משפט ההעתקה המסועפת
(branched covering theorem)

<u>הגדרה.</u> תהי f פונק' הולו' בסביבה של z_0
ונניח ש-f לא קבועה. נסמן $w_0=f(z_0)$. נאמר ש-w_0
מתקבל ע"י f בריבוי m בנק' z_0 אם לפונק'
$f(z)-w_0$ יש אפס מסדר m בנק' z_0.

<u>משפט (ההעתקה המסועפת).</u> תהי $f:D_{z_0}(\rho)\longrightarrow\mathbb{C}$
פונק' הולו' לא קבועה. נסמן $w_0=f(z_0)$ ונניח ש-w_0 מתקבל
ע"י f בריבוי m בנק' z_0. יהי $0<r<\rho$ המקיים:

(i) $f(z)\neq w_0$ $\quad\forall\quad z_0\neq z\in\overline{D_{z_0}(r)}$.

(ii) $f'(z)\neq 0$ $\quad\forall\quad z_0\neq z\in\overline{D_{z_0}(r)}$.

נגדיר מ"ס $0<s=s(r)$ ע"י $s=\min\{|f(z)-w_0| : z\in\partial D_{z_0}(r)\}$.
אז:

1) $\forall\, w\in D^*_{z_0}(s)$ הקבוצה $E_w=\{z\in D_{z_0}(r) : f(z)=w\}$ מכילה
<u>בדיוק</u> m נקודות שונות. העיקר: w מתקבל ע"י f
בכל אחת מנק' אלה בריבוי 1.

2) הקבוצה $G=\{z\in D_{z_0}(r) : f(z)\in D_{z_0}(s)\}$
פתוחה וקשירה, כלו' תחום.

לפני ההוכחה שתי הערות: 1) הקיום של $0<r<\rho$ עם התכונות

(i)+(ii) נובע ממשפט העתקה הדיסקרטית. ולמעשה, מאחר

ו-f לא קבועה הקבוצות $\{z\in D_{z_0}(\rho): f(z)=w_0\}$, $\{z\in D_{z_0}(\rho): f'(z)\neq 0\}$

הן דיסקרטיות ב-$D_{z_0}(\rho)$, ולכן, $\exists\ 0<r<\rho$ כנ"ל.

2) המ"ט $s=s(r)$ חיובי כי f רציפה ולא מתאפסת ב-$\partial D_{z_0}(r)$ ו-$\partial D_{z_0}(r)$ ת"ק קומפקטית.

הוכחת משפט הכיסוי המקומי. יהי $w\in D^*_{w_0}(s)$.

נגדיר $g(z)=f(z)-w_0$ ו-$\varphi(z)=f(z)-w$.

נשתמש במשפט Rouché עבור g ו-φ בתחום $D_{z_0}(r)$:

$$\forall z\in\partial D_{z_0}(r):\quad |g(z)-\varphi(z)|=|w-w_0|\underset{\text{א"ש חזק}}{<}s\underset{s\ \text{מהגדרת}}{\leq}|g(z)|\leq|g(z)|+|\varphi(z)|$$

לפי משפט Rouché: $Z_\varphi(D_{z_0}(r))=Z_g(D_{z_0}(r))$

אבל ברור ש-$Z_g(D_{z_0}(r))=m$ כי w_0 מתקבל ע"י f מריבוי m ב-z_0 ולא מתקבל באף נק'. אחרת ב-$D_{z_0}(r)$ (לפי (i)).

$\Leftarrow Z_\varphi(D_{z_0}(r))=m$, ז"א שלמשוואה $\{f(z)=w\}$ יש m פתרונות ב-$D_{z_0}(r)$, כשהספירה היא עם ריבויים. יהי $z\in D_{z_0}(r)$ כך ש-$f(z)=w$. לפי (ii), w מתקבל ע"י f בנק' z בריבוי 1 (שכן $w\neq w_0$). ובסה"כ, w מתקבל ע"י f m פעמים שונות ב-$D_{z_0}(r)$, בכל פעם בריבוי 1.

נשאר רק להראות שהקבוצה G היא תחום.
זמנית, G פתוחה כי f רציפה. נראה ש-G קשירה.

יהי $V\subset G$ רכיב קשירות כלשהו של G. אזי נראה ש-$z_0\in V$
אז סיימנו, כי זה יראה שיש רכיב קשירות יחיד.

