, $v = \mathrm{Im} f$, $f = u + iv$.

1) נניח ש- $u$ קבועה. ~~משוואות C-R~~ $\Leftarrow$ $u_x = u_y = 0$ ב- $D$.

משוואות C-R נקבל שגם $v_y = u_x = 0$ ב- $D$. לפי הלמה קבוע $v$ $\Leftarrow$ $f$ קבועה.

אם $v$ קבועה, ההוכחה דומה.

3) נניח $|f|$ קבועה אז $\exists$ $c \geq 0$ כך ש- $u^2 + v^2 = c$ ב- $D$.

אם $c = 0$ אז ברור ש- $u = v = 0$, לכן נניח $c > 0$.

נגזור את $u(x,y)^2 + v(x,y)^2 = c$ לפי $x$ ולפי $y$ ונקבל:

$$(*)\begin{cases} 2u \cdot u_x + 2v \cdot v_x = 0 \\ 2u \cdot u_y + 2v \cdot v_y = 0 \end{cases} \text{ ב- } D$$

המשוואות C-R ( $u_x = v_y$ | $u_y = -v_x$ ) ב-(*) ונקבל: $\begin{cases} u u_x - v u_y = 0 \\ u u_y + v u_x = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} u u_x - v u_y = 0 \\ v u_x + u u_y = 0 \end{cases}$$

נכפיל משוואה 1 ב- u ו- 2 ב- v ונחבר. ⇐ $(u^2+v^2)u_x = 0$

⇐ $c \cdot u_x = 0$ אבל $c>0$ ⇐ $u_x = 0$ ב- D.

בדומה, $u_y = 0$ ב- D ולכן לפי הלמה קבוע $u=$ ב- D.

לפי חלק 1) של ההוכחה גם v קבוע ב- D ⇐ f קבועה ב- D. ∎

---

## דוגמאות של פונק' הולו'.

פולינומים $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_i \in \mathbb{C}$.

p הולו' בכל $\mathbb{C}$.

פונק' רציונליות. $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ כאשר $p, q$ פולינומים.

f הולו' בתחום $\{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$.

__הגדרה__ $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ הולו', נאמר ש f פונק' שלמה (entire function)

__דוגמא__ פולינומים. פונק' רציונליות שאינן פולינומים __לא__ שלמות.

הפונקציה $f(z) = e^z$ הגדרה: $z = x+iy$

$$e^z := e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

__טענה__ f שלמה.

__הוכחה.__ $u(x,y) = e^x \cos y$ $\quad v(x,y) = e^x \sin y$.

$u_x = e^x \cos y$, $u_y = -e^x \sin y$, $v_x = e^x \sin y$, $v_y = e^x \cos y$.

לכן, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ ומשוואות C-R מתקיימות.

נחשב גם $f'(z)$: $f'(z) = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$.

4 הפונק' הטריגונומטריות:

נגדיר $\forall\ z\in\mathbb{C}$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

גם $\sin z$, $\cos z$ הינן שלמות (כי $e^{iz}$, $e^{-iz}$ שלמות).

כמו כן, בהצטמצמות ל $z\in\mathbb{R}$ מקבלים את הפונק' הרגילות $\sin$ ו $\cos$.

נחשב לדוגמא:

$$\cos i = \frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2}$$

$$\sin i = \dots = \frac{e^{-1}-e}{2i} = i\,\frac{e^2-1}{2e}$$

נשים לב שלא נכון $\forall\ z\in\mathbb{C}$ . $|\cos z|\le 1$ או $|\sin z|\le 1$

זהויות:

$\cos^2 z+\sin^2 z = 1$ , $\cos(\pi/2 - z) = \sin z$

$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

$\sin(z+w) = \sin z\cos w + \sin w\cos z$ וכו' ...

ניתן גם להגדיר $\tan z$ : $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ (כש- $\cos z\neq 0$).

! $\tan z$ רגולרית בתחום $\{\cos z \neq 0\}$.

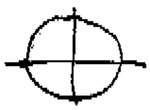
מתי $\cos z = 0$ ? $e^{2iz} = -1$ , $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Leftarrow$ $e^{2r(-\sin\theta + i\cos\theta)} = -1$

$e^{-2r\sin\theta}\cdot e^{i2r\cos\theta} = -1$ $\Leftarrow$ $\sin\theta = 0$ או $r=0$.

כאשר $r\neq 0$ כי $e^0=1$ לכן $\sin\theta = 0$ $\Leftarrow$ $\cos\theta = \pm 1$

כמו כן $e^{2r\cos\theta\cdot i} = -1$ $\Leftarrow$ $2r\cos\theta = \pi + 2\pi k$



$r\cos\theta = \frac{\pi}{2}+\pi k$ | $\sin\theta = 0$ .

$\Leftarrow$ $z = \frac{\pi}{2}+\pi k$ .