שעור מס' 2.

טופולוגיה של $\mathbb{C}$.

<u>סימונים</u>: יהי $z_0 \in \mathbb{C}$, $0<r$.

$D_{z_0}(r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$:

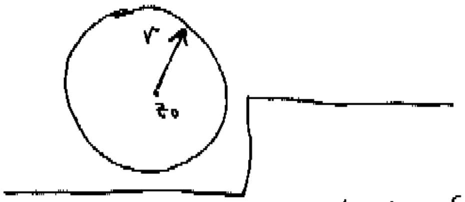
דיסק/כדור פתוח סביב z_0, ברדיוס r.

לפעמים מסמנים גם ב- $B_{z_0}(r)$.

1) דיסק/כדור סגור: $\overline{D_{z_0}(r)} := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \leq r\}$

2) דיסק פתוח, מנוקב $D^*_{z_0}(r) := \{z \in \mathbb{C} : 0<|z-z_0|<r\}$

(punctured disc)



3) מעגל או שפה של הדיסק $\partial D_{z_0}(r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = r\}$

(circle)

4) טבעת $A(r,R) := \{z \in \mathbb{C} : r<|z-z_0| < R\}$

(anulus)

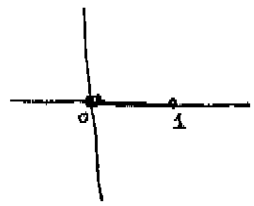
<u>הגדרה</u> 1) תהי $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ תת-קבוצה. $\mathcal{U}$ נקראת פתוחה אם $\underline{\underline{\forall}}\, z \in \mathcal{U}$ $\exists$ $r>0$ כך ש- $D_{z_0}(r) \subset \mathcal{U}$. (כלומר, באופן גס כל נק. ב-$\mathcal{U}$ יש גם "סביבה" של נק. זו שמוכלת ב- $\mathcal{U}$).

2) סביבה של נק. $z \in \mathbb{C}$: קבוצה פתוחה שמכילה את z.

3) $A \subset \mathbb{C}$ תת-קבוצה. $z_0 \in A$ נקראת נק. פנימית אם $\exists$ $r>0$ כך ש- $D_{z_0}(r) \subset A$. קבוצת הנק. הפנימיות של A מסומנת $\mathrm{Int}\, A$.

נובע ש- A פתוחה $\Leftrightarrow$ $\forall z\in A$ הוא נק' פנימית, כלומר $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Int}\, A = A$.

דוגמאות: 1) $\mathrm{Int}\, \overline{D_{z_0}(r)} = D_{z_0}(r)$.   2) $\mathrm{Int}\, [0,1] = \phi$
$\underset{\mathbb{C}}{\cap}$



הגדרה: תת-קבוצה $F \subset \mathbb{C}$ נקראת סגורה אם המשלים שלה, $\mathbb{C} \setminus F$
הינו קבוצה פתוחה.

הערה: נוסף ש- $\mathbb{C}, \phi$ הן גם פתוחות וגם סגורות.

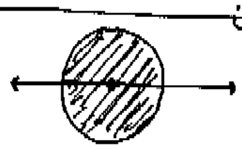
טענה. 1. איחוד כלשהו של קבוצות פתוחות = קבוצה פתוחה. U_α פתוחות $\Rightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha$ פתוחה.
2. חיתוך סופי של קבוצות פתוחות = פתוחה. U_i פתוחות $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ פתוחה.
3. איחוד סופי של סגורות = סגורה.
4. חיתוך כלשהו של סגורות = סגורה.

הגדרה: תהי $A \subset \mathbb{C}$ תת-קבוצה. הסגור (closure) של A: חיתוך כל הסגורות שמכילות את A. $\overline{A} := \bigcap F$ ($F \supseteq A$ סגורה).