נניח בשלילה ש-$z_0\notin \bar{V}$. נגדיר $k:\bar{V}\longrightarrow \mathbb{C}$

ע"י $k(z)=\frac{1}{s}\left(f(z)-w_0\right)$. ברור ש-$k$ רציפה
ב-$\bar{V}$ והולו' ב-V. מאחר ו $z_0\notin\bar{V}$ אז $k(z)\neq 0\ \forall z\in\bar{V}$.

כמו כן, מהגדרת G נקבל ש- $|k(z)|<1\ \forall z\in V$ (*).
משיקולי רציפות נקבל ש- $|k(z)|\le 1\ \forall z\in\bar{V}$.

<u>טענה</u> $|k(z)|=1\ \forall z\in\partial V$.

<u>הוכחה</u> נניח בשלילה ש- $|k(z')|<1$ עבור $z'\in\partial V$ מסוים.
בנוסף, $|f(z)-w_0|\ge s$ $\forall z\in\partial D_{z_0}(r)$, לכן $|k(z)|\ge 1$
$\forall z\in\partial D_{z_0}(r)$, ולכן $z'\notin\partial D_{z_0}(r)$. $\Leftarrow$ $z'\in D_{z_0}(r)$.

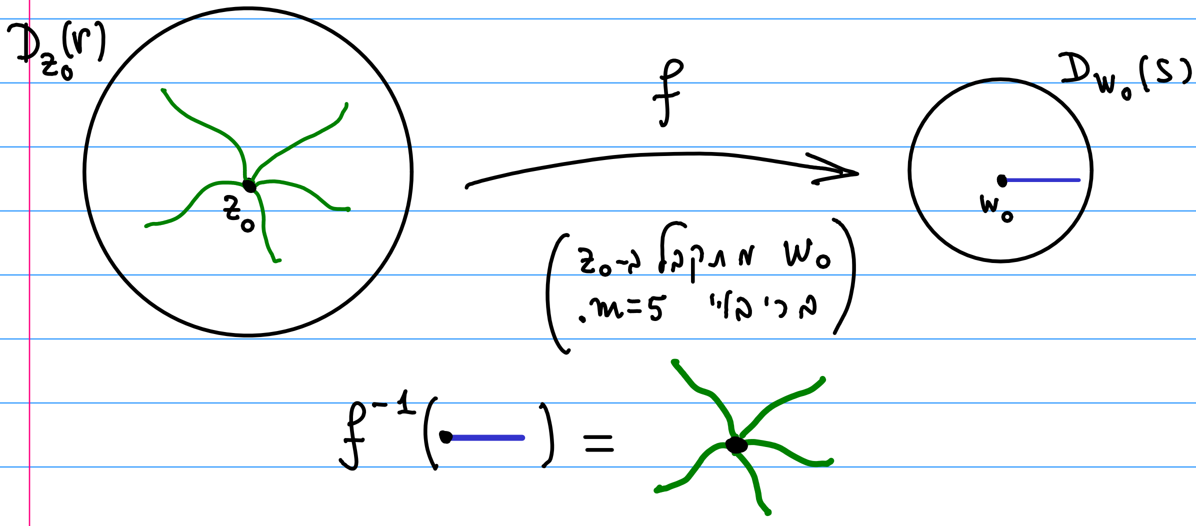
לפי הגדרת G, $G=\{z\in D_{z_0}(r):\ |k(z)|<1\}$
ולכן $z'\in G$. מצד שני $z'\in\partial V\subset\partial G$
ומאחר ו G פתוחה אז $G\cap\partial G=\emptyset$. סתירה. ∎

המשך ההוכחה ש $z_0\in V$. מהטענה הנ"ל קיבלנו ש- $|k(z)|=1\ \forall z\in\partial V$.
נתבונן בפונק' $\frac{1}{k}$. מאחר ו k הולו' ב-V, רציפה ב-$\bar{V}$

ולא מתאפסת ב-$\bar{V}$, אז $\frac{1}{k}$ הולו' ב-V ורציפה ב-$\bar{V}$.
$(\bar{V}=V\cup\partial V)$ מאחר ו $|k(z)|=1\ \forall z\in\partial V$ אז מעיקרון

המקסימום נקבל ש- $\left|\frac{1}{k(z)}\right|\le 1\ \forall z\in V$. $\Leftarrow$ $|k(z)|\ge 1\ \forall z\in V$.
סתירה ל- (*). ∎

מקור המילה "העתקה מסועפת" (branched covering):



מסקנות ממשפט ההעתקה המסועפת.

