

מסלול, מסלול  
 תס"ב  
 17.2.2007

# מבחן באונק' מליכבוד 1

מרכז ה: פאול בירן.

- \* משק הבחינה: 3 שעות.
- \* יש לבגור 4 שאלות (ולא יותר!) מבין 6 השאלות שבמבחן. אין לדבוק בסעיפים משאלות שונות.
- \* אין להשתמש בחומר דרכי כלשהו. אין להשתמש במחשבון.

בהצלחה!!!

(1) (25 נק.) תהינה  $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$  נקודות שונות.  
 תהי  $f: \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_r\} \rightarrow \mathbb{C}$  פונק' הולומורפית המקיימת  
 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ . הוכחי  $e \cdot \sum_{i=1}^r \operatorname{Res}_{z_i}(f) = \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$

(2) (25 נק.) יהי  $c \in \mathbb{C}$ ,  $|c| > e$ . הוכחי שלמעלה  $e^z - cz = 0$   
 קיים פתרון יחיד בתחום  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$  לפתרון לה  
 ממשקלם הריבוי 1.

(3) (25 נק.) תהי  $f: \mathbb{D}_0^*(10) \rightarrow \mathbb{C}$  פונק' הולומורפית ללא קבוצה.  
 נגדן  $e$   $\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{n!}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ . הוכחי  
 של-  $f$  יש נק' סינגולרית עיקרית ב-0.  
 הבחי צאטל לבחי  $f$  המקיימת את התנאים הנ"ל.

(4) 25 נק. חשבו  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$  . נמקו את כל שלבי החישוב.

(5) סה"כ 25 נק. האם קיימת פונק' הולומורפית  $h: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$

המקיימת  $h(z)^2 = z^2 - 1$  לכל  $z \in \mathcal{D}$  ככלי אמצע מהמקרים הבאים:

(א) 10 נק.  $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$  . נמקו!

(ב) 15 נק.  $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  , האם  $[-1, 1] \subset \mathbb{C}$  זהה לקטע הישר המחבר בין הנק. -1 ל-1! . נמקו!

\* תגובה לפילא נמאק או לפילא נמאק נכון מקנה 0 נקודות.

(6) 25 נק. נסמן  $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$

תבי  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  פונק' הולומורפית. גילן שלכל  $n \in \mathbb{N}$  הנק.  $\frac{1}{n}$  היא קוטב של  $f$ . הוכחי שלכל  $\epsilon > 0$  ולכל  $\delta > 0$  קיימת נקודה  $z \in \mathcal{D}$  עם  $\delta < |z| < \delta + \epsilon$  ו-  $|f(z)| < \epsilon$ .

מה זה חכה !!!