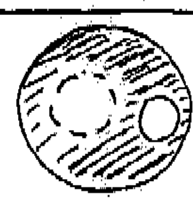
אם $A \subset \mathbb{C}$ תת-קבוצה. השפה של A (boundary) זה $\partial A := \overline{A} \setminus \mathrm{Int}\, A$

טענה. 1) $A \subset \mathbb{C}$ תת-קבוצה. $z \in \partial A$ $\Leftrightarrow$ $\forall r>0$, הדיסק $D_{z_0}(r)$ מכיל:
גם נק' של A וגם נק' של $\mathbb{C} \setminus A$.
2) $\overline{A} = A \cup \partial A$
3) $\overline{A}, \partial A$ הן קבוצות סגורות.
4) $F \subset \mathbb{C}$ סגורה $\Leftrightarrow$ $\overline{F} = F$.
5) $F \subset \mathbb{C}$ סגורה $\Leftrightarrow$ לכל סדרה מתכנסת $z_n \in F$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} z_n \in F$.

דוגמאות: 1)



$A = (-2,2) \cup \overline{D_0(1)}$
A לא סגורה ולא פתוחה.
$\overline{A} = [-2,2] \cup \overline{D_0(1)}$. $\partial A = [-2,2] \cup \partial D_0(1)$.
$\mathrm{Int}\, A = D_0(1)$

2) $A =$ 

$\overline{A} =$ 

$\partial A =$ 

סדרות: $\{z_k\}$, $z_1,\dots,z_n,\dots \in \mathbb{C}$.

הגדרה: תהי $\{z_n\}$ סדרה ב-$\mathbb{C}$. נאמר ש- $z_n \to z$ (או $\lim_{n\to\infty} z_n = z$)
אם $\forall\ \varepsilon>0$
$\exists\ N>0$ כך ש: $n \geq N \Leftarrow |z_n - z| < \varepsilon$.

משפט: 1) $\{z_n\}$ מתכנסת $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}\, z_n$ ו- $\mathrm{Im}\, z_n$ מתכנסות. ובמקרה זה
$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{Re}\, z_n) + i \lim_{n\to\infty}(\mathrm{Im}\, z_n)$.

2) אם $z_n \to z$, $w_n \to w$
אז: $z_n \pm w_n \to z \pm w$, $\forall\ c \in \mathbb{C}$ $cz_n \to cz$,
$\bar{z}_n \to \bar{z}$, $|z_n| \to |z|$, $z_n w_n \to z \cdot w$,
אם $w \neq 0$ $\Leftarrow$ $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}$.

3) $z_n \to z$ $\Longleftrightarrow$ $\forall$ תת-סדרה $\{z_{n_k}\}$ של $\{z_n\}$ מתקיים $z_{n_k} \to z$.

הגדרה: תהי $\{z_n\}$ סדרה ב-$\mathbb{C}$. $z \in \mathbb{C}$ נקודת גבול אם $\exists$ תת-סדרה
z_{n_k} כך ש- $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z$.

משפט: תהי $A \subset \mathbb{C}$. אז $z \in \bar{A}$ $\Longleftrightarrow$ $\exists$ סדרה $\{z_n\}$, $z_n \in A\ \forall$
כך ש- $z_n \to z$.

פונקציות רציפות: $A \subset \mathbb{C}$ לא-ריקה, $f: A \to \mathbb{C}$ פונקציה, $z_0 \in A$.

הגדרה: f נקראת רציפה ב- z_0 $\Leftrightarrow$ $\forall$ סדרה $\{z_n\}$, $A \ni z_n$ $\forall\ n$
מתקיים $f(z_n) \to f(z_0)$.

הגדרה שקולה: אם $\forall\ \varepsilon>0$ $\exists\ \delta>0$ כך ש: אם $|z-z_0|<\delta$ ו- $z \in A$
אז $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$.

הגדרה: $f: A \to \mathbb{C}$ נקראת רציפה $\Leftrightarrow$ f רציפה בכל נק. $z \in A$.

משפט: אם $f: A \to \mathbb{C}$, $g: B \to \mathbb{C}$ רציפות בנק. $z_0 \in A \cap B$ אז: $f \pm g$, $c \cdot f$ $(c \in \mathbb{C})$
$\mathrm{Im} f$, $\mathrm{Re} f$, $f \cdot g$ גם כן רציפות ב- z_0. אם $g(z_0) \neq 0$ אז $\frac{f}{g}$ גם כן רציפה ב- z_0.

טענה. $f:A\to\mathbb{C}$ רציפה ב- z_0, $g:B\to\mathbb{C}$ פונק' ונניח ש- $f(A)\subset B$ ו- g רציפה ב- $f(z_0)$. אזי $g\circ f:A\to\mathbb{C}$ רציפה ב- z_0.