<u>משפט ההעתקה הפתוחה.</u> תהי f פונק' הולו' ולא קבועה בתחום $\mathcal{D}$. אזי f העתקה פתוחה, כלומר $\forall$ ת"ק פתוחה $\mathcal{U}\subset\mathcal{D}$, גם $f(\mathcal{U})$ ת"ק פתוחה. בפרט, $f(\mathcal{D})$ תחום.

<u>הוכחה.</u> תהי $\mathcal{U}\subset\mathcal{D}$ ת"ק פתוחה ונראה ש-$f(\mathcal{U})$ פתוחה.

תהי $w_0\in f(\mathcal{U})$. $\Leftarrow$ $\exists$ $z_0\in\mathcal{U}$ כך ש-$f(z_0)=w_0$. יהי $\varrho>0$ כך ש-$D_{z_0}(\varrho)\subset\mathcal{U}$. לפי משפט הכיסוי המסועף $\exists$ $s>0$ כך שכל הדיסק $D_{w_0}(s)$ נמצא בתוך התמונה של $D_{z_0}(\varrho)$ תחת f. כלומר $D_{w_0}(s)\subset f(\mathcal{U})$. זה מראה ש-$f(\mathcal{U})$ פתוחה.

זה ש-$f(\mathcal{D})$ תחום נובע מזה ש-$\mathcal{D}$ פתוחה ומזה ש-f מהווה רציפה שומרת על קשירות ולכן $f(\mathcal{D})$ גם כן קשירה. $\blacksquare$

משפט. תהי f הולו' בתחום $\mathcal{D}$. אם f חח"ע ב- $\mathcal{D}$

אזי $f'(z)\neq 0 \quad \forall \quad z\in\mathcal{D}$.

הוכחה. נניח בשלילה ש- $f'(z_0)=0$ עבור $z_0\in\mathcal{D}$.

$\Leftarrow$ הערך $w_0=f(z_0)$ מתקבל ע"י f ב- z_0 בריבוי $2\leq m$.

משפט ההעתקה המעוספת אומר שכל w מספיק קרוב ל- w_0 יתקבל ע"י f לפחות פעמיים ב- $\mathcal{D}$. סתירה לחח"ע של f. ▨

הערות: 1) המשפט הקודם לא מתקיים עבור פונק' C^∞.
למשל $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$, היא חח"ע אבל $f'(0)=0$.

2) יתכן ש- f __לא__ חח"ע ב- $\mathcal{D}$ ובכל זאת $f'(z)\neq 0 \quad \forall \quad z\in\mathcal{D}$.

למשל $f(z)=e^z$, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

למרות זאת, עדיין יש לנו את המשפט הבא:

משפט. תהי f הולו' בתחום $\mathcal{D}$. אם $f'(z_0)\neq 0$ עבור $z_0\in\mathcal{D}$

אזי $\exists$ סביבה $D_{z_0}(r_0)\subset\mathcal{D}$ של z_0 שבה f חח"ע.

הוכחה. מאחר ו- $f'(z_0)\neq 0$ הערך $w_0=f(z_0)$ מתקבל ע"י f ב- z_0 בריבוי $m=1$. ממשפט הריבוי המוכלל נובע שיש תחום $G\subset\mathcal{D}$ כך ש- $z_0\in G$ וכך ש- f מעתיקה את G ל- $D_{w_0}(s)$ עם התכונה ש- $\forall\, w\in D_{w_0}(s)$ יש בדיוק מקור אחד ב- G תחת f. במילים אחרות, $f: G\to D_{w_0}(s)$ חח"ע ועל. ניקח $r_0>0$ קטן כך ש- $D_{z_0}(r_0)\subset G$.

▨

משפט ההעתקה ההפוכה. יהי $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ תחום $f:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$!

פונק' הולו' חח"ע ב- $\mathcal{D}$. אזי הפונק' ההפוכה

$f^{-1}: f(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}$ הינה הולו'.

הוכחה. משפט ההעתקה הפתוחה מבטיח ש- $f(\mathcal{D})$ תחום.
כדי להראות ש-f^{-1} הולו' מספיק שנראה ש- f^{-1} רציפה
(לפי משפט מתחילת הקורס).

ובכן, תהי $z_0\in f(\mathcal{D})$ ונסמן $w_0=f^{-1}(z_0)\in\mathcal{D}$.
ויהי $\varepsilon>0$. נראה ש $\exists\,\delta>0$ כך ש- $f^{-1}(D_{z_0}(\delta))\subset D_{w_0}(\varepsilon)$.

ובכן, $\mathcal{U}=\mathcal{D}\cap D_{w_0}(\varepsilon)$ זו ת"ק פתוחה ב- $\mathcal{D}$ ולכן לפי

לפי משפט ההעתקה הפתוחה $\mathcal{U}':=f(\mathcal{U})$ ת"ק פתוחה ב- $f(\mathcal{D})$
שמכילה את z_0.
נבחר $\delta>0$ מספיק קטן כך ש- $D_{z_0}(\delta)\subset\mathcal{U}'$.

$\Longleftarrow$ $f^{-1}(D_{z_0}(\delta))\subset f^{-1}(\mathcal{U}')=\mathcal{U}\subset D_{w_0}(\varepsilon)$

$\blacksquare$

מסקנות נוספות.

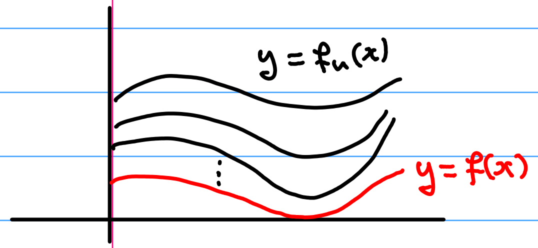
משפט Hurwitz. תהי $f_n:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$ סדרה של פונק' הולו'

בתחום $\mathcal{D}$ ונניח ש-$\forall n$, f_n לא מתאפסת באף נק' של $\mathcal{D}$.

ונניח ש- $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{} f$ במ"ש מקומית ב- $\mathcal{D}$.

אזי: או ש- f לא מתאפסת באף נק' של $\mathcal{D}$ או ש- $f\equiv 0$.

הערה. המשפט הזה לא נכון עבור פונק' C^∞:



הוכחת משפט Hurwitz. נניח בשלילה ש- $f(z_0)=0$ עבור $z_0\in\mathcal{D}$.

אם $f\not\equiv 0$ אז z_0 אפס מבודד של f. $\Leftarrow \exists\, r>0$ כך: ש- $f(z)\neq 0$ $\forall\, z_0\neq z\in D_{z_0}(r)\subset\mathcal{D}$.

נסמן $K=\min_{z\in\partial D_{z_0}(r)}|f(z)|$, ברור ש- $K>0$.

$\partial D_{z_0}(r)$ ת"ק קומפקטית ולכן $\exists\, N>0$ כך: ש $\forall\, n\geq N$ ו $\forall\, z\in\partial D_{z_0}(r)$ מתקיים: $|f_n(z)-f(z)|<K$.

יהי $n_0\geq N$. $\forall\, z\in\partial D_{z_0}(r)$: $|f_{n_0}(z)-f(z)|<K\leq|f(z)|$

לפי משפט Rouché $0=Z_{f_{n_0}}=Z_f>0$

ב- $D_{z_0}(r)$. סתירה. ■

משפט. יהי $f_n:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$ סדרה של פונק' הולו' חח"ע-יות בתחום $\mathcal{D}$. נניח ש- $f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f$ במ"ש מקומית ב- $\mathcal{D}$.

אזי: או f חח"ע ב- $\mathcal{D}$, או f קבועה.

הוכחה. ממשפט קודם, הפונק' f הולו' ב- $\mathcal{D}$. נניח ש- f לא קבועה ב- $\mathcal{D}$ ונראה ש- f חח"ע ב- $\mathcal{D}$.

יהי $z_0\in\mathcal{D}$ ו $z\neq z_0$. נראה ש- $f(z)\neq f(z_0)$.

נתבונן בסדרת הפונק' $g_n(z):=f_n(z)-f_n(z_0)$ בתחום $\mathcal{D}'=\mathcal{D}\setminus\{z_0\}$.

מאחר ש-f_n חח"ע $\forall n$, הפונק' g_n לא מתאפסת באף נק' ב-$\mathcal{D}'$. כמו כן $g_n \longrightarrow g$ במ"ש מקומית ב-$\mathcal{D}'$

כאשר $g(z) := f(z)-f(z_0)$. הפונק' g שונה זהותית 0 ב-$\mathcal{D}'$ כי f לא קבועה (לפי הנחה בתחילת ההוכחה).

לפי משפט Hurwitz, g לא מתאפסת באף נק' ב-$\mathcal{D}'$.

$\Leftarrow f(z)\neq f(z_0)$ כנדרש. $\blacksquare$