תרגיל. נתבונן ב- $\mathrm{Arg}:\mathbb{C}\setminus 0\to\mathbb{R}$. איפה Arg רציפה?

למעשה, Arg רציפה בתחום $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.

ולא רציפה בנק. $z\in(-\infty,0)$.

מסקנה. $\mathrm{Log}:\mathbb{C}\setminus 0\to\mathbb{C}$ רציפה ב- $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ולא רציפה ב- $(-\infty,0)$.

טענה. תהי $U\subset\mathbb{C}$ קב' פתוחה. $f:U\to\mathbb{C}$ רציפה ב- U $\iff$ $\forall$ קב' פתוחה $V\subset\mathbb{C}$ מתקיים $f^{-1}(V)$ גם כן קב' פתוחה.

$f:A\to\mathbb{C}$ רציפה, A סגורה $\Leftarrow$ $f^{-1}(A)$ סגורה.

גבולות של פונקציות. $A\subset\mathbb{C}$ קב'. $f:A\to\mathbb{C}$ פונקציה. $z_0\in\bar{A}$. נאמר ש- $\lim_{z\to z_0} f(z)$ קיים ושווה ל- w_0 $\iff$ $\forall$ סדרה $\{z_n\}$, $z_n\in A$ $\forall n$ שמתכנסת ל- z_0 מתקיים $f(z_n)\to w_0$.

אם נגדיר כעת $\tilde{f}:A\cup\{z_0\}\to\mathbb{C}$ ע"י

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z) & z\neq z_0\\ w_0 & z=z_0\end{cases}$$

נקבל ש- $\tilde{f}$ פונקציה רציפה ב- z_0.

כל חוקי האריתמטיקה של סדרות מתכנסות חלים גם על פונקציות.

ת"ק קומפקטיות.

הגד. $A\subset\mathbb{C}$ נקראת חסומה $\Leftrightarrow$ $\exists$ R כך ש- $A\subset D_0(R)$.
בדומה קיים המושג של סדרה חסומה.

משפט. תהי $\{z_n\}$ סדרה $\underbrace{\text{ב-}}_{}$ חסומה $\mathbb{C}$. $\Leftarrow$ $\exists$ תת-סידרה z_{n_k} מתכנסת.
במילים אחרות: לכל סידרה חסומה ב- $\mathbb{C}$ יש נק. הצטברות.

הוכחה. נרשום $z_n = x_n+iy_n$. $\{z_n\}$ חסומה לכן $\exists$ R כך ש- $|z_n|<R$ $\forall n$.
$\Leftarrow$ $|x_n|,|y_n|<R$ $\forall n$. לכן הסדרות הממשיות $\{x_n\}$ ו- $\{y_n\}$ חסומות.
$\exists$ תת-סידרה $\{x_{n_k}\}$ שמתכנסת, נניח $x_{n_k}\to x$.
הסידרה $\{y_{n_k}\}$ גם כן חסומה, לכן יש לה תת-סידרה מתכנסת, $\{y_{n_{k_\ell}}\}$
נניח $y_{n_{k_\ell}}\to y$. ברור ש- $x_{n_{k_\ell}}\to x$.

לסכום $z_{n_{k_\ell}}\longrightarrow x+iy$ הינה תת-סידרה מתכנסת של $\{z_n\}$.

קריטריון Cauchy. סידרה $\{z_n\}$ ב- $\mathbb{C}$ הינה מתכנסת $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$
$\exists$ $N>0$ כך ש: $\forall$ $N\le m,n$ מתקיים $|z_n-z_m|<\varepsilon$.

הגדרה. $A\subset\mathbb{C}$ נקראת ת"ק קומפקטית $\Leftrightarrow$ לכל סידרה $\{z_n\}$, $A\ni z_n$ $\forall n$
יש תת-סידרה $\{z_{n_k}\}$ שמתכנסת לגבול ב- A, $\lim_{k\to\infty} z_{n_k}\in A$.

טענה. $A\subset\mathbb{C}$ קומפקטית $\Leftrightarrow$ A סגורה וחסומה.

הוכחה. אם A סגורה וחסומה: תהי $z_n\in A$ $\forall n$. מהחסימות נקבל $\exists$ z_{n_k} שמתכנסת.
לכן $\exists$ $z\in\mathbb{C}$ כך ש- $z=\lim_{k\to\infty} z_{n_k}$. ברור ש- $z\in\bar{A}$. A
סגורה לכן $\bar{A}=A$ $\Leftarrow$ $z\in A$.

אם A קומפקטית. אם A לא חסומה אז $\exists$ סדרה z_n, $A\ni z_n$ $\forall n$ כך
ש- $|z_n|>n$ $\forall n$. $\Leftarrow$ לא קיימת תת-סדרה z_{n_k} שמתכנסת. סתירה. $\Leftarrow A$ חסומה.

נניח ש-A סגורה. ולכן, תהי $z \notin A$ ונראה ש-$\exists r$ כך ש-$D_z(r)\subset \mathbb{C}\setminus A$

(כלו' $\mathbb{C}\setminus A$ פתוחה).

ולכן, נניח להפך. $\Leftarrow$ $\forall n$ נוכל למצוא $z_n\in A\cap D_z(\frac{1}{n})$

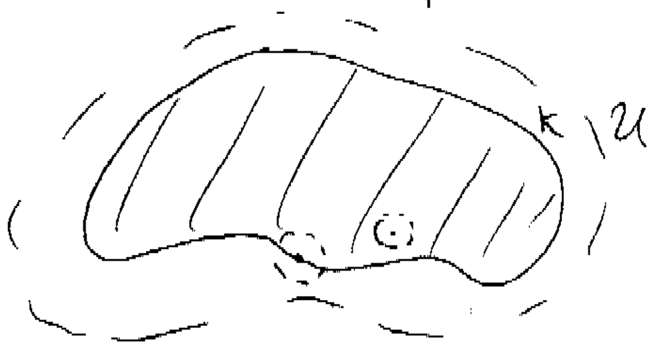
לפי הגדרת הקומפקטיות יש תת-סדרה z_{n_k} שמתכנסת

לאיבר ב-A. $\lim_{k\to\infty} z_{n_k}\in A$. אבל ברור ש-$\lim_{k\to\infty} z_{n_k}=z\notin A$. סתירה.

∎

<u>תכונות של ת"ק קומפקטיות.</u>

<u>טענה.</u> תהי $U\subset\mathbb{C}$ ת"ק פתוחה, ותהי $K\subset U$ ת"ק קומפקטית.
אזי $\exists\, r_0>0$ כך ש: $\forall z\in K$, הדיסק $D_z(r_0)$ מוכל ב-U.



<u>הוכחה.</u> נניח שאין כזה r_0.

$\Leftarrow$ $\forall n\ \exists\, z_n\in K$

כך ש- $D_{z_n}(\frac{1}{n})\not\subset U$.

כלו', יש $\forall n$, $z'_n\notin U$

כך ש $|z'_n-z_n|<\frac{1}{n}$.

K קומפקטית $\Leftarrow$ $\exists\, z_{n_k}$ כך

ש- $\lim_{k\to\infty} z_{n_k}=z\in K$. ברור שגם $\lim_{k\to\infty} z'_{n_k}=z\in K\subset U$.

אבל $z'_{n_k}\notin U$ $\forall k$ לכן לא יתכן ש- $\lim_{k\to\infty} z'_{n_k}\in U$. ($\mathbb{C}\setminus U$ סגורה).

∎

<u>למה Kantor.</u> נניח ש-$K_n\subset\mathbb{C}$ סדרת קבוצות קומפקטיות $\underbrace{\text{לא ריקות}}$! $K_1\supset K_2\supset\dots$

אזי $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\neq\emptyset$.

<u>תרגיל</u> להביא דוגמא לכך כשה-K_n-ים לא קומפקטיים.

<u>טענה.</u> $f:A\to\mathbb{C}$ פונק' רציפה, $K\subset A$ קומפקטית. $\Leftarrow$ $f(K)$ קומפקטית.

<u>טענה.</u> $f:K\xrightarrow{\text{רציפה}}\mathbb{R}$, K קומפקטית. אזי $\min_K f$ ו- $\max_K f$ מתקבלים והם סופיים.

רציפות במ"ש. $f:A\to\mathbb{C}$ נקראת רציפה במ"ש ב-A אם $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ כך ש: $\forall\ z_1,z_2\in A$ המקיימים $|z_1-z_2|<\delta$ מתקיים $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$.

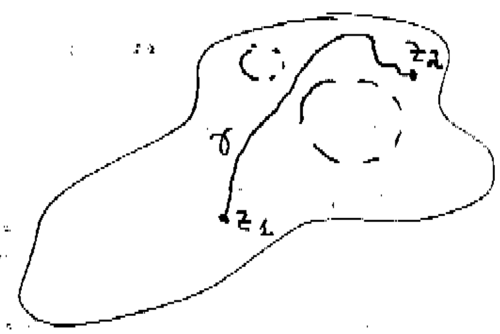
משפט. תהי $K\subset\mathbb{C}$ קומפקטית ו- $f:K\to\mathbb{C}$ רציפה. אזי f רציפה במ"ש על K.

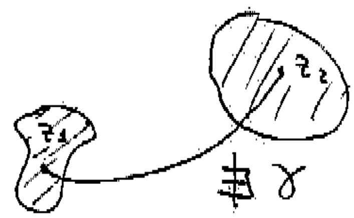
קשירות.

בשבילנו: קשירות = קשירות מסילתית.

הגדרה 1) $A\subset\mathbb{C}$ נקראת קשירה $\iff$ $\forall\ z_1,z_2\in A$ $\exists$ עקומה רציפה ~~[illegible]~~ שמתחילה ב- z_1 ונגמרת ב- z_2 (המוכלת כולה ב- A).

צ"ל: $\exists\ \gamma:[0,1]\to A$ רציפה כך ש- $\gamma(0)=z_1$, $\gamma(1)=z_2$.





הגדרה 2) $A\subset\mathbb{C}$ ו- $z_1,z_2\in A$ נאמרים באותו "רכיב קשירות" $\iff$ $\exists$ עקומה רציפה $\gamma:[0,1]\to A$ כך ש- $\gamma(0)=z_1$, $\gamma(1)=z_2$. להיות באותו רכיב קשירות זה יחס שקילות.

כמובן, קבוצה $A\subset\mathbb{C}$ קשירה $\iff$ יש לה רק רכיב קשירות אחד.

הגדרה. $D\subset\mathbb{C}$ נקרא תחום אם D פתוחה + קשירה.

למה. יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום. אזי $\forall\ z_1,z_2\in D$ ניתן לקשר באמצעות עקומה פוליגונלית. צ"ל: $\gamma:[0,1]\to D$ רציפה, $\gamma(0)=z_1$, $\gamma(1)=z_2$ $\mid$ $\exists$ חלוקה $0=t_0<t_1<\dots<t_{n-1}<t_n$ כך ש- $\gamma([t_i,t_{i+1}])\subset D$ זה קטע ישר $\forall\ 0\le i\le n-1$.

הוכחה... בעזרת קומפקטיות של $[0,1]$.

טענה. תהי [redacted] $f:A\to\mathbb{C}$ פונק' רציפה
אם A קשירה אז גם $f(A)$ קשירה.

הוכחה. יהיו $w_1,w_2 \in f(A)$, $w_1=f(z_1)$, $w_2=f(z_2)$

A קשירה $\Leftarrow$ $\exists\ \gamma:[0,1]\to A$ רציפה כך ש- $\gamma(0)=z_1$, $\gamma(1)=z_2$

נסמן $\tilde{\gamma} = f\circ\gamma:[0,1]\to f(A)$. $\tilde{\gamma}$ רציפה כי γ ו- f רציפות
ומקיים ש- $\tilde{\gamma}(0)=w_1$
$\tilde{\gamma}(1)=w_2$.

∎

[redacted]

הערה. יהי [redacted] $D\subset\mathbb{C}$ (או $D\subset\mathbb{R}$) תחום.
[redacted] את ש- $D = U_1\cup U_2$ כאשר U_2,U_1 קבוצות
פתוחות זרות (פתוחות וזרות ב- $\mathbb{R}$). אז: או $U_1=\phi$, $U_2=D$
או $U_1=D$, $U_2=\phi$.